

FEUILLE D'EXERCICES, COURS MPRI 2-38-1
À RENDRE LE JEUDI 26 OCTOBRE 2017

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ une valuation sur ses sommets. Pour toute orientation O des arêtes de G , on note $\text{out}_O : V \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à un sommet $v \in V$ associe le nombre d'arêtes sortantes dans l'orientation O au point v . On dit que O est une α -orientation de G si $\text{out}_O(v) = \alpha(v)$ pour tout sommet $v \in V$.

[Q 0.1] Montrer que si O est une α -orientation de G , et O' est obtenue en retournant toutes les arêtes le long d'un cycle orienté de O , alors O' est également une α -orientation de G . Cette opération est illustrée sur la figure 1.

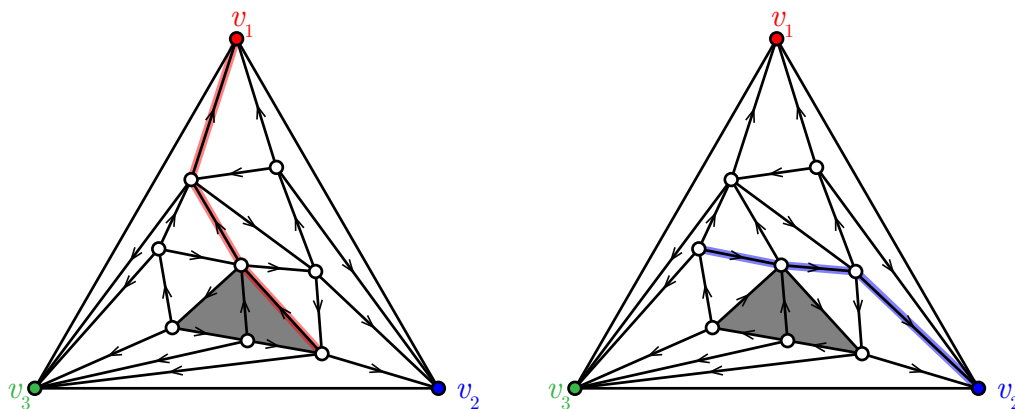


FIGURE 1. Deux 3-orientations d'une même triangulation, obtenues l'une de l'autre en retournant le cycle orienté qui borde les faces grisées. Deux chemins centraux sont surlignés.

1. 3-ORIENTATIONS ET FORÊTS DE SCHNYDER

Soit T une triangulation plane dont on note v_1, v_2, v_3 les sommets sur la face externe. On se propose de montrer dans cet exercice qu'il y a une bijection entre les forêts de Schnyder de T (où on n'oriente pas les arêtes externes) et les 3-orientations de T (*i.e.* les α -orientations avec $\alpha(v) = 3$ pour $v \in V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ et $\alpha(v_i) = 0$). Par définition, une forêt de Schnyder de T fournit une 3-orientation (il suffit d'oublier les couleurs). Réciproquement, considérons une 3-orientation O et une arête e de T . On définit le *chemin central* de e dans O comme le chemin orienté dans O qui part de e et laisse à chaque sommet une arête sortante de chaque côté. Autrement dit, à chaque sommet de ce chemin, l'arête entrante se trouve dans le secteur angulaire opposé de l'arête sortante. Des chemins centraux sont illustrés sur la figure 1.

- [Q 1.2]** Montrer qu'un chemin central dans O ne revient jamais sur ses pas (indication : on supposera au contraire qu'un chemin central forme un cycle et on montrera que la formule d'Euler empêche que tous les sommets à l'intérieur de ce cycle aient 3 arêtes sortantes). En déduire que tout chemin central termine sur l'un des trois sommets v_1, v_2, v_3 .
- [Q 1.3]** Montrer que deux chemins centraux issus d'un même sommet ne peuvent plus se rencontrer (indication : même méthode que la question précédente).
- [Q 1.4]** En déduire que si on colorie chaque arête e de la couleur du sommet v_i atteint par le chemin central de e dans O , alors on obtient une décomposition de O en une forêt de Schnyder.
- [Q 1.5]** Dessiner les forêts de Schnyder correspondant aux 3-orientations de la figure 1.

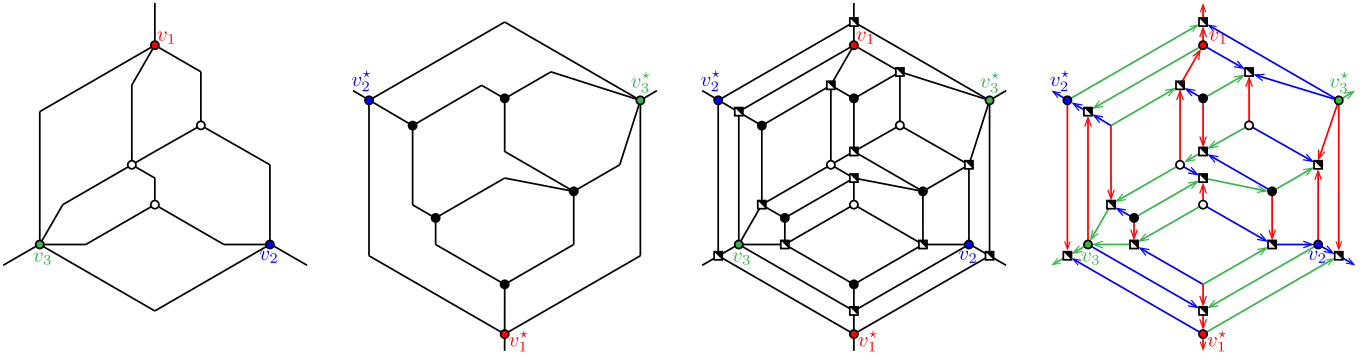


FIGURE 2. Une carte M (gauche), sa carte duale suspendue M^* (milieu gauche), sa carte primale-duale \tilde{M} où v_∞ est à l'infini (milieu droit), et une $\tilde{\alpha}$ -orientation de \tilde{M} avec les forêts de Schnyder de M et M^* correspondantes (droite).

On essaye maintenant de voir comment étendre cette correspondance au cas général des cartes 3-connexes (qui ne sont plus des triangulations). Soit $M = (V, E)$ une carte 3-connexe avec 3 sommets marqués v_1, v_2, v_3 sur la face externe et 3 demi-arêtes sortantes vers la face externe en ces sommets. Soit $M^* = (V^*, E^*)$ la *carte duale suspendue* de M , c'est-à-dire la carte duale de M où on a éclaté le sommet dual de la face externe en trois sommets duaux v_1^*, v_2^*, v_3^* correspondants aux trois secteurs entre les demi-arêtes de la face externe de M , et où on a relié les trois nouveaux sommets v_1^*, v_2^*, v_3^* comme sur la figure 2 (milieu gauche). Soit $\tilde{M} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ la *carte primale-duale* de M , i.e. la carte planaire obtenue en superposant M et M^* , en ajoutant un sommet w_e à chaque intersection d'une arête e de M avec son arête duale e^* de M^* , et en reliant $v_1, v_2, v_3, v_1^*, v_2^*, v_3^*$ à un sommet externe v_∞ . En particulier, $\tilde{V} = V \cup V^* \cup \{w_e \mid e \in E\} \cup \{v_\infty\}$. Voir figure 2.

[Q 1.6] Dessiner deux forêts de Schnyder dont l'orientation sous-jacente est celle de la figure 3.

[Q 1.7] Montrer qu'une forêt de Schnyder W de M et sa forêt duale W^* sur M^* définissent une $\tilde{\alpha}$ -orientation sur \tilde{M} où $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{N}$ est donnée par :

- $\tilde{\alpha}(v) = 3 = \tilde{\alpha}(v^*)$ pour tous sommets $v \in V$ et $v^* \in V^*$,
- $\tilde{\alpha}(w_e) = 1$ pour toute arête $e \in E$,
- $\tilde{\alpha}(v_\infty) = 0$ pour le sommet externe.

[Q 1.8] Vérifier que les deux $\tilde{\alpha}$ -orientations de la carte primale-duale \tilde{M} correspondantes aux deux forêts de Schnyder de la carte M de la figure 3 données à la question Q 1.6 sont distinctes.

En fait, avec les mêmes méthodes que les questions [Q 1.2] à [Q 1.4], on peut montrer qu'il y a une bijection entre les forêts de Schnyder d'une carte M , les forêts de Schnyder de sa carte duale suspendue M^* , et les $\tilde{\alpha}$ -orientations de sa carte primale-duale \tilde{M} . Pour plus de détails, on conseille la lecture de l'article

Stefan Felsner. *Lattice Structures from Planar Graphs*. *Electron. J. Combin.* 11, #R15, 2004.

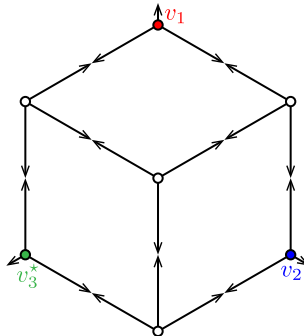


FIGURE 3. Une biorientation d'une carte M qui correspond à deux forêts de Schnyder de M .

2. 3-ORIENTATIONS DES TRIANGULATIONS EMPILÉES

On dit qu'une triangulation T est *empilée* si :

- T est réduite à un triangle, ou
- T s'obtient à partir d'une triangulation empilée T' en raffinant un triangle pqr en trois triangles pqt , qrt , prt (on peut imaginer qu'on empile un tétraèdre aplati $pqrt$ sur le triangle pqr).

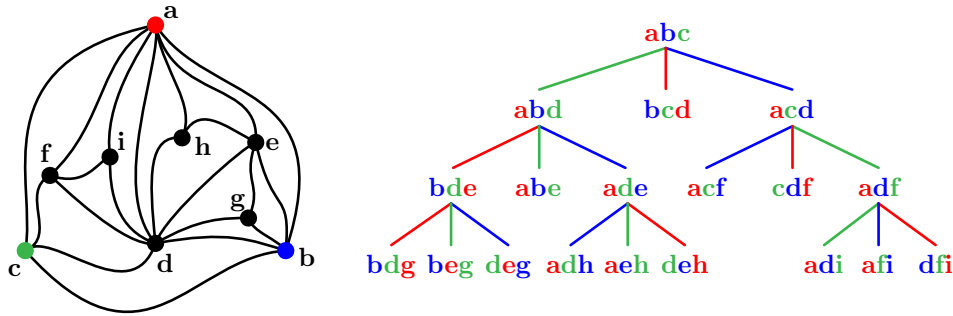


FIGURE 4. Une triangulation empilée (gauche) et son arbre de construction (droite).

On appelle *arbre de construction* de T l'arbre dont les noeuds correspondent aux triangles de T et dont les fils du triangle pqr sont les trois triangles pqt , qrt , prt qui le raffinent. Notez le coloriage utilisé pour les arêtes et les trois lettres de chaque sommet dans cet arbre. Voir figure 4.

- [Q 2.1] Quel est le nombre d'arêtes et de triangles d'une triangulation empilée à $n + 3$ sommets ? Vos résultats correspondent-ils à ce que donne la formule d'Euler ?
- [Q 2.2] Montrer qu'une triangulation empilée admet une unique forêt de Schnyder. On décrira l'unique étiquetage des angles de Schnyder et l'unique forêt de Schnyder.
- [Q 2.3] Exprimer les coordonnées barycentriques des sommets du plongement de Schnyder d'une triangulation empilée en fonction de son arbre de construction. Illustrer ce plongement sur la triangulation de la figure 4 (gauche).

Réciproquement, on veut montrer que toute triangulation qui n'a qu'une seule forêt de Schnyder est empilée. Pour cela, on utilise la correspondance entre forêts de Schnyder et 3-orientations vue dans la partie précédente. Supposons donc qu'une triangulation T a une unique 3-orientation O .

- [Q 2.4] Montrer que O n'a pas de cycle orienté, et donc qu'il existe au moins un sommet v_o sans arête entrante dans O . En déduire que v_o est de degré 3.
- [Q 2.5] En supprimant ce sommet et en travaillant par récurrence, montrer que T est empilée.

3. α -ORIENTATIONS ET ARBRES COUVRANTS

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire et $G^* = (V^*, E^*)$ son graphe dual (on note e^* l'arête duale d'une arête e). Un *arbre couvrant* de G est un sous-graphe de G qui est un arbre et dont les sommets couvrent tous les sommets de G . Voir figure 5 (milieu).

- [Q 3.1] Montrer que T est un arbre couvrant de G si et seulement si $T^* := \{e^* \mid e \in E \setminus T\}$ est un arbre couvrant de G^* .

On note $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ le graphe planaire obtenu en superposant le graphe G et son dual G^* et en ajoutant un sommet w_e à chaque intersection d'une arête e de G avec son arête duale e^* de G^* . On fixe un sommet racine $v_o \in V$ et un sommet racine $v_o^* \in V^*$ dans la même face de \tilde{G} . Voir figure 5 (droite).

- [Q 3.2] On considère un arbre couvrant T de G et son arbre couvrant dual T^* de G^* . On oriente T vers sa racine v_o et T^* vers sa racine v_o^* . On considère l'orientation O de \tilde{G} obtenue comme suit (voir figure 5 (droite)) :

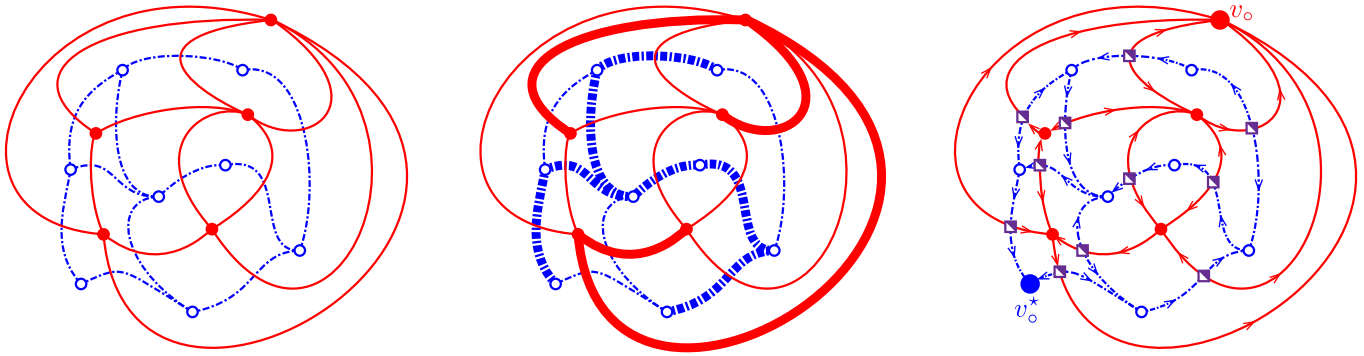


FIGURE 5. Un graphe G et son graphe dual G^* (gauche). Un arbre couvrant T de G et son arbre couvrant dual T^* de G^* (milieu). L'orientation correspondante de \tilde{G} (droite).

- pour toute arête $e = (u, v)$ de T orientée de u vers v , les arêtes (u, w_e) et (w_e, v) sont orientées dans la même direction,
- pour toute arête $e^* = (u^*, v^*)$ de T^* orientée de u^* vers v^* , les arêtes (u^*, w_e) et (w_e, v^*) sont orientées dans la même direction,
- toutes les autres arêtes sont orientées depuis leur sommet dans $\{w_e \mid e \in E\}$ vers leur sommet dans $V \cup V^*$.

Montrer que O est une $\tilde{\alpha}$ -orientation de \tilde{G} pour la valuation $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

- $\tilde{\alpha}(v) = 1 = \tilde{\alpha}(v^*)$ pour tous sommets $v \in V \setminus \{v_\circ\}$ et $v^* \in V^* \setminus \{v_\circ^*\}$,
- $\tilde{\alpha}(w_e) = 3$ pour toute arête $e \in E$,
- $\tilde{\alpha}(v_\circ) = 0 = \tilde{\alpha}(v_\circ^*)$ pour les sommets racines.

- [Q 3.3] Réciproquement, étant donnée une $\tilde{\alpha}$ -orientation O de \tilde{G} , on construit des sous-ensembles T et T^* de \tilde{E} comme suit : pour tout w_e , on considère l'unique arête entrante de w_e et on inclut e dans T si elle provient d'un sommet de V et e^* dans T^* si elle provient d'un sommet de V^* . Montrer que T est un arbre couvrant de G et que T^* est son arbre couvrant dual de G^* (indication : on supposera que T a un cycle et on utilisera la formule d'Euler pour trouver une contradiction).
- [Q 3.4] En déduire qu'il existe une bijection ϕ (resp. ϕ^*) entre les $\tilde{\alpha}$ -orientations de \tilde{G} et les arbres couvrants de G (resp. et les arbres couvrants de G^*).
- [Q 3.5] Décrire le résultat de l'opération de retournement d'une face orientée dans une $\tilde{\alpha}$ -orientation O de \tilde{G} sur l'arbre couvrant $\phi(O)$.