

# Retranscription intégrale du document II/13c du fonds Jacobi.

F. Ollivier (CNRS)  
LIX FRE CNRS 2341

École polytechnique, F-91128 Palaiseau CEDEX  
Mél francois.ollivier@lix.polytechnique.fr.

4 février 2007

## 1 Description du document

Il s'agit de la transcription effectuée par Cohn de divers manuscrits incomplets dont il s'est efforcé de faire un tout cohérent et publiable. La lettre de Cohn à Borchart [II/13a] nous éclaire sur le travail de ce dernier. Celui-ci estimait très intéressant le passage sur les différentes formes normales que peut posséder un même système, et que nous reproduisons ici. Il constituait une forme d'introduction à l'article. Borchart ne l'a pas retenu, peut-être en raison d'une certaine absence de rigueur. Ce texte est précédé d'une notice en allemand de la main de Borchart qui en résume le contenu. La transcription de Cohn est mentionnée dans la table des matières établie par Borchart dans le document II/25 du fonds Jacobi.

Les références aux feuillets de II/13b utilisés pour cette transcription sont données dans la marge.

Deux pages sont isolées. Des commentaires en allemand indiquent qu'elles se rapportent aux pages 4 et 7 de la transcription de Cohn.

## 2 Indication figurant sur l'enveloppe

II/13 b

Copie des feuillets

2205, 2206, 2204, 2203, 2202, 2201, 2200, <sup>1</sup> 2186, 2187, 2188,

---

<sup>1</sup>2197 a été barré.

2189, 2196, 2195, 2191, 2192, 2193, 2194.

par  
S. Cohn  
muni par moi d'une table des matières.

### 3 Notice de Borchardt

*De investigando ordine systematis aequationum  
differentialium vulgarium cujuscunque*  
(Copie du traité de Jacobi par Cohn  
Inhaltsregister derselben **illisible** C.schen **illisible** )

- § 1. Système canonique explicite. Deux systèmes canoniques équivalents ont la même (Transformation de systèmes équivalents l'un en l'autre) 1-4.  
somme des ordres (p. 1). Soit  $\frac{d^p x}{dt^p} = A, \frac{d^q y}{dt^q} = B$  etc. et  $\frac{d^m x}{dt^m} = M, \frac{d^n y}{dt^n} = N$  etc. deux systèmes canoniques explicites équivalents, alors on peut ramener les multiplicateur de l'un à ceux de l'autre, donc aussi les deux intégrales
- $$\int \left\{ \frac{\partial A}{\partial(x^{(p-1)})} + \frac{\partial B}{\partial(y^{(q-1)})} + \dots \right\} dt, \int \left\{ \frac{\partial M}{\partial(x^{(m-1)})} + \frac{\partial N}{\partial(x^{(n-1)})} + \dots \right\} dt.$$
- Obtention p. 1a des différents systèmes canoniques équivalents, quand l'un d'eux est donné, pour 2 variables dépendantes  $x, y$  La même chose généralisée pour  $n$  variables dépendantes. En général on peut, quand  $m \leq 1/2n$  diminuer l'ordre pour  $m$  variables, quand en même temps l'ordre augmente pour  $m$  autres. Un cas exceptionnel est mentionné, dans lequel la méthode donnée ici est inapplicable. (p 1a - 3 jusqu'à la moitié) (p 3 au milieu, 3a, 4 au milieu)
- "Tum quaestiones altioris indaginis posuntur"
- § 2. Systèmes non canoniques. Leur Ordr. c.-à-d. nbr. d. const. que leur integrat. comporte, est plus petit que la somme des ordres d. plus hautes dérivées La (p 4) détermination d. l'ordre peut se faire sans reduct. en formle canonique. Ce travail ce ramène dans le cas général à celui d'équ.diff. linéaires. Les variations  $\delta x_1, \delta x_2 \dots \delta x_n$  sont en effet de cette manière suffisantes. On les obtient par les variations des équ. diff. données  $u_1 = 0 \dots u_n = 0$ , soit  $v_1 = 0, \dots, v_n = 0$ . Les  $x$  contiennent  $s$  const. arbitr.  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , donc aussi les intégrales complètes des équ.  $v_1 = 0$  etc.  $\delta x_1 = \xi_1 \dots \delta x_n = \xi_n$  où  $\xi_i = c_1 \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} + \dots + c_s \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_s}$ . Les équ. diff. linéaires  $v$  contiennent aussi un aussi grand nombre  $s$  de constantes arbitraires  $c$  dans leurs intégrales complètes que les équations non linéaires  $u$  de constantes arbitraires  $\alpha$  (p. 4a). Bien que les equdiff. linéaires  $v$  aient des coeff. variables, on peut aussi mettre à leur place des coeff. constants, dès lors qu'il ne s'agit que de la détermination d. l'ord. d. syst. On pose, quand  $\alpha \dots \alpha_m$  désigne des const.,  $\alpha \xi + \alpha_1 \frac{d\xi}{dt} + \dots + \alpha_m \frac{d^m \xi}{dt^m} = (\xi)_m$ , on a alors

$$v_i = (\xi_1)_{a'_i} + (\xi_2)_{a''_i} + \dots + (\xi)_{a_i^{(n)}}$$

On pose  $\xi_\kappa = c_\kappa e^{ht}$ , d'où l'on a

$$0 = c_1[h]a'_i + c_2[h]a''_i + \dots + c_n[h]a_i^{(n)}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $[h]_m$  est une fonct. entière du  $m^e$  degré de  $h$ . Ceci donne

$$0 = \sum \pm [h]_{a'_1} [h]_{a''_2} \cdots [h]_{a^{(n)}_n}$$

Le degré du determ. en  $h$  est également l'ord. du syst. (p. 5) Ce degré est en général le maximum  $\mu$  des sommes

$$a'_{i'} + a''_{i''} + \cdots + a^{(n)}_{i^{(n)}} \quad (\text{p. 5a})$$

<sup>2</sup>où  $a^{(n)}_i$  désigne toujours la plus haute dérivée de  $x_i$  dans  $u_\kappa$ . La seule exception est le cas où le plus haut terme du déterminant s'annule; on pose

$$\frac{\partial u_\kappa}{\partial \frac{d^{a^{(n)}_i} x_i}{dt^{a^{(n)}_i}}} = u_\kappa^i$$

et l'on forme le déterminant

$$\sum \pm u'_1 u''_2 \cdots u_n^{(n)}$$

on doit alors réduire ce determ. à une certaine partie c.-à-d. aux membres

$$\sum \pm u'_{i'} u''_{i''} \cdots u_n^{(n)}$$

pour lesquels  $i' + i'' + \cdots + i^{(n)} = \text{Max} = \mu$ . Notons cette partie

$$\left( \sum \pm u'_1 u''_2 \cdots u_n^{(n)} \right)$$

alors le seul cas exceptionnel est celui où cette expression s'annule. (p. 6)

§ 3. La tâche est alors réduite à trouver, à partir d'un système de  $n^2$  nombres entiers

$$\begin{array}{cccc} h'_1 & h'_2 & \cdots & h'_n \\ h''_1 & h''_2 & \cdots & h''_n \\ \vdots & & & \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \cdots & h_n^{(n)} \end{array}$$

la plus grande somme transversale

$$H = h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)},$$

où  $i_1, i_2, \dots, i_n$  représente une permutat. complète de  $1, 2, \dots, n$ . On peut trouver  $n$  nombres  $\ell', \ell'' \dots \ell^{(n)}$  tels que, quand on ajoute  $\ell^{(i)}$  à chaque  $h$  de la  $i^e$  série, que l'on forme le système de  $n^2$  grandeurs

$$p_\kappa^{(i)} = h_\kappa^{(i)} + \ell^{(i)}$$

et que l'on cherche la plus grande dans chaque rangée verticale des  $p$ , ces maxima se trouvent tous dans des horizontales différentes, le système des  $p$ 's s'appelle

---

<sup>2</sup>Début de la page 2

alors canon (p. 7) et même canon simplicissimus, quand les  $\ell$  on les plus petites valeurs possibles. Si l'on connaît les  $\ell$ , on connaît alors aussi le maximum  $H$ , car si

$$\ell' + \ell'' + \dots + \ell^{(n)} = L$$

on a

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \dots + p_n^{(i_n)} = H + L$$

On peut ajouter ou soustraire la même grandeur aux  $\ell$ , et peuvent être pris tels qu'un certain nombre ou au moins un  $= 0$ , les autres étant positifs (p 7)<sup>3</sup>

Les séries (horizontales) étant partagées en deux parties quelconques  $A$  et  $B$  de telle manière qu'aucune série pour laquelle  $\ell = 0$  n'appartienne à  $A$  (p. 7a); on a alors le théorème :

I. *Dans le Canon simplicissimus il y a dans les séries  $B$  au moins un maximum (par rapport à sa verticale) qui est égal à un terme de la même verticale dans une série  $A$ .* (p. 7a) La partition en  $A$  et  $B$  dans cet énoncé est arbitraire. Si l'on place dans  $B$  une seule série, on obtient le théorème

II. *Dans le canon simplicissimus le maximum de chaque série pour laquelle  $\ell$  est non nul est égal à un terme de la même verticale.* (p. 7a)

Cela définit alors le processus suivant : dans l'horizontale  $\alpha_1$  du canon simplicissimus, dont le  $\ell$  est différent de 0, on cherche le maximum, celui-ci est égal d'après II à un terme de la même verticale dans l'horizontale  $\alpha_2$ , dont le max. est égal à un terme de l'horizontale  $\alpha_3$  etc. (p 7a). Ce processus devient indéterminé quand un max. est égal à plus d'un terme de la même verticale. Mais on a le théorème :

III. *Parmi les différentes manières possible d'exposer ce processus, il y en a toujours au moins une qui conduise à une série pour laquelle  $\ell = 0$ .* (p. 8)

Chaque canon peut être décrit par le système des  $\ell$ 's qui, additionnés aux horizontales du schéma donné, donnent le canon.

IV. *Soient deux canons ( $F$ ) et ( $G$ ). Les  $\ell$  de ceux-ci sont pour partie égaux, pour partie plus grand dans  $F$ , pour partie plus grand dans  $G$ . Il y a alors toujours un nouveau canon, dans lequel chaque  $\ell$  n'exède pas la plus petite valeur de ses valeurs (dans  $F$  et  $G$ )* (p. 8) d'où il s'ensuit

*qu'il n'y a qu'un canon simplicissimus et qu'un plus petit système de  $\ell$ .* (p. 8a)

V. *Il n'y a aucun canon, dans lequel l'un des  $\ell$  a une plus petite valeur que celle qu'il a dans le canon simplicissimus.* (p 9) avec le corollaire :

VI. *Il n'y a pas de série inchangée (c.à-d. avec  $\ell = 0$ ) dans un canon quelconque qui ne se retrouve pas dans le canon simplicissimus.* (p. 9)

Pour décider si un canon est le simpliciss. on se sert du théorème

VII. *Dans un canon, soient  $A$  les horizontales dont les  $\ell$  sont  $= 0$ ,  $B$  celles dont les maxima sont égaux avec un terme de la même verticale dans  $A$ ,  $C$  celles dont les maxima sont égaux à un terme de la même verticale dans  $B$  etc. Quand on épuise le canon par la continuation de ce processus, il est alors le simplicissimus.* (p. 9a)

Ceci donne également la solution du problème *déduire le canon simpliciss. d'un canon donné quelconque.* Quand en effet le processus s'arrête à un

---

<sup>3</sup>Fin de la page 2.

certain ensemble  $F$  sans que le canon entier ait été épuisé, on doit alors diminuer les  $\ell$  des séries restantes d'un même nombre, jusqu'à ce qu'une série n'entre soit dans  $A$ , soit dans l'un des ensembles suivant (p. 10) Exemple (jusqu'à p. 10a fin) Un processus inverse, c'est-à-dire par additions plutôt que par soustractions successive est à suivre lorsque l'on ne donne pas un canon mais *seulement nur le schema d'origine et les éléments qui dans le canon simpliciss. donnent la somme transversale maximale.* (p. 11)

<sup>4</sup>Quand avec ce schéma un canon est donné, ceci donne une seconde manière d'atteindre le canon simpliciss. (p. 11a) Il ne reste plus qu'à trouver un canon quelconque.

*Problème* En posant  $p_{\kappa}^{(i)} = h_{\kappa}^{(i)} + \ell^{(i)}$  et en notant  $p_{\kappa}^{(i_{\kappa})}$  le maximum dans chaque série verticale  $p'_{\kappa}, p''_{\kappa} \dots p_{\kappa}^{(n)}$ , déterminer les  $\ell$ 's de sorte que les indices  $i_1, i_2 \dots i_n$ , soient tous différents les uns des autres (p. 11a)

*Solution.* Tout d'abord, on augmente chaque horizontale dans laquelle il n'y a pas de maximum du plus petit nombre qui rende un de ses terme égal au maximum de sa verticale. Ceci fait, il y a au moins 2 maxima dans des horizontales différentes. Ce cas défavorable se produit quand tous les maxima se trouvent dans *une* horizontale et tous les termes rendus égaux à ces Maximis<sup>5</sup> dans *une* Verticale. Autrement, il y a plus de 2 maxima transversaux. (p 11a, 12)

Dans le système ainsi préparé, on recherche le plus grand nombre de maxima transversaux. Ceux-ci peuvent se trouver tous dans l'espace  $A$  (après une permutation convenable des lignes). alle in dem Raum  $A$  liegen. Il n'y a alors pas de maximum dans  $D$ , mais ceux-ci se partagent entre les rectangles  $B$  et  $C$ , et ceux placés dans  $B$  sont resp. égaux à ceux de  $A$ . (p. 12)

On choisit parmi les horizontales ( $AC$ ) celles qui, outre un maximum en  $A$  en on un en  $C$ . Le nombre de celles-ci ne peut s'annuler. Depuis les maximis<sup>5</sup> de celles-ci situés en  $A$ , on va verticalement jusqu'à un terme égal, puis jusqu'à un nouveau max. de cette horizontale. Toutes les séries ainsi atteintes constituent la *première classe Klasse*. Les horizontales de ( $BD$ ) ne s'y trouvent pas, car sinon on aurait pu former un plus grand nombre de maxima transversaux. Appartiennent à la *seconde classe* les horizontales de ( $AC$ ) qui sans appartenir à la première classe ne donnent pas non plus accès à ( $BD$ ). Les horizontales restantes appartiennent à la *troisième classe*. La seconde cl. peut manquer, la troisième seulement quand le schéma est un canon. (p. 12, 12a)

Après cette classification, on augmente toute la troisième classe d'un me quantité, la plus petite par laquelle un de ses terme devienne égal au maximum de sa verticale qui appartient à la première ou la seconde classe. S'il appartient à la première classe, cela augmente le nombre des maxima transversaux. S'il appartient à la seconde classe, alors une horizontale part de la seconde vers la troisième classe et le nombre des horizontales de la 2<sup>nd</sup>e classe diminue. Un nombre fini d'opération de cete sorte conduit au but. (p. 13)

Le canon obtenu est simplicissimus (p. 13a) L'affirmation est prouvée à la fin de la p 13. On produit comme argument que, dans la résolution du problème,

---

<sup>4</sup>Début de la page 3.

<sup>5</sup>Le mot latin a été mis au datif.

aucune série de la troisième classe ne reste inchangée, et ceci est montré (p 13a milieu, 14, 14, 14a début) pour les lignes ( $BD$ ), puis (p 14a, 15 début) pour les lignes ( $AC$ ) de la 3<sup>e</sup> classe. Enfin (p. 15) comme aucune ligne de la 3<sup>e</sup> classe ne reste inchangée, on prouve que le canon est simplicissimus.

## 4 Transcription de Cohn

### 4.1 Page 1.

[2205]<sup>6</sup> *De la recherche de l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires quelconque.*

Étant proposées les équations différentielles

$$1) \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \frac{d^q y}{dt^q} = B, \text{ etc.}$$

dans lesquelles ne se trouvent à droite que des dérivées à celles qui sont placées à gauche — ce qui était une forme canonique explicite — on peut produire ce même système sous d'autres formes également canoniques,

$$2) \quad \frac{d^m x}{dt^m} = M, \frac{d^n y}{dt^n} = N, \text{ etc.}$$

dans lesquelles n'entrent pas dans  $M$ ,  $N$ , etc. de dérivées de  $x$  supérieures à la  $(m-1)^e$  de  $y$  à la  $(n-1)^e$  et cet. Et les équations 2) seront ainsi formées que l'on puisse à partir d'elles revenir aux équations proposées 1), d'où les systèmes 1) et 2) sont mutuellement équivalents. Si les dérivées de  $x$  jusqu'à la  $(p-1)^e$ , de  $y$  jusqu'à la  $(q-1)^{um}$  sont prises comme de nouvelles variables, on peut substituer aux équations 1)  $p+q$  etc. équations du premier ordre entre  $p+q+\dots+1$  variables, donc les équations intégrales complètes doivent présenter  $p+q+\dots$  constantes arbitraires. De même si les dérivées de  $x$  jusqu'à la  $(m-1)^e$ , les dérivées de  $y$  jusqu'à la  $(n-1)^e$  sont prises comme de nouvelles variables, on peut représenter les équations 2) comme  $m+n+\dots$  équations différentielles du premier ordre entre  $m+n+\dots+1$  variables, dont les équations intégrales complètes présentent  $m+n+\dots$  constantes arbitraires. Il doit alors se faire que

$$m+n+\dots = p+q+\dots,$$

car les deux systèmes 1) et 2) sont équivalents, et leur intégration complète doit produire le même nombre de constantes arbitraires. J'appelle la somme  $m+n+\dots = p+q+\dots$  *l'ordre du système d'équations différentielles*, donc chaque fois qu'un système d'équations est présenté sous forme canonique, son ordre est égal à la somme des ordres jusqu'où s'élèvent les

---

<sup>6</sup>On indique ainsi les références aux feuillets des manuscrits de Jacobi utilisés (document [II/13b]). Ces indications figurent en marge, de la main de Borchardt. N.d.T.

## 4.2 Page 1a

dérivées de chaque variable, et aussi au nombre de constantes arbitraires que produit ses équations intégrales complètes.

Si de la manière indiquée, par l'utilisation de nouvelles variables, nous présentons les équations différentielles 1) et 2) comme des systèmes d'équations différentielles du premier ordre, la transformation d'un système dans l'autre est obtenu par la transformation de ces variables. De cette façon, connaissant un multiplicateur d'un système, un multiplicateur de l'autre [2205a] apparaît. C'est ce qu'exprime la proposition, *les deux intégrales*

$$\int \left\{ \frac{\partial A}{\partial \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}}} + \frac{\partial B}{\partial \frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}} \dots \right\} dt,$$
$$\int \left\{ \frac{\partial M}{\partial \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}} + \frac{\partial N}{\partial \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}} \dots \right\} dt,$$

*dépendent l'une de l'autre.*

Il arrive généralement que les ordres jusqu'où montent les dérivées de chaque variable dans les équations différentielles canoniques transformées puissent être choisies arbitrairement, tant que leur somme demeure égale à l'ordre du système.<sup>7</sup> Mais, à moins que peut-être certaines des équations différentielles proposées ne découlent des autres par dérivation et élimination de sorte que l'on n'a pas me même nombre d'équations différentielles et de variables dépendantes, dans tous les cas on peut éliminer les variables et toutes leurs dérivées à l'exception de deux, dont l'une doit être la variable indépendante  $t$ . Dans ce cas, si ces deux variables sont  $t$  et  $x$ , les autres équations du système canonique transformé doivent fournir les valeurs des autres variables  $y, z$  etc. exprimées par  $t, x$  et les dérivées de  $x$ . En effet, si ces équations contenaient des dérivées des variables  $y$  etc., l'ordre *de ce système* excéderait l'ordre de l'équation différentielle ayant lieu entre  $t$  et  $x$  seuls.

Pour que cette chose soit mieux comprise, je prendrai deux équations entre trois variables, à savoir une dépendante  $t$ , deux indépendantes  $x$  et  $y$ . Soit  $s$  l'ordre du système, et soient les équations

## 4.3 Page 2

ramenées, de la manière dont j'ai parlé, à une forme telle que l'une soit une équation différentielle du  $s^e$  ordre entre  $t$  et  $x$  seuls

$$3) \quad \frac{d^s x}{dt^s} = S,$$

et l'autre exprime la valeur de  $y$  par  $t, x$  et les dérivées de  $x$ ,

$$4) \quad y = Y.$$

---

<sup>7</sup>À l'exception de cas particuliers. B.

Si  $Y$  ne contient *aucune* dérivée de  $x$  ou encore  $Y$  n'est fonction que de  $x$  et  $t$ , il n'y aura pas d'autre forme canonique des équations

$$5) \quad \frac{d^s x}{dt^s} = S, \quad y = Y,$$

[2206] sinon celle en quelque sorte inverse, pour laquelle on a une équation différentielle du  $s^e$  ordre entre  $t$  et  $y$ , et qui exprime  $x$  par  $t$  et  $y$ . Si la plus grande dérivée de  $x$  que contient  $Y$  est la  $i^e$ , le système proposé 5) ne donnera aucun autre système canonique que ceux dans lesquels se présente une dérivée de  $y$  qui égale ou dépasse la  $(s-i)^e$ . On déduit de l'équation  $y = Y$  la suivante,

$$6) \quad \frac{d^i x}{dt^i} = I,$$

la fonction  $I$  ne comprenant, outre  $t$  et  $y$ , que  $x$  et ses dérivées n'exédant pas la  $(i-1)^e$ . Dérivant  $s-i$  fois l'équation précédente, et éliminant grâce à elle  $\frac{d^i x}{dt^i}$  en même temps qu'elle apparaît par dérivation, on produit successivement les valeurs de

$$\frac{d^i x}{dt^i}, \frac{d^{i+1} x}{dt^{i+1}}, \dots, \frac{d^s x}{dt^s},$$

exprimées par les dérivées de  $x$  inférieures à la  $i^e$ , les dérivées de  $y$  jusqu'à la  $(s-i)^e$  et  $t^s$ . Celles-ci substituées dans 3), apparaît une équation dans laquelle les dérivées de  $y$  montent jusqu'à la  $(s-i)^e$ , celles de  $x$  jusqu'à la  $\kappa^e$ , où

$$\kappa \leq i-1.$$

Celle-ci constitue avec 6) un *autre* système canonique<sup>9</sup> que l'on peut présenter ainsi,

$$7) \quad \frac{d^i x}{dt^i} = I, \quad \frac{d^\kappa x}{dt^\kappa} = K,$$

la fonction  $K$  contenant la dérivée  $(s-i)^e$  de  $y$  et des dérivées de  $x$  ne dépassant pas la  $(\kappa-1)^e$ . D'une manière similaire, dérivant  $(i-\kappa)$  fois la seconde équation et éliminant de la première équation les dérivées de  $x$  exédant la  $(\kappa-1)^e$ , apparaît

#### 4.4 Page 2a

un *troisième* système canonique, que l'on peut représenter ainsi,

$$8) \quad \frac{d^\kappa x}{dt^\kappa} = K, \quad \frac{d^\lambda x}{dt^\lambda} = \Lambda,$$

---

<sup>8</sup>Jacobi substitue  $I$  à  $\frac{d^i x}{dt^i}$  dans  $\frac{d^{i+1} x}{dt^{i+1}} = I'$ , il obtient une expression  $\frac{d^{i+1} x}{dt^{i+1}} = I_1$ , il substitue ensuite  $I$  à  $\frac{d^i x}{dt^i}$  dans  $\frac{d^{i+2} x}{dt^{i+2}} = I'_1$ , etc.

<sup>9</sup>Jacobi considère ce système comme canonique, car  $\partial I / \partial y \neq 0$ , ce qui implique que  $\partial K / \partial y^{(s-i)} \neq 0$ . La matrice jacobienne du système  $x^{(i)} - I, x^{(\kappa)} - K$  par rapport aux deux dérivées de tête  $x^{(i)}$  et  $y^{(s-i)}$  est donc non nulle, ce qui est pour lui la définition d'un système canonique. Une forme telle que 5 ou 11 est dans son vocabulaire une forme canonique *explicite*.



où  $\lambda \leq \kappa - 1$ , la fonction  $\Lambda$  contenant la dérivée  $s - \kappa^e$  de  $y$  et les dérivées de  $x$  n'exédant pas la  $(\lambda - 1)^e$ . Continuant ainsi, on parvient à la fin à un système canonique de la forme

$$9) \quad \frac{d^\nu x}{dt^\nu} = N, \quad x = X$$

$N$  contenant des dérivées de  $x$  inférieures à la  $\nu^e$ , la dérivée  $(s - \mu)^e$  de  $y$ , où  $\mu > \nu$  et  $X$  désignant une fonction vide de  $x$  et de ses dérivées et affectée de dérivées de  $y$  inférieures à la  $(s - \nu)^e$ . Dérivant enfin  $\nu$  fois l'équation  $x = X$ , on obtient un ultime système canonique, que l'on peut exprimer par les deux équations

$$10) \quad x = X, \quad \frac{d^s y}{dt^s} = \Upsilon,$$

dont l'une est une équation différentielle du  $s^e$  ordre entre  $t$  et  $y$  seuls.

[2206a] De cette manière on produit tous les systèmes présentés en forme canonique auxquels le système d'équations différentielles 5) peut être ramené. Il est de même évident que l'on peut revenir d'un système quelconque au précédent. De fait, l'équation dont proviennent les équations auxiliaires par dérivations successives, en effectuant les éliminations requises, est commun à deux systèmes se suivant immédiatement; on peut donc déduire du système transformé les mêmes équations auxiliaires, à l'aide desquelles la compatibilité avec l'autre système est évidente. Si dans les systèmes précédents

$$i = s - 1, \quad \kappa = s - 2, \quad \lambda = s - 3, \quad \dots \quad \nu = 1;$$

comme cela aura lieu en général, on aura  $s + 1$  systèmes canoniques,

$$11) \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B,$$

dans lesquels  $p$  et  $q$  peuvent désigner des nombres quelconques dont la somme =  $s$ , les fonction  $A$  et  $B$  ne contenant que des dérivées inférieures à celles placées à gauche<sup>10</sup>.

D'une manière générale, si l'on a une forme canonique 11) quelconque, on parvient ainsi à une autre. Soit  $\frac{d^m x}{dt^m}$  la plus haute dérivée de  $x$  que contienne la fonction  $B$ , où  $m \leq p - 1$ . Dérivant la seconde équation  $p - m$

## 4.5 Page 3

fois et éliminant au moyen de cette dernière les dérivées de  $x$  dépassant la  $(m - 1)^e$ , on obtiendra des équations

$$\frac{d^q y}{dt^q} = B, \quad \frac{d^{p+q-m} y}{dt^{p+q-m}} = B_1.$$

De la première de celles-ci, on peut déduire la valeur de  $\frac{d^m x}{dt^m}$  valor  $A_1$ , ceci fait, si

$$n = p + q - m,$$

---

<sup>10</sup>Il est aisé pour toute famille  $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$  telle que  $0 \leq p_i \leq s$  de construire un système linéaire dont les seules formes normales explicites ont des ordres égaux à tous les  $p_i$ . N.d.T.

on obtient un autre système canonique présenté en forme explicite,

$$\frac{d^m x}{dt^m} = A, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = B,$$

les fonctions  $A$ , et  $B$ , ne contenant pas de dérivées plus hautes que la  $(m - 1)^e$  de  $x$ , la  $(n - 1)^e$  de  $y$ , la fonction  $A$ , pas même de dérivées de  $y$  supérieures à la  $q^e$ . Et il n'y aura pas de système canonique dans lequel l'ordre de la plus haute dérivée de  $x$  sera compris entre  $m$  et  $p$ , ou ce qui revient au même l'ordre de la plus haute dérivée de  $y$  entre  $q$  et  $n$ .

Nous supposons maintenant avoir entre la variable indépendante  $t$  et  $n$  variables dépendantes,

$$x_1, x_2, \dots x_n,$$

autant d'équations différentielles possédant une forme canonique explicite. La question générale se pose [2204] de déduire du système d'équations différentielles proposées un autre système jouissant d'une forme dans laquelle les ordres les plus hauts des dérivées de certaines variables dépendantes données diminuent, de certaines autres augmentent et ceux des variables restantes demeurent inchangés. Soient respectivement  $\alpha_1, \alpha_2$  etc. les ordres les plus haut jusqu'où montent dans les équations différentielles proposées les dérivées des variables  $x_1, x_2$  etc., de sorte que les équations différentielles proposées soient

$$12) \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} = u_1, \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} = u_2, \dots \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} = u_n,$$

les fonctions  $u_1, u_2$ , etc. faisant intervenir des dérivées inférieures à celles placées à gauche. Si l'on se propose de diminuer les ordres

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m,$$

jusqu'où montent les dérivées des variables  $x_1, x_2 \dots x_m$ , la chose peut être ainsi accomplie. On cherche dans lesquelles des fonctions  $u_{m+1}, u_{m+2}$  etc. se trouvent les plus hautes des dérivées des variables  $x_1, x_2, \dots x_m$ , dont les ordres sont respectivement

#### 4.6 Page 3a

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m,$$

soient

$$u_{m+1}, u_{m+2} \dots u_{2m}.$$

des fonctions dans lesquelles elles interviennent. Si ensuite des équations

$$13) \frac{d^{\alpha_{m+1}} x_{m+1}}{dt^{\alpha_{m+1}}} = u_{m+1}, \frac{d^{\alpha_{m+2}} x_{m+2}}{dt^{\alpha_{m+2}}} = u_{m+2}, \dots \frac{d^{\alpha_{2m}} x_{2m}}{dt^{\alpha_{2m}}} = u_{2m},$$

on déduit les valeurs,

$$14) \frac{d^{\beta_1} x_1}{dt^{\beta_1}} = v_1, \frac{d^{\beta_2} x_2}{dt^{\beta_2}} = v_2, \dots \frac{d^{\beta_m} x_m}{dt^{\beta_m}} = v_m;$$

les dérivées des variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  dans les fonctions

$$v_1, v_2, \dots, v_m, u_{2m+1}, u_{2m+2}, \dots, u_n$$

seront respectivement inférieures aux  $\beta_1^e, \beta_2^e \dots \beta_m^e$ , et  $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$  sont inférieurs aux nombres  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ . On dérive les équations 14) respectivement

$$\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_m - \beta_m$$

fois successives et, systématiquement, en même temps qu'apparaissent les dérivées  $\alpha_{2m+1}^e, \alpha_{2m+2}^e, \alpha_n^e$  des variables

$$x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots, x_n$$

on leur substitue les valeurs provenant des  $n - 2m$  dernières [2204.a] équations proposées 12). Ceci fait, si l'on considère les  $m$  premières des équations proposées ci-dessus, on [y] élimine les dérivées

$$\begin{aligned} &\text{de } x_1 \text{ de la } \beta_1^e \text{ à la } \alpha_1^e \\ &\text{de } x_2 \text{ de la } \beta_2^e \text{ à la } \alpha_2^e \\ &\dots\dots\dots \\ &\text{de } x_m \text{ de la } \beta_m^e \text{ à la } \alpha_m^e ; \end{aligned}$$

elle fournissent  $m$  équations dans lesquelles on ne trouve que des dérivées des  $x_1, x_2 \dots x_m$  respectivement inférieures aux  $\beta_1^e, \beta_2^e, \dots, \beta_m^e$ ; des  $x_{2m+1}, x_{2m+2}, x_n$  respectivement inférieures aux  $\alpha_{2m+1}^e, \alpha_{2m+2}^e, \dots, \alpha_n^e$ ; les dérivées des  $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{2m}$  ne montent respectivement que jusqu'à l'ordre

$$\gamma_1^e, \gamma_2^e, \dots, \alpha_m^e,$$

avec

$$\gamma_1 = \alpha_{m+1} + \alpha_1 - \beta_1, \gamma_2 = \alpha_{m+2} + \alpha_2 - \beta_2, \dots, \gamma_m = \alpha_{2m} + \alpha_{2m} - \beta_m.$$

Donc, de ces équations apparaissent les valeurs

$$\frac{d^{\gamma_1} x_{m+1}}{dt^{\gamma_1}} = w_1, \frac{d^{\gamma_2} x_{m+2}}{dt^{\gamma_2}} = w_2, \dots, \frac{d^{\gamma_m} x_{2m}}{dt^{\gamma_m}} = w_m.$$

D'où l'on obtient le système canonique transformé :

$$\begin{aligned} \frac{d^{\beta_1} x_1}{dt^{\beta_1}} &= v_1, & \frac{d^{\beta_2} x_2}{dt^{\beta_2}} &= v_2, & \dots & \frac{d^{\beta_m} x_m}{dt^{\beta_m}} &= v_m \\ \frac{d^{\gamma_1} x_{m+1}}{dt^{\gamma_1}} &= w_1, & \frac{d^{\gamma_2} x_{m+2}}{dt^{\gamma_2}} &= w_2, & \dots & \frac{d^{\gamma_m} x_{2m}}{dt^{\gamma_m}} &= w_m \\ \frac{d^{\alpha_{2m+1}} x_{2m+1}}{dt^{\alpha_{2m+1}}} &= u_{2m+1}, & \frac{d^{\alpha_{2m+2}} x_{2m+2}}{dt^{\alpha_{2m+2}}} &= u_{2m+2}, & \dots & \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} &= u_n. \end{aligned}$$

Ceci satisfait ce qui était demandé, puisque les plus grands ordres des dérivées des variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont diminués, ceux des variables  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m}$  sont augmentés, ceux des variables  $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots, x_n$  restent inchangés.

Il peut se faire que les plus grandes dérivées des variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  intervenant dans les fonctions  $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{2m}$ , n'apparaissent pas dans un nombre  $m$  de ces fonctions, mais seulement peut-être dans une ou dans deux, et que donc on ne puisse pas obtenir les valeurs 14) de leurs dérivées. Ces questions exigent une recherche plus profonde et je les exposerai en une autre occasion.