

NOM :

Prénom :

Question de Cours. Donner la formule d'inclusion – exclusion pour calculer le cardinal de l'union de n ensembles finis A_1, A_2, \dots, A_n . Que donne cette formule pour trois ensembles ?

Exercice 1. 1. Rappeler la formule du binôme de Newton et en donner une explication rapide.

2. En dérivant la formule du binôme pour $(1 + X)^n$, montrer que

$$n(n-1)\cdots(n-k)2^{n-k-1} = \sum_{i=0}^n i(i-1)(i-2)\cdots(i-k) \binom{n}{i},$$

lorsque $n \geq k$.

3. Trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ tels que $i^3 = \alpha i(i-1)(i-2) + \beta i(i-1) + \gamma i$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^n i^3 \binom{n}{i}$.

Exercice 2. Soient n, k, p trois entiers ≥ 0 .

1. Quel est le nombre de k -uplets $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $x_i \geq 1$ et $x_1 + \dots + x_k = n$? Expliquer votre réponse.
2. Quel est le nombre de k -uplets $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $x_i \geq p$ et $x_1 + \dots + x_k = n$? On distinguera le cas où $p = 0$ du cas où $p > 0$. Expliquer rapidement vos formules.