

FEUILLE D'EXERCICES, COURS MPRI 2-38-1
À RENDRE LE JEUDI 19 NOVEMBRE 2020

1. α -ORIENTATIONS ET ARBRES COUVRANTS

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ une valuation sur ses sommets. Pour toute orientation O des arêtes de G , on note $\text{out}_O : V \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à un sommet $v \in V$ associe le nombre d'arêtes sortantes dans l'orientation O au sommet v . On rappelle que O est une α -orientation de G si $\text{out}_O(v) = \alpha(v)$ pour tout sommet $v \in V$.

On suppose ici que G est planaire et $G^* = (V^*, E^*)$ son graphe dual (on note e^* l'arête duale d'une arête e). Un *arbre couvrant* de G est un sous-graphe de G qui est un arbre et dont les sommets couvrent tous les sommets de G . Voir figure 1 (milieu).

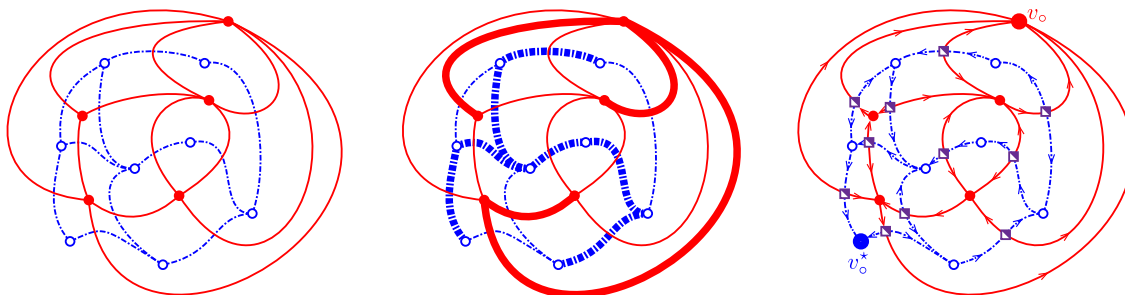


FIGURE 1. Un graphe G et son graphe dual G^* (gauche). Un arbre couvrant T de G et son arbre couvrant dual T^* de G^* (milieu). L'orientation correspondante de \tilde{G} (droite).

Q 1.1. Montrer que T est un arbre couvrant de G si et seulement si $T^* := \{e^* \mid e \in E \setminus T\}$ est un arbre couvrant de G^* .

On note $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ le graphe planaire obtenu en superposant le graphe G et son dual G^* et en ajoutant un sommet w_e à chaque intersection d'une arête e de G avec son arête duale e^* de G^* . On fixe un sommet racine $v_o \in V$ et un sommet racine $v_o^* \in V^*$ dans la même face de \tilde{G} . Voir figure 1 (droite).

Q 1.2. On considère un arbre couvrant T de G et son arbre couvrant dual T^* de G^* . On oriente T vers sa racine v_o et T^* vers sa racine v_o^* . On considère l'orientation O de \tilde{G} obtenue comme suit (voir figure 1 (droite)) :

- pour toute arête $e = (u, v)$ de T orientée de u vers v , les arêtes (u, w_e) et (w_e, v) sont orientées dans la même direction,
- pour toute arête $e^* = (u^*, v^*)$ de T^* orientée de u^* vers v^* , les arêtes (u^*, w_e) et (w_e, v^*) sont orientées dans la même direction,
- toutes les autres arêtes sont orientées depuis leur sommet dans $\{w_e \mid e \in E\}$ vers leur sommet dans $V \cup V^*$.

Montrer que O est une $\tilde{\alpha}$ -orientation de \tilde{G} pour la valuation $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

- $\tilde{\alpha}(v) = 1 = \tilde{\alpha}(v^*)$ pour tous sommets $v \in V \setminus \{v_o\}$ et $v^* \in V^* \setminus \{v_o^*\}$,
- $\tilde{\alpha}(w_e) = 3$ pour toute arête $e \in E$,
- $\tilde{\alpha}(v_o) = 0 = \tilde{\alpha}(v_o^*)$ pour les sommets racines.

Q1.3. Réciproquement, étant donnée une $\tilde{\alpha}$ -orientation O de \tilde{G} , on construit des sous-ensembles T et T^* de \tilde{E} comme suit : pour tout w_e , on considère l'unique arête entrante de w_e et on inclut e dans T si elle provient d'un sommet de V et e^* dans T^* si elle provient d'un sommet de V^* . Montrer que T est un arbre couvrant de G et que T^* est son arbre couvrant dual de G^* (indication : on supposera que T a un cycle et on utilisera la formule d'Euler pour trouver une contradiction).

Q1.4. En déduire qu'il existe une bijection ϕ (resp. ϕ^*) entre les $\tilde{\alpha}$ -orientations de \tilde{G} et les arbres couvrants de G (resp. et les arbres couvrants de G^*).

Q1.5. Décrire le résultat de l'opération de retournement d'une face orientée dans une $\tilde{\alpha}$ -orientation O de \tilde{G} sur l'arbre couvrant $\phi(O)$.

2. ALMOST SIMPLICIAL POLYTOPES

Recall that a polytope is *simplicial* when all its facets are simplices. In this problem, we are interested in polytopes that are not simplicial, but almost. A d -dimensional polytope P is called

- *k-simplicial* if all its faces of dimension k are simplices,
- *s-almost simplicial* if all its facets are simplices, except one which has $d + s$ vertices.

Q2.1. What is a d -simplicial polytope? Explain the equivalences:

$$P \text{ is simplicial} \iff P \text{ is } (d-1)\text{-simplicial} \iff P \text{ is } 0\text{-almost simplicial.}$$

The goal of the problem is to construct k -simplicial and s -almost simplicial polytopes with many faces, using constructions similar to that of the cyclic polytope seen in the course.

2.1. $(d-k)$ -simplicial polytope. In this section, we construct a $(d-k)$ -simplicial polytope with many faces (generalizing the cyclic polytope seen in the course).

Let $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ be a k -tuple of continuous functions $p_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Define a curve $\chi_{\mathbf{p}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ by $\chi_{\mathbf{p}}(t) := (t, t^2, t^3, \dots, t^{d-k}, p_1(t), \dots, p_k(t))$. We fix some numbers $t_1 < \dots < t_n$ and consider the polytope $Q := \text{conv}(\{\chi_{\mathbf{p}}(t_1), \dots, \chi_{\mathbf{p}}(t_n)\})$.

Q2.2. Show that any $d-k+1$ points on the curve $\chi_{\mathbf{p}}$ are affinely independent, and deduce that Q is $(d-k-1)$ -simplicial.

[Hint: compute the rank of the $(d+1) \times (d-k+1)$ -matrix $\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \chi_{\mathbf{p}}(t_1) & \dots & \chi_{\mathbf{p}}(t_{d-k+1}) \end{bmatrix}$ and conclude.]

Q2.3. Show that any subset of at most $\lfloor (d-k)/2 \rfloor$ vertices of Q form a face of Q .

[Hint: use a well chosen polynomial to define a supporting hyperplane of this face.]

2.2. Almost simplicial polytope. In this section, we construct an s -almost simplicial polytope with many faces, using some results of the previous questions (which can now be admitted if needed).

We consider the real function $p(t) := (n-1)^{(t-1)(d-1)}t(t+1) \dots (t+d+s-1)$, we define the curve $\xi(t) := (t, t^2, \dots, t^{d-1}, p(t))$, and we consider the polytope $Q := \text{conv}(\{\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)\})$, where we have chosen this time $t_i := -s-d+i$ for all $i \in [n]$.

To analyse this polytope, for any d -tuple of indices $\underline{i} = (i_1, \dots, i_d) \in [n]$ and for any d -tuple of variables $\underline{z} = (z_1, \dots, z_d)$, we define the determinant

$$D(\underline{i}, \underline{z}) := \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \xi(t_{i_1}) & \xi(t_{i_2}) & \dots & \xi(t_{i_d}) & \underline{z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ t_{i_1} & t_{i_2} & \dots & t_{i_d} & z_1 \\ t_{i_1}^2 & t_{i_2}^2 & \dots & t_{i_d}^2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{i_1}^{d-1} & t_{i_2}^{d-1} & \dots & t_{i_d}^{d-1} & z_{d-1} \\ p(t_{i_1}) & p(t_{i_2}) & \dots & p(t_{i_d}) & z_d \end{bmatrix}.$$

and the half-space

$$H_{\underline{i}} := \{ \underline{z} \in \mathbb{R}^d \mid D(\underline{i}, \underline{z}) \geq 0 \}.$$

We denote by $V(\underline{i})$ the Vandermonde determinant

$$V(\underline{i}) := \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_{i_1} & t_{i_2} & \dots & t_{i_d} \\ t_{i_1}^2 & t_{i_2}^2 & \dots & t_{i_d}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{i_1}^{d-1} & t_{i_2}^{d-1} & \dots & t_{i_d}^{d-1} \end{bmatrix} = \prod_{k < \ell} (t_{i_\ell} - t_{i_k}),$$

Q 2.4. Observe that $p(t_1) = p(t_2) = \dots = p(t_{d+s}) = 0$ and $p(t_i) > 0$ for $d + s + 1 \leq i \leq n$. Deduce that the hyperplane $H_{(1, \dots, d)}$ defines a facet of the polytope Q containing precisely the vertices $\xi(t_1), \dots, \xi(t_{d+s})$.

Q 2.5. Consider now $i_1 < i_2 < \dots < i_d < i_{d+1}$ with $i_{d+1} > d + s$. For any $j \in [d + 1]$, we consider the Vandermonde determinant $W_j := V(i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{d+1})$. Show that

$$D(\underline{i}, \xi(t_{i_{d+1}})) = \sum_{j=1}^{d+1} (-1)^{d+1-j} p(t_{i_j}) W_j.$$

To evaluate this sum, we group terms two by two (leaving the first alone when $d + 1$ is odd) and thus consider the term $p(t_{i_{d+1-2k}}) W_{d+1-2k} - p(t_{i_{d-2k}}) W_{d-2k}$ for any $0 \leq k \leq \lfloor (d+1)/2 \rfloor$. Observe that the definition of $t_i := -s - d + i$ implies that $1 \leq t_{i_q} - t_{i_p} \leq n - 1$ for any $1 \leq p < q \leq d + 1$. Use these inequalities to show that for any $1 < j \leq d + 1$, we have

- $p(t_{i_j})/p(t_{i_{j-1}}) \geq (n - 1)^{d-1}$ with a strict inequality when $j = d + 1$,
- $W_{j-1}/W_j \leq (n - 1)^{d-1}$,

and conclude that $D(\underline{i}, \xi(t_{i_{d+1}})) > 0$ for any choice of $i_1 < i_2 < \dots < i_d < i_{d+1}$ with $i_{d+1} > d + s$.

Q 2.6. Deduce from Question 2.5 that except the facet of Question 2.4, all other facets of the polytope Q are simplices, and conclude that the polytope Q is a s -almost simplicial polytope.

Q 2.7. Using the computation of determinant of Question 2.5, show that a subset $I := \{i_1 < \dots < i_d\}$ with $i_d > d + s$ defines a facet of Q if and only if the number of elements of I between any two elements of $[n] \setminus I$ is even.