

NOM :

Prénom :

- Question de Cours.**
1. Qu'est-ce qu'une transposition? Combien y a-t-il de transpositions? Expliquer pourquoi l'ensemble des transpositions engendre S_n (c'est-à-dire pourquoi toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions).
 2. Donner un ensemble de $n - 1$ transpositions de S_n qui engendre S_n . Expliquer la réponse.

- Exercice 1.**
1. Combien y a-t-il de façons de choisir k objets parmi un ensemble de n objets? Donner (et expliquer) une formule explicite sous forme de factorielles.

2. Montrer que

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l},$$

et en déduire que

$$\sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} = \binom{n}{k} 2^k.$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 2. Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E telles que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. On note $a = |A|$, $b = |B|$ et $e = |E|$. Combien y a-t-il

1. de sous-ensembles de E ?
2. de sous-ensembles de E ayant au moins un élément de A ?
3. de sous-ensembles de E ayant exactement un élément de A ?
4. de sous-ensembles de E ayant au moins un élément de A et au moins un élément de B ?
5. de sous-ensembles de E ayant exactement un élément de A et au moins un élément de B ?
6. de sous-ensembles de E ayant exactement un élément de A et exactement un élément de B ?

Expliquer les réponses.