De la réduction en forme normale d'un système non normal d'équations différentielles*

Publié par A. Clebsch d'après les manuscrits posthumes de l'ill. C.G.J. Jacobi.†

2 avril 2004

Dans mon article « Théorie du dernier multiplicateur »[1], j'ai déterminé le multiplicateur des équations différentielles isopérimétriques c'est-à-dire qui se rapportent au problème isopérimétrique consistant à rendre nulle la variation d'une intégrale donnée, dépendant d'une variable indépendante et de plusieurs variables dépendantes.

J'ai montré que cette détermination était exposée à de grandes et multiples difficultés si les dérivées les plus hautes des variables dépendantes intervenant dans l'intégrale donnée ne sont pas du même ordre.

Dans ce cas, le système d'équations différentielles isopérimétriques ne sera pas dans une forme telle que les dérivées les plus hautes de chacunes des variables dépendantes peuvent être prises pour des inconnues dont les valeurs seront déterminées par les équations elles-mêmes.

On ramènera alors les équations différentielles isopérimétriques à la forme que j'ai indiquée seulement après certaines dérivations et éliminations ; ceci rend compliquée la recherche de la valeur du multiplicateur.

En récompense de ce travail, j'ai obtenu tout le matériel nécessaire pour exposer avec soin la réduction en forme normale d'un système non normal d'équations différentielles. Dans cette recherche, je suis parvenu à des propositions générales que l'on verra combler certaines lacunes de la théorie des équations différentielles ordinaires et dont je vais ici indiquer brièvement l'essentiel.

---

*Un autre article posthume de l'Ill. Jacobi portant sur le même sujet et contenant les démonstrations de propositions énoncées ici se trouve dans les Diarii mathematicii vol. LXIV p. 297. (cf. ce vol. p. 191 [« De investigando ordine systematis aequationum differentialum », *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, fünfter Band*, herausgegeben von K. Weierstrass, Berlin, Bruck und Verlag von Georg Reimer, 1890, p. 191-216])

†Traduit du latin par F. Ollivier (CNRS), FRE CNRS 2341, École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, mél. francois.ollivier@stix.polytechnique.fr avec l'aide d'Alexandre Sedoglavic, LIFL, UMR CNRS 8022, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX, mél. sedoglav@lifl.fr. N.d.T.

[1]§§. 30–33 de l'article cité, Jour. Crelle, vol. XXIX, ou cette éd. vol. IV p. 495 et suiv. [« Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialum vulgarium applicandi », *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, vierter Band*, herausgegeben von K. Weierstrass, Berlin, Bruck und Verlag von Georg Reimer, 1890, p. 495–509].

§. 1.

L'ordre d'un système de m équations différentielles et sa réduction la plus rapide en forme normale sont déterminés par la résolution du problème suivant : transformer un tableau carré donné de m^2 quantités par l'addition à chaque ligne de nombres $l_1, l_2, \ldots, l_m$ minimaux pour le munir d'un système de maxima transversaux.

Nous appelons la variable indépendante t, ses fonctions — ou variables considérées comme dépendantes — $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Soient entre ces variables m équations différentielles :

$$u_1 = 0, \ldots, u_m = 0.$$

Soit $a_{i,\kappa}$ l'ordre le plus haut qui échoit à une dérivée de la variable x_κ, je dis que :

1) l'ordre du système d'équations différentielles proposées, ou bien encore le nombre de constantes arbitraires que réclame leur intégration complète, est égal au *maximum* qu'atteignent toutes les sommes :

$$a_{i_1,1} + a_{i_2,2} + \cdots + a_{i_m,m}$$

si l'on choisit les indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tous différents de toutes les manières possibles parmi les indices $1, 2, \ldots, m$.

Je désignerai par O ce *maximum*, ou ordre du système ; O sera égal à la somme des ordres des dérivées les plus hautes de chacunes des variables qui apparaissent dans le système normal auquel le système proposé peut être réduit. Ce même nombre O sera inférieur à la somme formée de la même manière respectivement au système proposé.

Il existe différentes formes normales — et toujours au moins deux[2] — auxquelles le système proposé peut être réduit ; ces réductions ne s'effectuant pas sans l'aide de diverses dérivations et éliminations. Dans ce domaine, cette proposition est fondamentale :

2) parmi les diverses manières de dériver les équations différentielles proposées pour que naissent des équations auxiliaires à l'aide desquelles le système proposé puisse être réduit en forme normale par des éliminations seules, il existe une *manière unique* qui requiert *le moins* de dérivations, car de n'importe quelle autre manière, certaines des équations différentielles proposées, ou toutes, doivent être dérivées un plus grand nombre de fois successives, tandis qu'il ne peut se faire d'aucune autre manière que l'une des équations différentielles proposées soit dérivée moins de fois.

Nous désignons cette manière la plus rapide sous le nom de *réduction la plus brève*. Dans cette réduction, il y aura toujours une ou plusieurs des équations différentielles proposées qui ne seront pas dérivées du tout, c'est-à-dire telles qu'aucune de leurs dérivées ne contribue au système d'équations auxiliaires. Donc, si nous supposons que pour former les équations auxiliaires, l'équation $u_i = 0$ doit être dérivée l_i fois de suite, parmi les nombres entiers non négatifs :

$$l_1, l_2, \ldots, l_m$$

un ou plusieurs sont toujours égaux à zéro. Pour trouver ces nombres, dont dépend entièrement la réduction la plus brève, il faut résoudre le problème suivant.

[2]S'il y a au moins deux variables et si chacune d'elle n'intervient pas dans une unique équation, les ordres sur les dérivées $x_1 \gg x_2$ et $x_2 \gg x_1$ fournissent deux formes normales différentes, la première contenant une équation ne dépendant que de x_2, la seconde une équation ne dépendant que de x_1.

Problème.

« Étant données m_2 quantités $a_{i,\kappa}$ quelconques, où i et κ doivent prendre les valeurs $1, 2, \ldots, m$, rechercher m quantités positives ou nulles *minimales* $l_1, l_2, \ldots, l_m$ telles que, en posant $a_{i,\kappa} + l_i = p_{i,\kappa}$ on puisse parmi les m^2 quantités $p_{i,\kappa}$ choisir m quantités :

$$p_{i_1,1}, p_{i_2,2}, \ldots, p_{i_m,m}$$

placées dans des séries horizontales et verticales différentes dont chacune prenne la valeur maximale parmi les quantités de la même verticale ou ne soit inférieure à aucune autre quantité de la même verticale. »

Solution.

J'indiquerai brièvement les principales étapes de la solution du problème proposé. Disposons les quantités $a_{i,\kappa}$ en un tableau carré :

$$(A) \quad \begin{cases} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m}, \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,m}. \end{cases}$$

Si l'on trouve une série horizontale dont aucun terme n'est maximum (par ce terme, j'entendrai toujours ici qu'il n'est inférieur à aucun des autres termes) parmi tous ceux de la même *verticale*, j'ajoute à tous les termes de cette série horizontale une même quantité positive et de valeur minimale pour que l'un de ses termes devienne égal au maximum de sa verticale.

Après la préparation indiquée, si l'on a changé le carré proposé en le suivant :

$$(B) \quad \begin{cases} b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,m}, \\ b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m,1}, b_{m,2}, \ldots, b_{m,m}, \end{cases}$$

il n'y aura aucune série horizontale du carré (B), dans laquelle ne se trouve pas de terme maximal parmi tous ceux de sa verticale. J'attache à un carré de cette sorte les dénominations suivantes, qui sont à bien retenir.

J'appelle système de *maxima transversaux* un système de quantitées $b_{i,\kappa}$ qui sont placées dans des séries horizontales et verticales toutes différentes et dont chacune est *maximale* parmi toutes les quantités placées dans la même verticale.

Je prends dans le carré (B) le nombre maximal de maxima transversaux, et quand le même nombre apparaît de plusieurs manières, je choisis arbitrairement l'un des systèmes, dont je marque les termes d'un astérisque. Le nombre maximal de ces maxima transversaux peut être ou 2 [3] ou 3 etc. ou m ; si leur nombre est m, le problème proposé est résolu. Si ce nombre est plus petit que m, je fait en sorte d'augmenter certaines des séries horizontales de nombres minimaux tels que dans le nouveau carré obtenu, le nombre de maxima transversaux se trouve augmenté. En répétant ce processus, on parviendra nécessairement à un carré dans lequel le nombre de maxima transversaux est m ; l'ayant obtenu, la solution du problème est trouvée. Je dis ici *qu'une série horizontale est augmentée*, si une même quantité positive est ajoutée à chacun de ces termes.

Les séries horizontales et verticales auxquelles appartient le système de maxima transversaux choisis, je les appelle séries H et V, et les autres séries horizontales et verticales H' et V'. Je note aussi d'un *astérisque* les termes maximaux dans une des verticales de V'. J'appelle *maxima étoilés* les termes marqués d'un astérisque.

Supposons que dans une série horizontale h_1 se trouve un maximum étoilé auquel soit égal un terme d'une série horizontale h_2 placé dans la même verticales ; que dans la série h_2 se trouve un maximum étoilé auquel est égal un terme de la même verticale placé dans une série horizontale h_3, etc. Si de cette manière, on parvient à la série horizontale h_α, où h_α désigne l'une des séries $h_2, h_3, \ldots, h_m$, je dirai que *l'on passe de h_1 à h_α*. Si l'on dit que l'on passe de h_1 à h_α, la série h_1 et toutes les séries intermédiaires $h_2, h_3, \ldots, h_{\alpha-1}$ appartiennent aux séries de H ; la série h_α peut appartenir aux séries de H ou aux séries de H'. Si l'on ne peut passer à une série de H' depuis une série horizontale dans laquelle se trouve deux ou plusieurs maxima étoilés, et s'il n'y a pas de terme d'une série de H' maximal dans l'une des séries de V', ceci est un critère certifiant que le nombre de maxima transversaux choisis est *maximal.*

Ceci posé, je distribue toutes les séries horizontale en trois classes.

> À la *première classe* des séries horizontales, je rattache les séries dans lesquelles se trouvent *deux ou plusieurs* maxima étoilés ainsi que toutes les séries horizontales vers lesquelles on passe depuis ces séries ; aucune des séries de la première classe n'appartient à H'.
>
> Je rattache à la *deuxième classe* des séries horizontales, celles n'appartenant pas à la première, à partir desquelles on ne peut passer à l'une des séries de H'.
>
> Je rattache à la *troisième classe* des séries horizontales toutes les séries de H' et les séries de H à partir desquelles on peut passer à une série de H'.

Cette répartition faite, j'augmente toutes les séries appartenant à la troisième classe d'une quantité identique et minimale pour que, leur étant ajoutée, l'un des termes de ces séries devienne égal à l'un des maxima étoilés de la première ou de la deuxième classe placé dans la même verticale. Si ce maximum étoilé appartient à une série horizontale de la deuxième classe, celle-ci, dans le nouveau carré obtenu, passe à la troisième classe et il ne se produit pas d'autres changements dans la répartition des séries[4]. Dans ce cas, l'opération doit être itérée, la nouvelle série étant transférée de la deuxième à la troisième classe et cela jusqu'à

[3] La préparation appliquée, par laquelle le tableau carré (A) a été changé en tableau (B), fait que 2 soit la valeur minimale de ce nombre, cette valeur apparaissant si tous les maxima se trouvent dans la même série horizontale et si en outre, dans une verticale tous les termes sont égaux entre eux. Voir Diarium math. vol. LXIV p. 312 ou ce vol. p. 208. [Notre traduction p. ? ? ?]

[4] À ceci près que toutes les séries depuis lesquelles on passe à celle-ci passent dans la troisième classe. N.d.T.

ce que l'un des termes d'une série de la troisième classe ne devienne égal à l'un des maxima étoilés d'une série de la *première* classe. Ceci adviendra nécessairement lorsque toutes les séries de la seconde classe seront passées dans la troisième, si cela ne se produit pas avant. Nous obtenons ainsi en même temps un carré dans lequel se trouve un plus grand nombre de maxima transversaux que dans le carré (B). Alors, ayant de nouveaux réparti les maxima étoilés et partagé les séries horizontales en trois classes, un nouveau carré doit être formé par la même méthode, dans lequel le nombre de maxima transversaux se trouvera de nouveau augmenté en continuant jusqu'à ce que l'on parvienne à un carré dans lequel on ait m maxima transversaux. Le carré ainsi trouvé sera dérivé du carré (A) proposé en ajoutant aux séries horizontales des quantités positives minimales qui seront les quantités cherchées $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

À cause de la complication de la règle, on s'aidera de la présentation d'un unique exemple, contenu dans la figure suivante :

(A)

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	κ
a	14	23	1	5	73	$\underline{91}$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}$
b	25	32	2	4	62	81	9	23	4	88
c	14	1	7	16	21	7	13	12	3	77
d	11	$\underline{53}$	$\underline{61}$	4	3	1	12	1	4	91
e	9	21	23	18	27	3	6	9	12	15
f	4	16	18	13	5	12	23	21	14	81
g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}$	3	7	13
h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
i	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88
k	16	28	30	25	34	10	13	16	19	42

(1)

On considère le carré (A), dont j'ai souligné les termes maximaux dans leur série verticale ; il en sera fait de même dans les carrés dérivés. J'ai désigné les séries horizontales par les lettres $a, b, \ldots, k$. Notons que b, c, e, f, i, k ne contiennent aucun terme souligné. En soustrayant les termes de b des termes soulignés de leur verticale, on obtient les différences :

$$2, 21, 59, 33, 21, 10, 82, 11, 19, 11$$

où 2 est la plus petite : par conséquent, j'augmente de 2 la série b. Les termes de la série c diffèrent des termes soulignés de leur verticale des quantités :

$$13, 52, 54, 21, 62, 84, 78, 22, 20, 22,$$

comme 13 en est la plus petite, j'augmente la série c de la quantité 13. De la même manière, je déduis le carré (B) en augmentant c, f, i, k des quantités respectives $11, 9, 2, 4$ et j'en décris la construction par le symbole :

$$(B) \quad (a,\ b+2,\ c+13,\ d,\ e+11,\ f+9,\ g,\ h,\ i+2,\ k+4).$$

(B)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V'	V	V
I	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}^*$	10	$\underline{34}^*$	5	$\underline{99}^*$
III	b	$\underline{27}^*$	34	4	6	64	83	11	25	6	90
III	c	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}^*$	26
III	f	13	25	27	22	14	21	32	30	$\underline{23}$	90
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}^*$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}^*$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
III	i	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
III	k	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$	46
			19	27	8	19	8	59	4		9

Dans le carré (B), on peut affecter au plus *six* maxima transversaux ; les séries verticales dans lesquelles ils sont placés sont surmontées d'un V, les autres d'un V'. Je note d'un astérisque ces mêmes maxima. Si dans l'une des séries de V' apparaît un terme souligné, je le note aussi d'un astérisque. J'attache à la classe I les séries a, d, g dans lesquelles apparaissent deux maxima étoilés ou plusieurs. Dans les sept verticales auxquelles ces maxima appartiennent aucun autre terme souligné n'apparaît, donc a, d et g constituent seules la première classe. Les séries c, f, i, k, puisqu'on n'y trouve aucun terme étoilé, appartiennent à la classe III. On peut ensuite passer de e aux séries f et k et de b aux séries c et i ; donc les séries b et e appartiennent aussi à la troisième classe. On déduit en effet de la définition énoncée ci-dessus qu'on passe à série horizontale s depuis une autre s_1, s'il y a dans s un terme souligné non étoilé et dans la même verticale un terme étoilé appartenant à la série s_1. Comme les séries a, d, g appartiennent à la première, et les séries b, c, e, f, i, k à la troisième, reste la série k qui constitue la deuxième classe. Maintenant, dans chaque série verticale dans laquelle se trouve un maximum étoilé appartenant à une série de la première ou de la deuxième classe, on prend un terme d'une série de la troisième classe *immédiatement inférieur* et l'on note sous la série verticale la différence des deux termes. De ces différences :

$$53 - 34 = 19, \quad 61 - 34 = 27, \quad 37 - 29 = 8, \quad 83 - 64 = 19,$$
$$91 - 83 = 8, \quad 91 - 32 = 59, \quad 34 - 30 = 4, \quad 99 - 90 = 9,$$

on prend le minimum 4 ; on obtient le prochain carré en augmentant toutes les séries de la troisième classe de la quantité 4. Ce carré peut être désigné par le symbole :

$$(C) \quad (a,\ b+6,\ c+17,\ d,\ e+15,\ f+13,\ g,\ h,\ i+6,\ k+8).$$

(C)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V'	V	V
I	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}^*$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}^*$
III	b	$\underline{31}^*$	38	8	10	68	87	15	29	10	94
III	c	$\underline{31}$	18	24	33	38	24	30	29	20	94
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	24	36	38	33	42	18	21	24	$\underline{27}^*$	30
III	f	17	29	31	26	18	25	36	$\underline{34}^*$	$\underline{27}$	94
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}^*$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}^*$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
III	i	$\underline{31}$	18	24	33	38	24	30	29	20	94
III	k	24	36	38	33	42	18	21	24	$\underline{27}$	50
			15	23	4	15	4	61	5		5

Nous voyons que dans le carré (C), on trouve *sept* maxima transversaux et qu'un nouveau terme étoilé est apparu dans la série F ; cette série passe de la deuxième à la troisième classe. J'écris en dessous les quantités dont les termes étoilés des séries des premières et deuxièmes classes dominent dans le carré (C) les termes *immédiatement inférieurs* de la troisième appartenant à la même verticale. Comme le minimum de ces quantités est 4, en augmentant de 4 toutes les séries de la classe III, je forme le carré

$$(D) \quad (a,\ b+10,\ c+21,\ d,\ e+19,\ f+13,\ g,\ h,\ i+10,\ k+12).$$

dans lequel se trouve déjà *huit* maxima transversaux.

(D)

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V'	V	V
II	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}^*$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}^*$
II	b	35	42	12	14	72	$\underline{91}^*$	19	33	14	98
III	c	$\underline{35}^*$	22	28	$\underline{37}$	42	28	34	33	24	98
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	28	40	42	$\underline{37}$	46	22	25	28	$\underline{31}^*$	34
II	f	17	29	31	26	18	25	36	$\underline{34}^*$	$\underline{27}$	94
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}^*$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
III	h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}^*$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
III	i	$\underline{35}$	22	28	$\underline{37}$	42	28	34	33	24	98
III	k	28	40	42	$\underline{37}$	46	22	25	28	$\underline{31}$	54
			13	19		10	63	57	1		1

La disposition des astérisques doit, selon les règles données, être un peu modifiée dans le carré (D) ; ceci fait, les séries a, b et h migrent respectivement des classes I, III et II vers les classes II, II et III. Les termes étoilés des classes I et II dominent les termes *immédiatement inférieurs* de la classe III et des mêmes verticales des nombres 13, 19, 10, 63, 57, 1, 1 ; en augmentant de leur minimum 1 toutes les séries de la classe III, je déduis le carré

$$(E) \quad (a,\ b+10,\ c+22,\ d,\ e+20,\ f+13,\ g,\ h+1,\ i+11,\ k+13),$$

dans lequel le nombre de maxima transversaux est le *même*.

(E)

		V	V	V'	V	V'	V	V	V	V	V
III	a	14	23	1	5	73	$\underline{91}^*$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}^*$
III	b	35	42	12	14	72	$\underline{91}^*$	19	33	14	98
III	c	$\underline{36}^*$	23	29	$\underline{38}$	43	29	35	34	25	99
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	29	41	43	$\underline{38}$	47	23	26	29	$\underline{32}^*$	35
III	f	17	29	31	26	18	25	36	$\underline{34}^*$	$\underline{27}$	94
I	g	25	43	13	16	$\underline{83}^*$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	28	8	18	$\underline{38}^*$	74	9	12	25	$\underline{24}$	23
III	i	$\underline{36}$	23	29	$\underline{38}$	43	29	35	34	25	99
III	k	29	41	43	$\underline{38}$	47	23	26	29	$\underline{32}$	55
			11	18		9		55			

La structure du carré (E) ne diffère de celle du carré (D) que par le fait que trois séries a, b et f de la classe II sont passées à la classe III. En effet, f et a sont passées à la classe III parce que leurs termes étoilés 34 et 99 sont devenus égaux aux termes des séries i et c placés dans les mêmes verticales ; quand à b, elle est passée à la classe III car son terme étoilé est devenu égal au terme dans la même verticale de la série a qui est déjà passée à la classe III. Du carré (E) on déduit par les règles énoncées le carré

$$(F) \quad (a+9,\ b+19,\ c+31,\ d,\ e+29,\ f+22,\ g,\ h+10,\ i+20,\ k+22),$$

dans lequel se trouvent *neuf* maxima transversaux.

(F)

		V	V	V'	V	V	V	V	V	V	V
III	a	23	32	10	14	82	$\underline{100}$	19	$\underline{43}$	14	$\underline{108}^*$
III	b	44	51	21	23	81	$\underline{100}^*$	28	42	23	107
III	c	$\underline{45}^*$	32	38	$\underline{47}$	52	38	44	43	34	$\underline{108}$
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	38	50	52	$\underline{47}$	56	32	35	38	$\underline{41}^*$	44
III	f	26	38	40	35	27	34	45	$\underline{43}^*$	36	103
II	g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	37	17	27	$\underline{47}$	$\underline{83}^*$	18	21	34	33	32
III	i	$\underline{45}$	32	38	$\underline{47}^*$	52	38	44	$\underline{43}$	34	$\underline{108}$
III	k	38	50	34	$\underline{47}$	56	32	35	38	$\underline{41}$	64
			2	9		1		46			

Du carré (F), on déduit le carré

$$(G)\quad (a+10,\ b+20,\ c+32,\ d,\ e+30,\ f+23,\ g,\ h+10,\ i+21,\ k+23),$$

dans lequel se trouvent *neuf* maxima transversaux ; enfin de (G) découle le carré recherché

$$(H)\quad (a+11,\ b+21,\ c+33,\ d,\ e+31,\ f+24,\ g,\ h+11,\ i+22,\ k+24),$$

dans lequel on trouve *dix* maxima transversaux, ce qui est le nombre même de séries horizontales et verticales.

(G)

		V	V	V'	V	V	V	V	V	V	V
III	a	24	33	11	15	$\underline{83}$	$\underline{101}$	20	$\underline{44}$	15	$\underline{109}^*$
III	b	45	52	22	24	82	$\underline{101}^*$	29	43	24	108
III	c	$\underline{46}^*$	33	39	$\underline{48}$	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
I	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
III	e	39	51	53	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}^*$	45
III	f	27	39	41	36	28	35	46	$\underline{44}^*$	37	104
II	g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
II	h	37	17	27	$\underline{47}$	$\underline{83}^*$	18	21	34	33	32
III	i	$\underline{46}$	33	39	$\underline{48}^*$	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
III	k	39	51	35	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}$	65
			1	8				45			

(H)

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	κ
S_3	a	25	34	12	16	$\underline{84}$	$\underline{102}$	21	$\underline{45}$	16	$\underline{110}^*$
S_2	b	46	$\underline{53}^*$	23	25	83	$\underline{102}^*$	30	44	25	109
S_5	c	$\underline{47}^*$	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$
S_1	d	11	$\underline{53}^*$	$\underline{61}^*$	4	3	1	12	1	4	91
S_6	e	40	52	54	$\underline{49}$	58	34	37	40	$\underline{43}^*$	46
S_4	f	28	40	42	37	29	36	47	$\underline{45}^*$	38	105
S_1	g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}^*$	3	7	13
S_4	h	38	18	28	$\underline{48}$	$\underline{84}^*$	19	22	35	34	33
S_4	i	$\underline{47}$	37	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$
S_5	k	40	52	36	$\underline{49}^*$	58	34	37	40	$\underline{43}$	66

La représentation symbolique du carré (H)[5] apprend que

$$11, 21, 33, 0, 31, 24, 0, 11, 22, 24$$

sont les nombres minimaux devant être ajoutés aux séries du carré (A) proposé, pour que naisse un autre carré dans lequel les termes maximaux des diverses séries appartiennent tous à des séries horizontales différentes et qu'aucun carré semblable ne puisse être déduit de (A) en ajoutant à l'une des séries horizontales un nombre plus petit que celui assigné.

Si le nombre de quantités dont sont formés les carrés est très grand, il ne sera pas difficile d'imaginer des artifices par lesquels on évitera la peine d'écrire ces nombres, puisque parmi leur grande masse, peu seulement sont nécessaires pour former un nouveau carré.

§. 2.

On expose la règle pour trouver les nombres $l_1, l_2, \ldots, l_m$ minimaux, étant donné un système quelconque de ces nombres ou étant donné seulement les termes du tableau carré, qui fournissent les maxima transversaux après addition de $l_1, l_2, \ldots, l_m$

Soient de nouveaux l_i des quantités positives ou nulles et, ayant posé

$$a_{i,\kappa} + l_i = p_{i,\kappa},$$

soit le carré

$$\begin{matrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,m} \\ \cdot & & \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m} \end{matrix}$$

[5] l'explication des signes S_1, S_2 etc. employés dans la table du carré (H) sera fournie dans le paragraphe suivant.

ainsi formé que les termes maximaux des différentes séries verticales appartiennent aussi à des séries horizontales différentes de sorte que l'on puisse y trouver un ou plusieurs systèmes complets[6] de maxima transversaux. En distinguant l'un quelconque de ceux-ci par des astérisques et en soulignant les maxima restant qui leurs sont égaux dans chaque verticale, on aura ce critère certain par lequel on peut savoir si un carré de la sorte est dérivé de (A), qui est formé par les quantités $a_{i,\kappa}$, en ajoutant des quantités positives ou nulles l_i minimales aux séries horizontales. On prend en effet les séries horizontales pour lesquelles $l_i = 0$, ou encore qui sont les mêmes que dans le carré (A) proposé. Ces séries, dont il doit exister au moins une, je les désignerai par S_1. On prend les termes soulignés dans les séries de S_1 et les termes étoilés dans les verticales de ceux-ci ; je désigne par S_2 les séries horizontales de ces termes étoilés qui n'appartiennent pas déjà à S_1 lui-même. De nouveau, dans les séries verticales auxquelles appartiennent les termes soulignés des séries de S_2, on prend les termes étoilés dont je note par S_3 les séries horizontales différentes de S_1 et S_2. *Si, en poursuivant de cette manière, on épuise toutes les séries horizontales, le carré formé des quantités* $p_{i,\kappa}$ *se déduit du carré proposé, formé des quantités* $a_{i,\kappa}$*, par l'addition de quantités positives ou nulles* l_i *minimales à ses séries horizontales.* Ainsi, dans notre exemple, *toutes* les séries horizontales se rapportent aux systèmes S_1, S_2 etc. trouvés successivement de la manière suivante

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
d	b	a	f	c	e
g			h	k	
			i		

D'où l'on peut conclure avec certitude que, dans notre exemple, on utilise, pour construire cette solution au problème proposé, des quantités devant être ajoutée aux séries horizontales, minimales.

Grâce aux mêmes principes par lesquels on a obtenu un critère pour que le problème soit résolu de la manière la plus simple, c'est-à-dire par des quantités l_i minimales, on obtient aussi une méthode par laquelle la solution la plus simple peut être déduite d'une solution quelconque. Posant

$$a_{i,\kappa} + h_i = q_{i,\kappa},$$

où les quantités h_i sont positives ou nulles, et formant un carré des quantités $q_{i,\kappa}$ de la même manière que le carré (A) est formé des quantités $a_{i,\kappa}$, nous supposons que l'on peut prendre des maxima dans ses différentes séries verticales qui soient aussi tous placés dans les séries horizontales différentes. Je note avec des astérisques un système complet quelconque de maxima transversaux de cette sorte. En soustrayant de tous les $q_{i,\kappa}$ la plus petite des quantités h_i, que j'appelle h, on produit un carré dont une ou plusieurs séries horizontales sont inchangées, c'est-à-dire les mêmes que dans le carré (A) ; je note de nouveau ces séries par S_1. Soulignant ensuite les termes maximaux dans leur verticale autres que ceux étoilés, on déduit successivement des séries S_1, selon la loi exposée ci-dessus, les systèmes de séries horizontales $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$. Si nous obtenons à partir d'eux toutes les séries horizontales, la solution la plus simple est trouvée, mais s'il reste des séries horizontales dans lesquelles ne se trouve aucun terme étoilé qui soit placé dans la même verticale que l'un des termes

[6] c'est-à-dire composés de m termes.

soulignés des séries $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$, je retranche de toutes ces séries une même quantité h', la plus petite telle que l'un de leurs termes étoilés devienne égal à l'un des termes de la même verticale appartenant à l'une des séries $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ ou que l'une d'elle redevienne égale à la série correspondante du carré (A). Ainsi, le nombre de séries horizontales appartenant aux ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ sera rendu plus grand que dans le carré formé des quantités $q_{i,x} - h$. En continuant, si besoin est, ce procédé, les séries horizontales exclues des ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ resteront de moins en moins nombreuses jusqu'à ce qu'on parvienne à un carré dans lequel les systèmes des séries $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$ contiendront *toutes* les séries horizontales.

Si, en ajoutant des quantités quelconques $h_1, h_2, \ldots, h_m$ aux séries horizontales du carré (A), on obtient un carré possédant m maxima transversaux, la somme des termes qui occupent dans le carré (A) la même place que ces maxima transversaux dans le carré dérivé, possédera une valeur maximale parmi tous les agrégats de m termes transversaux du carré (A). D'où le problème d'inégalités

> « trouver m termes transversaux d'un carré donné (A) formé de m^2 termes possédant une somme *maximale*, »

aura autant de solutions que l'on pourra trouver de systèmes de maxima transversaux dans le carré dérivé. On trouve tous ces systèmes si nous conservons seulement dans le carré dérivé les termes maximaux dans leur verticales, affectons à tous les autres une valeur nulle et formons enfin le déterminant de ces termes. En effet, les différents termes de ce déterminant fournissent les différentes solutions du problème. On peut démontrer réciproquement qu'une solution quelconque du problème d'inégalités précédent fournit un système de maxima transversaux du carré dérivé.

Dans notre exemple, il faut former le déterminant des termes soulignés du carré (H), les autres termes de ce carré étant affectés d'une valeur nulle. Ce déterminant peut être successivement ramené aux déterminant plus simple formés des quantités des carrés .

(I)

	α	β	δ	ζ	ι	κ
a				102		110
b		53		10		
c	47		49			110
e			49		43	
i	47		49			110
k			49		43	

,

(II)

	α	δ	ζ	ι	κ
a			102		110
c	47	49			110
e		49		43	
i	47	49			110
k		49		43	

,

(III)

	α	δ	ι	κ
c	47	49		110
e		49	43	
i	47	49		110
k		49	43	

(2)

Nous désignons en effet les termes des carrés par l'indication des séries horizontales et verticales auxquelles ils appartiennent, que je note les unes par les lettres a, b, c, etc. et les autres par les lettres α, β, γ, etc. Dans le carré (H), les termes (d, γ) et (g, η) sont les seules soulignés dans leurs verticales, les termes $(f, \vartheta), (g, \eta)$ et (h, ε), les seuls soulignés dans leurs séries horizontales. D'où les termes formant le déterminant doivent tous avoir le facteur commun

$$(d, \gamma)(h, \varepsilon)(g, \eta)(f, \vartheta).$$

Ce facteur éliminé, reste le déterminant des quantités du carrés (I), qui naît de l'élimination des séries horizontales d, f, g, h et des verticales $\gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta$. Dans ce carré, le terme (b, β) est le seul terme non nul de sa verticale, de sorte que mettant à part ce facteur commun, il reste à chercher le déterminant des quantités du carré (II). Dans ce carré, le terme (a,ζ) est de nouveau seul dans sa verticale et donc, ce facteur commun mis à part, il reste le déterminant des quantités (III)

$$\begin{aligned} & -(a,\alpha)(e,\delta)(k,\iota)(i,\xi) - (i,\alpha)(k,\delta)(e,\iota)(c,\xi) \\ & +(c,\alpha)(k,\delta)(e,\iota)(i,\xi) + (i,\alpha)(e,\delta)(k,\iota)(c,\xi) \\ = & \; -\{(c,\alpha)(i,\xi) - (i,\alpha)(i,\xi)\}\{(e,\delta)(k,\iota) - (k,\delta)(e,\iota)\}. \end{aligned}$$

Comme celui-ci contient quatre termes, il y aura dans le carré proposé quatre systèmes de maxima transversaux possédant une somme maximale, à savoir

$$\begin{array}{c} (b,\beta) + (d,\gamma) + (h,\varepsilon) + (a,\zeta) + (g,\eta) + (f,\theta) \\ +\ 1)(c,\alpha) + (e,\delta) + (k,\iota) + (i,\kappa) \\ \text{ou } 2)(c,\alpha) + (k,\delta) + (e,\iota) + (i,\kappa) \\ \text{ou } 3)(i,\alpha) + (k,\delta) + (e,\iota) + (c,\kappa) \\ \text{ou } 4)(i,\alpha) + (e,\delta) + (k,\iota) + (c,\kappa) \end{array}$$

Ceux-ci s'expriment numériquement dans notre exemple par

$$\begin{array}{rcl} 32 + 61 + 73 + 91 + 9121 & = & 369 \\ +\ 1)14 + 18 + 19 + 88 & = & 139 \\ \text{ou } 2)14 + 25 + 12 + 88 & = & 139 \\ \text{ou } 3)25 + 25 + 12 + 77 & = & 139 \\ \text{ou } 4)25 + 18 + 19 + 77 & = & 139, \end{array}$$

d'où la somme maximale des termes transversaux est 508.

Réciproquement, si de quelque manière on connaît des termes transversaux du carré proposé (A) possédant une somme maximale, on déduit par l'addition de quantités minimales l_i aux séries horizontales du carré proposé (A) un carré dans lequel tous les maxima des différentes séries verticales se trouvent aussi dans des séries horizontales différentes.

Je note bien entendu avec des astérisques ces termes transversaux donnés possédant une somme minimale et j'ajoute aux séries horizontales des quantités telles que leurs termes étoilés deviennent égaux aux maxima de leurs séries verticales respectives. J'écris chaque série augmentée sous les séries restantes et je la compare aux séries restantes, aux précédentes et aux suivantes. Pour ce faire, je désigne les séries horizontales dénotées par les lettres a, b, etc. par les mêmes lettres une fois l'augmentation effectuée. Le tableau suivant illustrera cette manière de faire sur notre exemple. On suppose donnés les termes transversaux possédant une somme maximale

$$\begin{array}{cccccccccc} (a,\zeta), & (b,\beta), & (c,\alpha), & (d,\gamma), & (e,\delta), & (f,\theta), & (g,\eta), & (h,\varepsilon), & (i,\kappa), & (k,\iota), \\ 91 & 32 & 14 & 61 & 18 & 21 & 91 & 73 & 88 & 19. \end{array}$$

(H)

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	κ
(1)	a	14	23	1	5	73	91^*	10	34	5	99
(2)	b	25	32^*	2	4	62	81	9	23	4	88
(3)	c	14^*	1	7	16	21	7	13	12	3	77
(4)	d	11	53	61^*	4	3	1	12	1	4	91
(5)	e	9	21	23	18^*	27	3	6	9	12	15
(6)	f	4	16	18	13	5	12	23	21^*	14	81
(7)	g	25	43	13	16	83	10	91^*	3	7	13
(8)	h	27	7	17	37	73^*	8	11	24	23	22
(9)	i	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88^*
(10)	k	16	28	30	25	34	10	13	16	19^*	42
(11)	b	46	53^*	23	25	83	102	30	44	25	109
(12)	a	25	34	12	16	84	102^*	21	45	16	110
(13)	c	46^*	33	39	48	53	39	45	44	35	109
(14)	e	39	51	53	48^*	57	33	36	39	42	45
(15)	f	28	40	42	37	29	36	47	45^*	38	105
(16)	h	38	18	28	48	84^*	19	22	35	34	33
(17)	i	47^*	34	40	49	54	40	46	45	36	110^*
(18)	c	47	34	40	49^*	54	40	46	45	36	110
(19)	e	40	52	54	49	58	34	37	40	43	46
(20)	k	40	52	54	49	58	34	37	40	43^*	66

Dans la verticale ζ, le terme étoilé est lui-même maximal, donc au début la série horizontale a ne change pas ; dans la verticale β, le maximum est 53, donc l'horizontale b doit être écrite en dessous augmentée du nombre 21, ce qui forme la ligne (11). Revenus alors au premier terme, nous trouvons dans la série ζ le maximum 102, donc a doit être augmentée de 11, ce qui fournit la ligne (12). Progressant jusqu'au terme (c, α), nous trouvons en α le maximum 46 placé sur la ligne (11), donc c doit être augmentée du nombre 32, ce qui fournit la ligne (13). De la même manière, les séries d et g restent inchangées, j'augmente les séries e, f, h, i des nombres $30, 24, 11, 22$ ce qui fournit les lignes $(14), (15), (16), (17)$. Alors, comme on trouve ligne (17) le terme 47 de la verticale α, plus grand que le terme étoilé de la même verticale 46 placé ligne (13), j'ajoute 1 à la ligne 13, d'où l'on forme la ligne (18). Dans (17) et (18), le terme 49 de la verticale δ et plus grand que le terme étoilé de cette même verticale, placé en (14), j'augmente donc la ligne (14) elle-même d'une unité, ce qui fournit la ligne (19). J'avance enfin jusqu'au terme $(k, \iota) = 19$; et comme le maximum de la verticale ι est 43, placé en (19), je forme la ligne (20) en ajoutant 24 à la série k. Ceci fait, le travail sera terminé. On a en effet trouvé les séries

$$\begin{array}{lcccccccccc} & a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & k, \\ \text{formant les lignes} & (12), & (11), & (18), & (4), & (19), & (15), & (7), & (16), & (17), & (20). \end{array}$$

dont les termes étoilés sont maximaux dans leurs verticales, ce qui était recherché. Nous voyons que ces séries constituent le carré (H) trouvé ci-dessus par une autre méthode.

Au moyen de ce qui précède, on trouve une nouvelle solution du problème proposé plus haut : si on connaît m quantités quelconques qui, ajoutées aux séries horizontales du carré (A), transforment ce carré en un autre dont les termes maximaux dans les différentes verticales appartiennent à des séries horizontales différentes, trouver les valeurs minimales de ces m quantités positives ou nulles. Car, comme selon la proposition faite, on connaît un carré dérivé de (A) possédant m maximaux transversaux, on connaît aussi en (A) m termes transversaux possédant une somme maximale. Ceux-ci connus, selon la règle donnée dans ce qui précède, on dérive facilement de (A), par l'addition de quantités positives minimales, un carré possédant m maxima transversaux. On voit en même temps comment, connaissant un système de termes transversaux du carré (A) possédant une somme maximale, on trouve facilement tous les autres systèmes. Car, connaissant un tel système, nous voyons qu'il est facile de déduire de (A) un carré possédant m maxima transversaux ; dans celui-ci, si nous conservons seuls les maxima de chaque verticale, évaluant les autres termes à 0, chaque terme non nul du déterminant du carré formé par ces quantités fournit chaque système de maxima transversaux et donc chaque système de termes transversaux du carré (A) possédant une somme maximale ; en effet, les termes de chacun des systèmes occupent les mêmes places dans les deux carrés.

§. 3.

La solution du problème concernant un tableau carré de m^2 quantités est appliquée à un système de m équations différentielles. La forme ou les formes normales auxquelles le système proposé peut être ramené par une réduction la plus courte. Autres réductions en forme normale.

Les équations différentielles proposées

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0,$$

doivent être dérivées $l_1, l_2, \ldots, l_m$ fois pour être ramenées à un autre système en formes normale, par une réduction la plus courte. Les nombres $l_1, l_2, \ldots, l_m$ sont les mêmes que ceux dont j'ai décrit le calcul dans ce qui précède. Une fois ceux-ci entièrement déterminés, le système d'équations différentielles auxiliaires requis pour la réduction la plus courte, qui est constitué de ces dérivées sera aussi entièrement déterminé. Et, le plus souvent, il y a différentes formes normales auxquelles peuvent être ramenées les équations différentielles proposées au moyen de ce système d'équations auxiliaires[7]. Soit de nouveaux $a_{i,\kappa}$ l'ordre de la dérivée la plus haute de la variable x_κ qui apparaît dans l'équation $u_i = 0$ et disposons de nouveau les quantités $a_{i,\kappa}$ en un carré (A) dont les termes $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m}$ constituent la $i^{\text{ième}}$ série horizontale et les termes $a_{1,\kappa}, a_{2,\kappa}, \ldots, a_{m,\kappa}$ la $\kappa^{\text{ième}}$ verticale. On prend dans le carré (A) un système quelconque de termes transversaux possédant une somme maximale

$$a_{\alpha_1,1}, a_{\alpha_2,2}, \ldots, a_{\alpha_m,m},$$

les équations différentielles proposées peuvent être ramenées par une réduction la plus courte à ces équations en formes normales

$$x_1{}^{(a_{\alpha_1,1})} = X_1, x_2{}^{(a_{\alpha_2,2})} = X_2, \ldots, x_m{}^{(a_{\alpha_m,m})} = X_m,$$

[7] À chaque système de maxima transversaux, on associe un ordre sur les dérivées tels que les dérivées considérées soient maximales et il lui correspond une forme normale. E.g., pour le syst'me $x_1' - x_2'''$, $x_1'' + x_2^{(4)}$, on a pour $x_1 \gg x_2$ la forme normale $x_1' = x_2'''$, $x_2^{(4)} = 0$ et pour $x_2 \gg x_1$ la forme normale $x_2''' = x_1'$, $x_1'' = 0$. N.d.T.

où les dérivées des différentes variables à gauche sont les plus hautes qui apparaissent dans le système réduit et dont les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ placées à droite sont supposées absolument indépendantes. Et l'on aura autant de tels système différents entre eux d'équations différentielles, auxquelles les équations différentielles proposées peuvent être ramenées par une réduction la plus courte qu'il y aura dans le carré (A) de systèmes de termes transversaux possédant une somme maximale. Ayant formé les équations auxiliaires employées pour une réduction la plus courte, nous supposons que l'on trouve la dérivée la plus haute de la variable x_κ, ou dans les équations proposées $u_i = 0, u_{i_1} = 0$, etc. ou dans les équations auxiliaires dérivées de celles-ci par des différentiations itérées ; dans ces emplacements du carré qui appartiennent à la $\kappa^{\text{ième}}$ série verticale et à la $i^{\text{ième}}$, ${i_1}^{\text{ième}}$, etc. série horizontale, je place l'unité ou une autre quantité non nulle, et je place zéro dans les autres emplacements de la $\kappa^{\text{ième}}$ verticale. Ceci étant fait pour chacune des variables x_κ, je forme le déterminant des termes de ce carré. Un de ses termes non nul, puisqu'il est formé de quantités de la première, deuxième, …, $m^{\text{ième}}$ verticale appartenant à la ${\alpha_1}^{\text{ième}}$, ${\alpha_2}^{\text{ième}}$, …, ${\alpha_m}^{\text{ième}}$ série horizontale, donnera une forme normale dans laquelle les dérivées les plus hautes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont respectivement les mêmes que dans les équations proposées

$$u_{\alpha_1} = 0, u_{\alpha_2} = 0, \ldots, u_{\alpha_m} = 0.$$

Comme à un autre terme du déterminant correspond une autre succession des indices α_1, α_2, …, α_m de chacun des termes non nul du déterminant, provient de cette manière chacune des formes normales auxquelles peuvent se réduire les équations proposées par une réduction la plus courte.

Nous avons vu que la méthode par laquelle, en ajoutant des quantités minimales positives aux séries horizontales, on déduit un carré dans lequel tous les maxima des verticales se trouvent dans les séries horizontales différentes peut être rendue plus facile si l'on connaît de quelque façon un système de m termes transversaux du carré (A) possédant une somme maximale. Par cette méthode plus facile, on trouve combien de fois chacune des équations proposées doit être dérivée dans une réduction la plus courte pour former les équations auxiliaires, à chaque fois que l'on aura de quelque manière une forme normale quelconque à laquelle les équations proposées se ramènent par une telle réduction. Cette forme normale sera connue si les équations différentielles proposées sont ainsi constituées que des dérivées de variables différentes y atteignent l'ordre le plus haut. Alors en effet, ces dérivées des différentes variables, les plus hautes dans les différentes équations proposées, seront aussi les plus hautes dans une forme normale, à laquelle les équations différentielles proposées peuvent être ramenées par une réduction la plus courte. Car les ordres de ces dérivées constituent dans le carré (A) un système de m termes transversaux.

Pour illustrer d'un exemple les recherches de ce paragraphe, supposons données 10 équations différentielles

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_{10} = 0.$$

entre la variable indépendante t et les variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ et les nombres du carré (A) proposé page 490[8] indiquent les ordres les plus hauts jusqu'auxquels montent dans les différentes équations les dérivées de chacune des variables dépendantes, de sorte que

[8] Il s'agit du système page 5. N.d.T.

les dérivées les plus hautes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ apparaissant dans l'équation $u_1 = 0$ sont

$$x_1{}^{(14)}, x_2{}^{(23)}, x_3{}^{(1)}, x_4{}^{(5)}, x_5{}^{(73)}, x_6{}^{(91)}, x_7{}^{(10)}, x_8{}^{(34)}, x_9{}^{(5)}, x_{10}{}^{(99)},$$

Comme le dernier carré (H) est déduit du proposé (A) en ajoutant aux séries horizontales les nombres

$$11, 21, 33, 0, 31, 24, 0, 11, 22, 24$$

une réduction la plus courte sera effectuée au moyen des équations auxiliaires formées en dérivant les équations proposées

$$\begin{array}{cccccccc} u_1 = 0 & u_2 = 0 & u_3 = 0 & u_5 = 0 & u_6 = 0 & u_8 = 0 & u_9 = 0 & u_{10} = 0 \\ 11 & 21 & 33 & 31 & 24 & 11 & 22 & 24 \end{array}$$

fois ; les deux équations $u_4 = 0$ et $u_7 = 0$ n'étant pas appelées à former des équations auxiliaires. Á l'aide de ces équations auxiliaires, les équations proposées peuvent être ramenées par des éliminations seules à *quatre* différentes formes normales. Dans toutes celles-ci, parmi les dérivées les plus hautes des différentes variables qui doivent être exprimées en fonction des dérivées d'ordre inférieure de ces mêmes variables, on trouve, selon ce que j'ai exposé ci-dessus

$$x_2{}^{(32)}, x_3{}^{(61)}, x_5^{(73)}, x_6^{(91)}, x_7^{(91)}, x_8^{(21)};$$

puis dans les formes normales

$$\begin{array}{rllll} \textit{première :} & x_1{}^{(14)}, & x_4{}^{(18)}, & x_9{}^{(19)}, & x_{10}{}^{(88)}; \\ \textit{seconde :} & x_1{}^{(14)}, & x_4{}^{(25)}, & x_9{}^{(12)}, & x_{10}{}^{(88)}; \\ \textit{troisième :} & x_1{}^{(25)}, & x_4{}^{(25)}, & x_9{}^{(12)}, & x_{10}{}^{(77)}; \\ \textit{quatrième :} & x_1{}^{(25)}, & x_4{}^{(18)}, & x_9{}^{(19)}, & x_{10}{}^{(77)}. \end{array}$$

Donc l'intégration complète des 10 équations différentielles proposées comporte 508 constantes arbitraires, ce nombre est la somme des ordres jusqu'auxquels montent les plus hautes dérivées des différentes variables dans les formes normales. On trouve toutes les dérivées les plus hautes[9] dans les équations différentielles proposées mais, elles n'y sont pas les plus hautes, sauf $x_3{}^{(61)}, x_6{}^{(91)}, x_7{}^{91}$.

Nous considérons une réduction quelconque et, dans le nombre total des équations différentielles auxiliaires et proposées, nous en choisissons m qui soient dérivées de chacune des équations proposées par une différentiation la plus haute, parmi lesquelles certaines peuvent être du nombre des équations proposées si certaines de celles-ci ne sont absolument pas appelées à former des équations auxiliaires par différentiation. Dans chacune de ces m équations, nous rassemblons les ordres des dérivées les plus hautes de chaque variable et nous les disposons en carré de la manière habituelle : dans un tel carré les maxima des différentes séries verticales se trouvent nécessairement aussi dans des séries horizontales différentes[10]. Et d'après les règles énoncées ci-dessus, on peut se ramener d'un tel carré à un autre, déduit de (A), en utilisant des nombres positifs l_i minimaux. D'où l'on résume : *d'une réduction quelconque en forme normale des équations différentielles proposées, on peut en déduire une la plus brève.*

[9] Des formes normales. N.d.T.

[10] Il faut entendre que l'on peut en choisir de la sorte. Toute cette construction suppose que le déterminant Jacobien par rapport aux dérivées de têtes est non nul. N.d.T.

§. 4.

Réduction du système proposé à une unique équation différentielle. Une règle pour trouver la réduction est donnée et on l'illustre d'un exemple. Une forme élégante sous laquelle on peut énoncer la règle

Un système d'équations différentielles peut être ramené à une unique équation différentielle en deux variables. Soient ces deux variables : la variable indépendante t et la variable dépendante x_1 ; cette unique équations différentielle doit être complétée par d'autres équations, par lesquelles on exprime les variables dépendantes restantes en fonction de t, de x_1 et des dérivées de x_1, ces dérivées ne montant pas jusqu'à l'ordre de l'équation différentielle ayant lieu entre t et x_1. Comme il est habituel que ce type de forme normale soit considéré avant d'autres par les analystes, j'indiquerai combien de fois successives chacune des équations différentielles proposées $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$ doivent être dérivées pour faire apparaître les équations différentielles nécessaires à cette réduction.

Nous supposons que les équations différentielles proposées $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$ doivent être dérivées $l_1, l_2, \ldots, l_m$ fois pour fournir les équations auxiliaires nécessaires à une réduction la plus courte. J'ai enseigné ci-dessus comment l'on trouve ces nombres $l_1, l_2, \ldots, l_m$. En ajoutant les nombres $l_1, l_2, \ldots, l_m$ aux séries horizontales du carré (A), je forme un autre carré (A'), dans lequel je distingue d'un astérisque un système complet de maxima transversaux et je souligne les maxima restant des différentes verticales. Si toutes les variables sont à éliminer, sauf la variable indépendante t et la variable dépendante x_κ, je cherche le terme étoilé de la $\kappa^{\text{ième}}$ verticale, qui est dans la $i^{\text{ième}}$ série horizontale ; dans la $i^{\text{ième}}$ série horizontale, je cherche les termes soulignés, dans chacune de leurs verticales chacun des termes étoilés, dans les séries horizontales de ceux-ci de nouveaux les termes soulignés, dans leurs verticales de nouveau les termes étoilés, et ainsi de suite. Dans cette circonstance, il n'est pas nécessaire de revenir davantage aux termes étoilés déjà observés. Continuant cette tâche, autant que faire se peut, je dirai que toutes les séries horizontales auxquelles on parvient part ce procédé sont *attachées* à la $i^{\text{ième}}$ d'où nous avons commencé. J'augmente ces séries ainsi que la $i^{\text{ième}}$ d'une même quantité, la plus petite telle que l'un de leurs termes qui ne soit ni étoilés ni souligné devienne égal à un terme étoilé de sa verticale. La série horizontale de ce terme s'ajoutant aux séries attachées à la $i^{\text{ième}}$ série, j'augmente de nouveau la $i^{\text{ième}}$ série et celles lui étant attachées, dont le nombre vient d'être accru, de la plus petite quantité telle que l'un de leurs termes n'étant ni étoilé ni souligné ne devienne égal à un terme étoilé de sa verticale ; ceci fait, le nombre des séries attachées à la $i^{\text{ième}}$ augmente de nouveau ; et ainsi j'augmente de plus en plus le nombre de ces séries, jusqu'à ce qu'on parvienne à un carré (A''), dont toutes les séries horizontales sont attachées à la $i^{\text{ième}}$. Je déduis alors de (A'') un carré (A''') en augmentant les séries horizontales d'une même quantité, telle que le terme de la $i^{\text{ième}}$ série horizontale, appartenant à la $\kappa^{\text{ième}}$ verticale soit rendu égal *à la plus grande somme que puisse revêtir un système de m termes transversaux du carré (A)*[11]. Les nombres dont les séries horizontales du carré (A) doivent être augmentées pour produire le carré (A''') indiquent combien de fois chacune des équations différentielles proposées doit

[11] L'ordre de l'équation doit être l'ordre du système. Ceci suppose que x_κ est un élément primitif. Une condition nécessaire est que toutes les séries soient attachées à la $i^{\text{ième}}$ Mais on ne peut fournir une condition aussi simple que la non nullité d'un déterminant jacobien..N.d.T.

être dérivée afin de découvrir les équations auxiliaires nécessaires pour qu'apparaissent, par de simples éliminations, une équation différentielle entre les seules variables t et x_κ et les autres équations par lesquelles les variables restantes sont exprimées en fonction de t, x_κ et des dérivées de x_κ.

Le carré (A') est le même que j'ai désigné ci-dessus par (H) dans notre exemple. Nous supposons que la $\kappa^{\text{ième}}$ verticale est la série ζ, dont le terme étoilé 102 appartient à la série horizontale a, dans laquelle se trouve les termes soulignés $84, 45, 110$ appartenant aux verticales $\varepsilon, \vartheta, \xi$ dont les termes étoilés appartiennent aux séries h, f, i dans lesquelles on a les termes soulignés 47 et 49, appartenant aux verticales α et δ, les termes étoilés appartiennent aux séries c et k, dans cette dernière, on a le terme souligné 43, appartenant à la verticale i dont le terme étoilé se trouve en e, laquelle série contient l'unique terme souligné 49, dont la verticale a déjà servi. De là, on trouve les séries attachées à a : h, f, i, c, k, e. En augmentant toutes les séries a, h, f, i, c, k, e d'une *unité*, b s'ajoute aux séries attachées à a, car avec cet incrément, le terme 52 des séries a ou k, appartenant à la verticale β devient 53, lequel nombre est égal au terme étoilé de la verticale β qui appartient à l'horizontale b. J'augmente de nouveau les séries a, h, f, i, c, k, e, b du nombre 6, ceci fait, d s'ajoute aux séries attachées à a ; enfin j'augmente du nombre 37 toutes les séries sauf g, afin que g lui-même rejoigne les séries attachées à a. D'où le carré (A'') est constitué à partir des séries de (A') ou (H) :

$$\begin{array}{ccc} a, h, f, i, c, k, e & \text{en ajoutant} & 44, \\ b & \text{en ajoutant} & 43, \\ d & \text{en ajoutant} & 37, \end{array}$$

la série g demeurant inchangée. Comme $102 + 44 = 146, 508 - 146 = 362$, les séries horizontales du carré (A'') devient être augmentée du même nombre 362 pour obtenir (A''). En notant comme ci-dessus, le carré (A') par

$$(A') \quad (a + 11,\ b + 21,\ c + 33,\ d,\ e + 31,\ f + 24,\ g,\ h + 11,\ i + 22,\ k + 24),$$

nous obtenons pour les carrés (A'') et (A''')

$$\begin{array}{rl} (A'') & (a + 55, b + 64, c + 77, d + 37, e + 75, f + 68, g, h + 55, i + 66, k + 68), \\ (A''') & (a + 417, b + 426, c + 439, d + 399, e + 437, f + 430, g + 362, h + 417, i + 428, k + 430). \end{array}$$

Donc, dans notre exemple, pour éliminer toutes les variables sauf t et x_6 des 10 équations différentielles, celles-ci doivent être dérivées respectivement 417, 426, 439, 399, 437, 430, 362, 417, 428, 430 fois pour produire les équations auxiliaires nécessaires.

Par la même méthode, nous obtenons le carré (A'') dans lesquels toutes les séries horizontales sont attachées à l'une des séries $a, b, c, \ldots, k$ en ajoutant aux séries du carrés (A')

$$\begin{array}{l}
a, h, f, i, c, k, e, \quad +44; b \quad +43; d \quad +37; g \quad 0, \\
b, a, h, f, i, c, k, e, \quad +44; d \quad +37; g \quad 0, \\
c, k, f, i, e, \quad +44; b, a, h \quad +43; d \quad +37; g \quad 0, \\
d, b, a, c, e, f, k, h, i, k, \quad +44; g \quad 0, \\
e, k \quad +45; b, a, h, f, f, i, c \quad +44; d \quad +38; g \quad 0, \\
f \quad +44; e, i, c, k \quad +39; b, a, h, \quad +38; d \quad +32; g \quad 0 \\
g \quad +9; h \quad +8; k, e \quad +7; b, a, f, i, c \quad +6; d \quad 0, \\
h \quad +46; k, e \quad +45; b, a, f, i, c \quad +44; d \quad +38; g0, \\
i, c, k, f, e \quad +44; b, a, h \quad +43; d \quad +37; g \quad 0, \\
k, e \quad +45; b, a, h, f, i, c \quad +44; d \quad +38; g \quad 0.
\end{array}$$

Nous voyons que le troisième et le neuvième, le cinquième et le dixième carré sont obtenus à partir de (A') de la même manière. On indique la façon par laquelle ce carré (A'') sont déduit du carré (A) proposé pour les tableaux suivants

$$\begin{array}{c|r|l}
 & S. & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (A'') \\
x_6 & 146 & (a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68), \\
x_2 & 97 & (a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68), \\
x_1 & 91 & (a+54,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68), \\
x_3 & 105 & (a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68), \\
x_9 & 88 & (a+55,\ b+64,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+68), \\
x_8 & 89 & (a+49,\ b+59,\ c+72,\ d+32,\ e+70,\ f+68,\ g,\ h+49,\ i+61,\ k+63), \\
x_7 & 100 & (a+17,\ b+27,\ c+39,\ d,\ e+38,\ f+30,\ g+9,\ h+19,\ i+28,\ k+31), \\
x_5 & 130 & (a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+57,\ i+66,\ k+69), \\
x_{10} & 154 & (a+54,\ b+64,\ c+77,\ d+37,\ e+75,\ f+68,\ g,\ h+54,\ i+66,\ k+68), \\
x_4 & 94 & (a+55,\ b+65,\ c+77,\ d+38,\ e+76,\ f+68,\ g,\ h+55,\ i+66,\ k+69)
\end{array}$$

Dans les séries horizontales, première, deuxième, ..., dixième du carré (A') ou (H), on a les termes étoilés

102, 53, 47, 61, 43, 54, 91, 84, 110, 49,

appartenant aux verticales

sixième seconde première troisième neuvième huitième septième cinquième dixième quatrième

En ajoutant à ces termes

44, 44, 44, 44, 45, 44, 9, 46, 44, 45,

apparaissent les nombres

146, 97, 91, 105, 88, 89, 100, 130, 154, 94,

que j'ai placés dans une colonne marginale, désignés par S, avec les variables qui correspondent aux différentes verticales.

Dans un carré (A''), soit S le terme étoilé de la série horizontale à laquelle les séries restantes sont attachés : on pourra parvenir de S à un quelconque autre terme étoilé par un cheminement continu de la même série horizontale et d'un terme souligné à un terme étoilé de la même verticale. Nous présentons, par exemple, le premier carré obtenu ci-dessus

$$(A'') \quad (a+55, b+64, c+77, d+37, e+75, f+68, g, h+55, i+66, k+68)$$

ou encore

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	κ
a					128	146*		89		154
b		96*								
c	91*			93				89		154
d			98*							
e		96	98	93					87*	
f							91	89*		
g							91*			
h					128*					
i	91			93				89		154*
k		96	98	93*					87	

dans lequel je n'ai mis que les termes étoilés et soulignés ou égaux au termes étoilés de la même verticale (en omettant de souligner). Dans ce carré, toutes les séries horizontales dépendent de a dont le terme étoilé est 146. De celui-ci, on arrive ainsi aux autres termes étoilés :

$$146, 154, 93, 96; 146, 154, 91_\alpha; 146, 154, 93, 98; 146, 154, 93, 87;$$
$$146, 154, 89; 146, 154, 89, 91_\eta; 146, 128; 146, 154; 146, 154, 93.$$

Deux termes étoilés T et U placés l'un à côté de l'autre sont tels qu'un terme dans la série horizontale de T, placé dans la verticale de U soit souligné et égal à U, ce qui est la loi de passage indiquée.

Si l'on supprime du carré proposé (A'') la série verticale du terme S, à partir duquel nous avons commencé et une autre horizontale quelconque, on déterminera facilement dans le carré restant un système de maxima transversaux. Nous désignons par $\overparen{TU}$ le terme égal à U dans la série horizontale de T et placé dans la verticale de U et nous supposons que le terme étoilé de la série horizontale supprimée est $S^{(f)}$; puisque, selon la loi fixée, l'on passe de S à $S^{(f)}$ par les termes étoilés intermédiaires $S', S'', \ldots, S^{(f-1)}$. Ceci posé, les termes étoilés restant du carré proposé seront eux-mêmes des maxima transversaux du carré restant ; mais au lieu de $S', S'', \ldots, S^{(f)}$, il faut prendre les termes

$$\overparen{SS'}, \overparen{S'S''}, \overparen{S''S'''}, \ldots, \overparen{S^{(f-1)}S^{(f)}}$$

qui sont égaux à $S', S'', \ldots, S^{(f)}$. Il résulte de cette proposition que dans les carrés qui restent en supprimant la série verticale du terme S et une autre horizontale quelconque, la somme des maxima transversaux sera identique et à l'évidence égale à celle du carré proposé (A'') diminuée de S.

Nous considérons un carré quelconque (A''_κ) dans lequel le terme étoilé d'une série horizontale à laquelle toutes les autres sont attachées appartient à la $\kappa^{\text{ième}}$ verticale, lequel terme je désignerai par S_κ. Ce carré (A''_κ) est celui-là même, que l'on doit former à chaque fois que l'on se propose d'éliminer toutes les variables sauf t et x_κ. Nous supposons ensuite que le carré (A''_κ) provient de l'addition aux séries horizontales du carré (A) des quantités

$$h_1{}^{(x)}, h_2{}^{(x)}, \ldots, h_m{}^{(x)}.$$

Nous appelons O l'ordre du système d'équations différentielles considéré, c'est-à-dire la somme maximale des termes transversaux dans le carré (A), et soit $O - S_\kappa = P_\kappa$; selon les résultats enseignés ci-dessus, la $i^{\text{ième}}$ des équations différentielles considérées devra être dérivée $P_\kappa + h_i{}^{(\kappa)}$ pour former le système des équations auxiliaires au moyen desquelles l'élimination proposée puisse être effectuée. Il convient d'attribuer au nombre $P_\kappa + h_i{}^{(\kappa)}$ une signification remarquable. On fait dans le carré (A''_κ) la somme des maxima transversaux qui est la somme maximale des termes transversaux

$$O + h_1{}^{(x)} + h_2{}^{(x)} + \cdots + h_m{}^{(x)}.$$

Donc, si nous supprimons[12] la $\kappa^{\text{ième}}$ série verticale et la $i^{\text{ième}}$ série horizontale, la somme maximale des termes transversaux dans le carré restant, sera, selon la proposition trouvée

$$O - S_\kappa + h_1{}^{(x)} + h_2{}^{(x)} + \cdots + h_m{}^{(x)} = P_\kappa + h_1{}^{(x)} + h_2{}^{(x)} + \cdots + h_m{}^{(x)}$$

et pour cette raison, si l'on supprime du carré (A) la $\kappa^{\text{ième}}$ série verticale et la $i^{\text{ième}}$ série horizontale, la somme maximale des termes transversaux dans le carré restant sera $P_\kappa + h_i{}^{(\kappa)}$. Nous avons donc trouvé une solution au problème ici énoncé :

Problème.

Soient entre la variable indépendante t et les m variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les équations différentielles

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0 \ ;$$

si l'on demande de ramener celles-ci à une unique équation différentielle entre t et x_κ, il faut, en dérivant les équations différentielles proposées, former de nouvelles équations différentielles nécessaires pour qu'apparaisse, avec leur aide, une équation différentielle entre t et x_κ par de simples éliminations sans plus aucune dérivation ultérieure ; on cherche combien de fois l'équation $u_i = 0$ doit être dérivée pour former ce système d'équations auxiliaires.

[12] Dans A''_κ. N.d.T.

Solution.

On forme un carré contenant m séries verticales et autant de séries horizontales ; dans la $\alpha^{\text{ième}}$ verticale et la $a^{\text{ième}}$ horizontale, on place l'ordre de la plus haute dérivée de la variable x_α qui intervient dans l'équation $u_a = 0$. Ayant supprimé la $i^{\text{ième}}$ série horizontale et la $\kappa^{\text{ième}}$ série verticale de ce carré, on cherche la somme maximale $\sigma_{i,\kappa}$ que puisse atteindre $m-1$ de ses termes tous placés dans des séries horizontales différentes et dans des verticales différentes : pour former le système d'équations auxiliaires au moyen duquel apparaît l'équation différentielle entre t et x_κ, l'équation $u_i = 0$ doit être dérivée $\sigma_{i,\kappa}$ fois. Le nombre cherché $\sigma_{i,\kappa}$ sera aussi égal à l'ordre des équations différentielles qui apparaissent si nous enlevons des équations considérées $u_i = 0$ et remplaçons x_κ par une constante[13].

Les nombres $\sigma_{i,\kappa} = P_\kappa + {h_i}^{(\kappa)} = O - S_\kappa + {h_i}^{(\kappa)}$ sont fournis par le carré (A''_κ), dont j'ai expliqué comment on le déduit du carré (A'). J'ai donné ci-dessus les valeurs des nombres S_κ et ${h_i}^{(\kappa)}$ correspondant à l'exemple proposé ; on résout par ces nombres cent problèmes d'inéquation, à savoir en supprimant en même temps du carré proposé une série verticale et une série horizontales quelconques, trouver dans les cent carrés résultants la somme maximale des termes transversaux. On trouvera facilement dans chacun de ces carrés des termes transversaux possédant la somme maximale si l'on reprend ce que j'ai expliqué ci-dessus à propos de la manière d'aller d'un terme S du carré (A'') à un autre terme étoilé quelconque $S^{(f)}$ par des termes étoilés intermédiaires.

§. 5.

On détermine la condition qui fait que l'ordre du système d'équations différentielles considérées s'abaisse.

Il peut arriver, dans des cas particulier, que l'ordre des systèmes d'équations différentielles n'atteigne pas la valeur de la somme maximale des termes transversaux du carré (A). Cette disposition particulière des équations est indiquée par une condition mathématique précise. Soit de nouveau ${x_\kappa}^{(a_{i,\kappa})}$ la dérivée la plus haute de la variable x_κ que l'on trouve dans l'équation $u_i = 0$; je forme le déterminant des dérivées partielles

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial u_1}{\partial {x_1}^{(a_{1,1})}}, & \frac{\partial u_1}{\partial {x_2}^{(a_{1,2})}}, & \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial {x_2}^{(a_{1,2})}}, \\
\frac{\partial u_2}{\partial {x_1}^{(a_{2,1})}}, & \frac{\partial u_2}{\partial {x_2}^{(a_{2,2})}}, & \dots, & \frac{\partial u_2}{\partial {x_m}^{(a_{2,m})}}, \\
\dots\dots & & & \\
\frac{\partial u_m}{\partial {x_1}^{(a_{m,1})}}, & \frac{\partial u_m}{\partial {x_2}^{(a_{m,2})}}, & \dots, & \frac{\partial u_m}{\partial {x_2}^{(a_{m,m})}}
\end{array}$$

et je ne garde que les termes

$$\frac{\partial u_1}{\partial {x_{i'}}^{(a_{1,i'})}} \frac{\partial u_2}{\partial {x_{i''}}^{(a_{2,i''})}} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial {x_{i^{(m)}}}^{(a_{m,i^{(m)}})}}$$

dans lesquels la somme des ordres

$$a_{1,i'} + a_{2,i''} + \cdots + a_{m,i^{(m)}}$$

[13] Ceci n'est bien sûr vrai que « génériquement ». N.d.T.

atteint la valeur *maximale* O ; je supprime tous les autres termes du déterminant. Je désigne par ∇ la somme des termes restants, qui est en quelque sorte un déterminant tronqué[14] ;

$$\nabla = 0$$

sera la condition par laquelle on établit que le système d'équations différentielles considéré revêt une forme particulière qui fait que son ordre s'abaisse.

Si ∇ ne s'annule pas, l'ordre du système atteindra toujours la valeur O assignée par la théorie générale que j'ai exposée. J'appelle la quantité ∇ *le déterminant du système d'équations différentielles considéré.*

Dans notre exemple, il se fait que

$$\begin{aligned} \nabla \ &= \frac{\partial u_1}{\partial {x_6}^{(91)}} \cdots \frac{\partial u_2}{\partial {x_2}^{(32)}} \cdot \frac{\partial u_4}{\partial {x_3}^{(61)}} \cdot \frac{\partial u_6}{\partial {x_8}^{(21)}} \cdot \frac{\partial u_7}{\partial {x_7}^{(91)}} \cdot \frac{\partial u_8}{\partial {x_5}^{(73)}} \\ &\times \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial {x_1}^{(14)}} \cdot \frac{\partial u_9}{\partial {x_{10}}^{(88)}} - \frac{\partial u_9}{\partial {x_1}^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial {x_{10}}^{(77)}} \right\} \left\{ \frac{\partial u_5}{\partial {x_4}^{(18)}} \cdot \frac{\partial u_{10}}{\partial {x_9}^{(19)}} - \frac{\partial u_{10}}{\partial {x_4}^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_5}{\partial {x_9}^{(12)}} \right\}. \end{aligned}$$

Les quatres termes de cette formule, qui proviennent du développement des accolades correspondent aux quatres systèmes de termes transversaux du carré (A) possédant une somme *maximale* que j'ai recherché ci-dessus. Donc, à chaque fois que dans notre exemple aucune des égalités

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_3}{\partial {x_1}^{(14)}} \cdot \frac{\partial u_9}{\partial {x_{10}}^{(88)}} - \frac{\partial u_9}{\partial {x_1}^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial {x_{10}}^{(77)}} = 0, \\ \frac{\partial u_5}{\partial {x_4}^{(18)}} \cdot \frac{\partial u_{10}}{\partial {x_9}^{(19)}} - \frac{\partial u_{10}}{\partial {x_4}^{(25)}} \cdot \frac{\partial u_5}{\partial {x_9}^{(12)}} = 0, \end{gathered}$$

n'a lieu, le système d'équations est d'ordre 508, c'est-à-dire que leur intégration complète fait intervenir 508 constantes arbitraires. Mais si l'une des deux équations précédentes a lieu, l'ordre du système est toujours inférieur à la valeur 518. Dans ce cas, les équations différentielles considérées ont besoin d'une préparation qui doit être faite avant de les traiter. La non nullité du déterminant des équations différentielles considérées est une condition sans laquelle on ne peut pas déterminer l'ordre du système. Toutes les fois que le problème de déterminer la somme maximale des termes transversaux du carré (A) a une solution *unique*, l'ordre du système d'équations différentielles considérées est égal à cette somme maximale et il ne peut se faire qu'il devienne plus petit.[15] En effet, le déterminant du système ne contient alors qu'un terme et ne peut s'annuler.

---

[14] *Determinans mutilatum.* On trouve dans l'article « De investigando... », la même notion exprimée par un autre mot : *determinans mancum* (p. 197). N.d.T.

[15] Jacobi exclut donc clairement le cas des composantes singulières « isolées », pour ne prendre en compte que ce que les algébristes appelleraient la « composante principale ». E.g. l'équation ${x'}^2 - 4x$ possède une solution particulière $x = 0$, d'ordre inférieur, qui n'est pas un cas limite de la solution générale $x = (t+\mathrm{Cste})^2$ et qui annule le déterminant tronqué, qui n'est autre ici que lle séparant.