Retranscription partielle du document II/13c du fonds Jacobi.

F. Ollivier (CNRS)
LIX FRE CNRS 2341
École polytechnique, F-91128 Palaiseau CEDEX
Mél francois.ollivier@lix.polytechnique.fr.

4 février 2007

1 Description du document

Il s'agit de la transcription effectuée par Cohn de divers manuscrits incomplets dont il s'est efforcé de faire un tout cohérent et publiable. La lettre de Cohn à Borchardt [II/13a] nous éclaire sur le travail de ce dernier. Celui-ci estimait très intéressant le passage sur les différentes formes normales que peut posséder un même système, et que nous reproduisons ici. Il constituait une forme d'introduction à l'article. Borchardt ne l'a pas retenu, peut-être en raison d'une certaine absence de rigueur. Ce texte est précédé d'une notice en allemand de la main de Borchardt qui en résume le contenu. La transcription de Cohn est mentionée dans la table des matières établie par Borchardt dans le document II/25 du fonds Jacobi.

Les références aux feuillets de II/13b utilisés pour cette transcription sont données dans la marge.

Deux pages sont isolées. Des commentaires en allemand indiquent qu'elles se rapportent aux pages 4 et 7 de la transcription de Cohn.

2 Transcription

3 Indication figurant sur l'enveloppe

II/13 b

Abschrift der Blätter

2205, 2206, 2204, 2203, 2202, 2201, 2200, [1] 2186, 2187, 2188, 2189, 2196, 2195, 2191, 2192, 2193, 2194.

von
S. Cohn
von mir mit einem Inhaltsregister versehen.

4 Notice de Borchardt

De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque
(Abschrift der Jacobischen Abhandlung von Cohn
Inhaltsregister derselben **illisible** C.schen **illisible**)

§ 1. Explicites canonisches System. Zwei gleichbedeutende canonische systeme haben dieselbe summe der Ordnungen (p. 1). Sind $\frac{d^p x}{dt^p} = A$, $\frac{d^q y}{dt^q = B}$ etc. und $\frac{d^m x}{dt^m} = M$, $\frac{d^n y}{dt^n = N}$ etc. zwei gleichbedeutende canonische explicite systeme, so lassen sich die multiplicatoren derselbe auf einander zurückführen, also auch die beiden Integrale $\int \left\{ \frac{\partial A}{\partial\left(x^{(p-1)}\right)} + \frac{\partial B}{\partial\left(y^{(q-1)}\right)} + \cdots \right\} dt$, $\int \left\{ \frac{\partial M}{\partial\left(x^{(m-1)}\right)} + \frac{\partial N}{\partial\left(x^{(n-1)}\right)} + \cdots \right\} dt$. Herleitung der verschiedenen gleichbedeutenden canonischen Systeme, wenn eine gegebenen ist, für 2 abhängige variable x, y Dasselbe allgemein für n abhängige Variable. Im algemeinen kann man, wenn $m \leq 1/2n$ für m Variable die Ordnungen vermindern, wenn man zugleich für m andere die Ordnungen vermehrt. Es wird ein Ausnahmefall erwähnt, in welchem die hier gegebene Methode unanwendbar wird. "Tum quaestiones altoris indaginis posuntur"

(Transformation gleichbedeutender canonischer Systeme in einander) 1 – 4.
p. 1a
(p 1a – 3 zur Mitte)
(p 3 Mitte, 3a, 4 Mitte)

§ 2. Nicht canonisches System. Seine Ordn. d. h. Anz. d. Const. die seine Integrat. involvirt, ist kleiner als die Summe der Ordnungen d. höchst. Differentiale Bestimmung d. Ordnung kann ohne Reduct. auf canonische Form geschehen. Diese Aufgabe für den allgemainen Fall wird auf den linearer Diff.gl. zurückgeführt. Solchen genügen nämlich die Variationen δx_1, $\delta x_2 \ldots \delta x_n$. Man erhält sie durch Variation der gegebenen Diff.gl. $u_1 = 0 \ldots u_n = 0$. Sie seien $v_1 = 0, \ldots, v_n = 0$. Enthalten die xe s willkürl. Const. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so sind die completen Integrale der Gl. $v_1 = 0$ etc. $\delta x_1 = \xi_1 \ldots \delta x_n = \xi_n$ wo $\xi_i = c_1 \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} + \cdots + c_s \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_s}$. Die linearen Diff.gl. v enthalten also eine ebenso grosse Anzahl s willkürlicher Constanten c in ihren completen Integralen als die nicht linearen u willkürl. Constanten α (p. 4a). Obgleich die linearen Diffgl. v variable Coeff. haben, kann man an deren Stelle auch constante Coeff. setzen, sobald es sich nur um die Bestimm. d. Ordn. d. Syst. handelt. Setzt man, wenn $\alpha \ldots \alpha_m$ Const. bezeichnen, $\alpha\xi + \alpha_1 \frac{d\xi}{dt} + \cdots + \alpha_m \frac{d^m \xi}{dt^m} = (\xi)_m$, so wird

(p 4)

$$v_i = (\xi_1)_{a_i'} + (\xi_2)_{a_i''} + \cdots + (\xi)_{a_i^{(n)}}$$

[1] 2197 a été barré.

Setzt man $\xi_\kappa = c_\kappa e^{ht}$, so wird daher

$$0 = c_1[h]a_i' + c_2[h]a_i'' + \cdots + c_n[h]a_i^{(n)}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$, wo $[h]_m$ eine ganze Funkt. m^{ten} Grades von h. Dies giebt

$$0 = \sum \pm [h]_{a_1'} [h]_{a_2''} \cdots [h]_{a_n^{(n)}}$$

Der Grad der Determ. in h ist zugleich die Ordn. des Syst. (p. 5) Dieser Grad ist im Allgemeinen das Maximum μ der Summe

$$a_{i'}' + a_{i''}'' + \cdots + a_{i^{(n)}}^{(n)} \qquad \text{(p. 5a)}$$

[2]wo immer a_i^κ das höchste Differential von x_i in u_κ bezeichnet. Die einzige Ausnahme ist der Fall, wo der höchste Term der Determinante werschwindet; Setzt man

$$\frac{\partial u_k}{\partial \frac{d^{a_\kappa^i} x_i}{dt^{a_\kappa^i}}} = u_\kappa^i$$

und bildet die Determinante

$$\sum \pm u_1' u_2'' \cdots u_n^{(n)}$$

so muss man diese Determ. auf derjenigen Theil d.h. diejenigen Glieder

$$\sum \pm u_{i'}' u_{i''}'' \cdots u_{i^{(n)}}^{(n)}$$

reduzirem, für welche $i' + i'' + \cdots + i^{(n)} = \text{Max} = \mu$. Diese Theil heisse

$$\left(\sum \pm u_1' u_2'' \cdots u_n^{(n)} \right)$$

so ist der einzige Ausnahmefall der wo dieser Ausdruck verschwindet. (p. 6)

§ 3. Die Aufgabe ist darauf reduzirt aus einem System von n^2 ganzen Zahlen

$$\begin{array}{cccc}
h_1' & h_2' & \ldots & h_n' \\
h_1'' & h_2'' & \ldots & h_n'' \\
\vdots & & & \\
h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \ldots & h_n^{(n)}
\end{array}$$

die grösste Transversalsumme

$$H = h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)}$$

zu finden, wo i_1, i_2, … i_n eine vollständige Permutat. von 1, 2, … n bedeuten. Kennt man n Zahlen ℓ', ℓ'' … $\ell^{(n)}$, so beschaffen dass, wenn man zu jedem h der i^{ten} Zeile $\ell^{(i)}$ addirt, das System der n^2 Grössen

$$p_\kappa^{(i)} = h_\kappa^{(i)} + \ell^{(i)}$$

[2]Début de la page 2

bildet, und in jeder Verticalreihe der p's das grösste aufsucht, diese Maxima alle in verschiedenen Horizontalen liegen, so heisse alsdann das System der p's ein Canon (p. 7) und zwar canon simplicissimus, wenn die ℓ's die kleinstmöglichen Werthe haben. Kennt man die ℓ's, so kennt man auch das Maximum H, denn es sei

$$\ell' + \ell'' + \cdots + \ell^{(n)} = L$$

so ist

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \cdots + p_n^{(i_n)} = H + L$$

Die ℓ's können, da allen dieselbe Grösse hinzugefügt oder von ihnen abgezogen werden kann, und sollen so angenommen werden, dass eine Anzahl oder wenigstens eine $= 0$, die anderen positiv (p 7)[3]

Die (Horizontal)zeilen werden irgend in zwei Theile, A und B getheilt, und zwar so, dass keine der Zeilen, für welche $\ell = 0$, zu A gehört (p. 7a); dann hat man d. Satz:

I. *Im Canon simplicissimus ist in den Zeilen B wenigstens* ein *Maximum (in Beziehung auf seine Verticale) welches einem Term derselben Verticale in der Zeilen A gleich ist.* (p. 7a) Hierbei ist die Eintheilung in A und B der obigen Erklärung gemäß willkürlich. Indem man in B nur eine Zeile setzt, erhält man den Satz

II. *Im Canon simplicissimus ist dem Maximum jeder Zeile für welche ℓ von Null verschieden, ein Term derselben Verticale gleich.* (p. 7a)

Es wird nun folgenden processus definirt: In der Horizontalen des canon simplicissimus α_1, deren ℓ von 0 verschieden sei, wird das Maximum aufgesucht, ihm ist nach II in derselben Verticalen gleich ein Term in der Horizontalen α_2, deren Max. einem Term der Horizontalen α_3 gleich sei etc. (p 7a). Dieser Process wird vieldeutig, wenn einem Max. mehr als ein Term derselben Verticale gleich ist. Aber man hat den Satz:

III. *Unter den möglicherweise verschiedene Arten, dieser Process auszustellen, ist immer wenigstens einer, der zu einer Zeile führt, für welche $\ell = 0$. (p. 8)*

Jeden Canon kann man durch das System der ℓ's bezeichnen, welche zu der Horizontalen des gegebenen Schema's hinzugefügt, den canon geben.

IV. *Man habe zwei Canons (F) und (G). Die ℓ's derselben seien zum Theil gleich, zum Theil in F grösser zum Theil in G grösser. Dann giebt es immer einen neuen Canon, in welchem jedes ℓ den kleinsten seiner Werthe (in F und G) nicht übersteigt* (p. 8) woraus weiter folgt
dass es nur einen canon simplicissimus giebt und nur ein kleinstes System der ℓ's. (p. 8a)

V. *Es giebt keinen Canon, in welchem irgend ein ℓ kleineren Werth hat als den, welchen es im canon simplicissimus hat.* (p 9) mit dem Corollar:

VI. *Es giebt keine ungeänderte Zeile (d. h. eine mit einem $\ell = 0$) in irgend einem canon, die sich nicht im canon simplicissimus wiederfindet.* (p. 9)

Zur Entscheidung, ob ein canon der simpliciss. dient das Theorema

VII. *In einem canon seien A die Horizontalen deren ℓ's $= 0$ sind, B diejenigen, deren maxima mit termen derselben Verticalen in A gleich sind, C dieje-*

[3] Fin de la page 2.

nigen, deren maxima mit termen derselben Verticalen in B gleich sind etc. Wenn durch die Fortsetzung dieses Processes der canon erschöpft wird, so ist er simplicissimus. (p. 9a)

Dies giebt zugleich eine Lösung des Problems *aus irgend einem gegebenen canon den canon simpliciss. herzuleiten.* Wenn nämlich der process abbricht etwa beim complex F ohne dass der ganze canon erschöpft ist, so hat man die ℓ's der übrig bleibenden Zeilen sämtlich und dieselbe Zahl zu verkleinern, bis entweder zu A eine Zeile hinzukommt oder zu einem der folgenden complexe (p. 10) Exemplum (bis p. 10a Ende) Ein umgekehrter Weg nämlich durch successive Additionen anstatt Substractionen ist einzuschlagen, wenn nicht ein canon gegeben ist sondern *nur das urschprungliche schema und die Glieder, welche im canon simpliciss. die grösste Transversalsumme geben.* (p. 11)

[4]Dies giebt, wenn bei gegebenem Schema irgend ein canon gegeben ist einen doppelten Weg zum canon simpliciss. zu gelangen (p. 11a) Es bleibt jetzt noch übrig, irgend einen Canon zu finden.

Problem Nachdem $p_\kappa^{(i)} = h_\kappa^{(i)} + \ell^{(i)}$ *gesetzt und unter jeder Verticalreihe* p'_κ, $p''_\kappa \dots p_\kappa^{(n)}$ *das maximum* $p_\kappa^{(i_\kappa)}$ *bestimmt ist, die* ℓ*'s so zu bestimmen, dass die Indices* $i_1, i_2 \dots i_n$*, alle von einander verschieden seien* (p. 11a)

Lösung. Zuerst wird jede Horizontale in der kein Maximum liegt um die kleinste Zahl vermehrt, welche einen ihrer Terme mit dem Maximum seiner Verticale gleich werden lässt. Ist dies geschehen so liegt mindestens 2 Maxima in verschiedenen Horizontalen. Dieser ungünstigste Fall tritt ein, wenn alle Maxima in *einer* Horizontale und alle den Maximis[5] gleich gemachten Terme in *einer* Verticale liegen. Sonst gibt es mehr als 2 Transversal Maxima. (p 11a, 12)

In dem so praeparirten System wird die grösste anzahl von Transversal Maxima aufgesucht. Dieselben mögen (nach passender Vertauschung der Reihen) alle in dem Raum A liegen. Dann liegt kein Maximum in D sondern dieselben vertheilen sich auf die Rechtecke B und C, und die in B gelegenen sind den in A liegenden resp. gleich. (p. 12)

Man wähle aus den Horizontalen (AC) diejenigen, welche ausser dem Maximum in A deren in C haben. Die Anzahl derselben kann nicht verschwinden. Von jedem dieser in A liegenden maximis[5] gehe man vertical zu einem gleichen Term, von diesem horizontal zu einem neuen max. über. Alle so erhaltenen Horizontalen bilden die *Erste Klasse.* Horizontalen aus (BD) kommen in ihr nicht vor, denn sonst hätte man sogleich eine grössere Anzahl von Transversalen Maximis bilden können. Zur *zweiten Klasse* gehören die Horizontalreihen in (AC) welche ohne zur ersten Klasse zu gehören doch einen Übergang nach (BD) ebenfalls nicht zulassen. Zur *dritten Klasse* gehören alle übrigen Horizontalen. Die zweite Kl. kann fehlen, die dritte nur, wenn das Schema ein Canon ist. (p. 12, 12a)

Nach geschehener Classification vermehre man die ganze dritte Klasse um dieselbe und zwar kleinste Quantität, wodurch ein Term in ihr bei Fortgang

[4]Début de la page 3.

[5]Le mot latin a été mis au datif.

in der Verticale gleich dem Maximum darin, welche der Ersten oder zweiten Klasse gehört, wird. Gehört es der ersten Klasse, es vermehrt sich die Anzahl der Transversal Maxima. Gehört es der zweiten Klasse so geht eine Horizontale Horizontale aus der zweiten in die dritte Klasse über, also vermindert sich die Anzahl der Horizontalen 2^{ter} Klasse. Eine endliche Anzahl von Operationen dieser Art führt daher zum Ziel. (p. 13)

Der erhaltene Canon ist simplicissimus (p. 13a) Die Behaupt. wird schon p 13 am Schluss aufgestellt. Zum Beweise wird gezeigt, dass bei der Lösung des Problems keine Horizontale Dritter Klasse ungeändert bleibt und zwar wird dies (p 13a Mitte, 14, 14, 14a Anfang) für die Reihen (BD) nachgewieser, dann (p 14a, 15 Anfang) für die Reihen (AC) 3^{ter} Klasse. Schliesslich wird (p. 15) daraus dass keine Reihe 3^{ter} Klasse ungeändert blieb, bewiesen, dass der Canon ein simplicissimus ist.

5 Transcription de Cohn

5.1 Page 1.

[2205]*De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque.*

Propositis aequationibus differentialibus

$$1)\frac{d^p x}{dt^p} = A, \frac{d^q y}{dt^q} = B, \text{et cet.}$$

in quibus ad dextram differentialia inferiora tantum inveniuntur iis quae ad laevam posita sunt — quae erat forma canonica explicita — idem systema sub aliis formis et ipsis canonicis exhibere licet,

$$2)\frac{d^m x}{dt^m} = M, \frac{d^n y}{dt^n} = N, \text{et cet.}$$

in quibus ipsas M, N, et cet. non altiora invadunt differentialia quam $(m-1)^{\text{tum}}$ ipsius x, $(n-1)^{\text{tum}}$ ipsius y et cet. Eruntque aequationes 2) ita comparatae, ut ex iis redire liceat ad aequationes propositas 1), unde utrumque systema 1) et 2) aequivalet. Si differentialia ipsius x usque ad $(p-1)^{\text{tum}}$, differentialia ipsius y usque ad $(q-1)^{\text{tum}}$ ut novae variabiles assumuntur, aequationibus 1) substitui possunt $p+q$ etc. aequationes primi ordinis inter $p+q+\cdots+1$ variabiles, unde aequationes integrales completas afficere debent $p+q+\cdots$ Constantes Arbitrariae. Similiter si differentialia ipsius x usque ad $(m-1)^{\text{tum}}$, differentialia ipsius y usque ad $(n-1)^{\text{tum}}$ ut novae variabiles assumuntur, aequationibus 2) representare licet ut $m+n+\cdots$ aequationes differentiales primi ordinis inter $m+n+\cdots+1$ variabiles, quarum aequationes integrales completas afficiunt $m+n+\cdots$ Constantes Arbitrarias. Fieri autem debet

$$m+n+\cdots = p+q+\cdots,$$

cum utrumque systema 1) et 2) aequipolleat, ideoque complete integratum eundem Constantium Arbitrarium numerum permittere debeat. Summam $m+n+\cdots = p+q+\cdots$ dico *ordinem systematis aequationum differentialium*, unde quoties systema aequationum differentialium sub forma canonica exhibetur, ejus ordo aequatur summae ordinum ad quos singularium variabilium

5.2 Page 1a

differentialia ascendunt, idemque est numerus Constantium Arbitrarium aequationes integrales completas afficientium.

Si modo indicato per novarum variabilium assumtionem aequationes differentiales 1) et 2) ut systema aequationum differentialium primi ordinis exhibentur, transformatio alterius systematis in alterum transformatione variabilium obtinetur. Qua de re [secundum §] alterius systematis Multiplicatore cognito etiam alterius Multiplicator [2205a] innotescit[LEX]. Id quod suppedidat propositionem, *bina integralia*

$$\int \left\{ \frac{\partial A}{\partial \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}}} + \frac{\partial B}{\partial \frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}} \cdots \right\} dt,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial M}{\partial \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}} + \frac{\partial N}{\partial \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}} \cdots \right\} dt,$$

alterum ab altero pendere.

Plerumque fit ut ordines ad quos singularium variabilium differentialia in aequationibus differentialibus canonicis transformatis ascendant ex arbitrio eligere liceat, dummodo eorum summa ordini systematis maneat. [6]Omnibus autem casibus ex aequationibus differentialibus propositis eliminare licet variabiles cum earum differentialibus omnes praeter binas, pro quarum altera sumere licet variabilem independentem t, nisi forte aequationum differentialium propositarum aliae ex aliis per differentiationes et eliminationes fluunt ideoque non totidem habentur aequationes differentiales atque variabiles dependentes. In genere aequatio differentialis sic proveniens ejusdem erit ordinis, quecumque sint binae illae variabiles qui ordo simul erit ordo systematis aequationum differentialium propositarum. Eo casu si binae illae variabiles sunt t et x, reliquae aequationes systematis canonici transformati suppeditare debent valores reliquarum variabilium y, z et cet. exhibiti per t, x ipsiusque x differentialia. Quippe quae aequationes si variabilium y etc. differentialia involverent, ordo *systematis* ipsum superaret ordinem aequationis differentialis inter solas t et x locum habentis.

Ut haec res melius perspiciatur, ponam duas aequationes inter tres variabiles, scilicet unam independentem t, duas dependentes x et y. Sit s ordo systematis, sintque aequationes ad formam, de

[6]Exceptis casibus particulraribus. B.

5.3 Page 2

qua modo dixi, revocatae, ita ut altera sit aequatio differentialis s^{ti} ordinis inter solas t et x

$$3)\frac{d^s x}{dt^s} = S,$$

altera exhibeatur valor ipsius y per t, x ipsiusque x differentialia,

$$4) y = Y.$$

Si Y *nullum* ipsius x differentiale involvit sive Y solarum x et t functio est, nulla alia extabit forma canonica aequationum

$$5)\frac{d^s x}{dt^s} = S, \quad ym = Y,$$

[2206] nisi quodammodo inversa, qua habetur aequatio differentialis s^{ti} ordinis inter t et y, atque x per t et y exprimitur. Si differentiale ipsius x altissimum quod Y involvit est i^{tum}, dabitur praeter propositum 5) nullum aliud systema canonicum nisi in quo differentiale ipsius y obvenit quod $(s-i)^{\mathrm{tum}}$ aut aequat aut superat. Deducatur ex aequatione $y = Y$ sequens,

$$6)\frac{d^i x}{dt^i} = I,$$

functione I praeter t et y involvente x ejusque differentialia, $(i-1)^{\mathrm{tum}}$ non superantia. Aequatione antecedente $s-i$ vicibus differentiata ipsiusque ope eliminato $\frac{d^i x}{dt^i}$, simulac inter differentiandum obvenit, eruntur valores ipsorum[LEX]

$$\frac{d^i x}{dt^i}, \frac{d^{i+1} x}{dt^{i+1}}, \ldots \frac{d^s x}{dt^s},$$

expressi per ipsius[LEX] x differentialia i^{to} inferiora, ipsius y differentialia usque ad $(s-i)^{\mathrm{tum}}$ ipsumque t. Quibus substitutis in 3), provenit aequatio, in qua ipsius y differentilia ad $(s-i)^{\mathrm{tum}}$ ascendunt ipsius x differentialia tantum ad κ^{tum}, ubi

$$\kappa \leq i - 1.$$

Quae una cum 6) constituit *alterum* systema canonicum quod sic exhibere licet,

$$7)\frac{d^i x}{dt^i} = I, \quad \frac{d^\kappa x}{dt^\kappa} = K,$$

functione K involvente ipsius y differentiale $(s-i)^{\mathrm{tum}}$, ipsius x differentialia non altiora quam $(\kappa-1)^{\mathrm{tum}}$. Simili modo aequatione posteriore $(i-\kappa)$ vicibus differentiata eliminatisque e priore aequatione ipsius x differentialibus $(\kappa-1)^{\mathrm{tum}}$ superentibus, prodit

5.4 Page 2a

tertium systema canonicum, quod sic repraesentari potest,

$$8)\frac{d^\kappa x}{dt^\kappa} = K, \quad \frac{d^\lambda x}{dt^\lambda} = \Lambda,$$

ubi $\lambda \leq \kappa - 1$, functione Λ involvente ipsius y differentiale $s - \kappa^{\text{tum}}$, ipsius x differentialia non altiora quam $(\lambda - 1)^{\text{tum}}$. Sic pergendo tandem debet perveniri at systema canonicum hujusmodi

$$9)\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = N, \quad x = X$$

involvente N ipsius x differentialia ν^{to} inferiora, ipsius y differentiale $(s-\mu)^{\text{tum}}$, ubi $\mu > \nu$, atque designante X functionem ab ipsa x ejusque differentialibus vacuam, ipsius y differentialia $(s-\nu)^{\text{to}}$ inferioribusque affectam. Denique aequationem $x = X$ differentiando ν vicibus obtinetur ultimum systema canonicum, quod exhibere licet duabus aequationibus

$$10)x = X, \frac{d^s y}{dt^s} = \Upsilon,$$

quarum altera est aequatio differentialis s^{ti} ordinis inter solas t et y.

[2206a] Hac ratione eruntur cuncta systemata forma canonica exhibita ad quae systema aequationum differentialium 5) revocari potest. Simul patet e quolibet systemate ad antecedens reverti posse. Quippe aequatio cujus differentiatione iterata proveniunt aequationes auxiliares, efficiendis eliminationibus adhibitae, communis est utrique systemati se proxime insequenti; unde easdem aequationes auxiliares de systemate transformato deducere licet, quarum auxilio consensus utriusque systematis patet. Si in antecedentibus sit

$$i = s - 1, \quad \kappa = s - 2, \quad \lambda = s - 3, \quad \ldots \quad \nu = 1;$$

sicuti in genere locum habebit: datentur $s + 1$ systemata canonica,

$$11)\frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B,$$

in quibus p et q designare possunt quoscunque numeros quorum summa $= s$, functionibus A et B involventibus differentialia tantum inferiora iis quae ad laevam posita sunt.

Generaliter si quacunque datur forma canonica 11) ad aliam sic pervenitur. Sit $\frac{d^m x}{dt^m}$ altissimum ipsius x differentiale quo functio B afficitur, ubi $m \leq p - 1$. Differentiata aequatione posteriore $p - m$

5.5 Page 3

vicibus atque ope prioris aequationis eliminatis differentialibus ipsius x $(m - 1)^{\text{tum}}$ superantibus, obtinetur aequationes

$$\frac{d^q y}{dt^q} = B, \frac{d^{p+q-m} y}{dt^{p+q-m}} = B_\prime.$$

E quarum priore deduci potest ipsius $\frac{d^m x}{dt^m}$ valor $A_{\prime}$, quo facto si

$$n = p + q - m,$$

obtinetur alterum systema canonicum forma explicita exhibitum,

$$\frac{d^m x}{dt^m} = A_{\prime}, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = B_{\prime}$$

functionibus $A_{\prime}$ et $B_{\prime}$ non altiora differentialia involventibus quam $(m-1)^{\text{tum}}$ ipsius x, $(n-1)^{\text{tum}}$ ipsius y, functione $A_{\prime}$ quin etiam non altiora ipsius y quam q^{tum}. Neque extat systema canonicum, in que ordo altissimi differentialis ipsius x inter m et p, sive quod idem est ordo altissimi differentialis ipsius y inter q et n versatur.

Ponamur jam haberi inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes,

$$x_1, x_2, \dots\ x_n,$$

todidem aequationes differentiales forma canonica explicita gaudentes. Offert se quaestio generalis [2204] e systemate aequationum differentialium propositarum alterum deducendi et ipsa forma gaudens in quo altissimi ordines differentialium datarum quarundam variabilium dependentium minuentur, totidem aliarum augentur, reliquarum immutati manent. Sint respective α_1, α_2 etcet. altissimi ordines ad quos in aequationibus differentialibus propositis differentialia variabilium x_1, x_2 etcet. ascendunt, ita ut aequationes differentiales propositae sint,

$$12) \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} = u_1, \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} = u_2, \dots\ \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} = u_n,$$

functionibus u_1, u_2, etc. differentialia involventibus iis quae ad laevam posita sunt inferiora. Si propositur minuere ordines

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_m,$$

ad quos differentialia variabilium x_1, x_2 $\dots$ x_m ascendunt, res sic peragi potest. Circumspiciatur in quibus functionum u_{m+1}, u_{m+2} etcet. inveniantur altissima variabilium x_1, x_2, $\dots$ x_m differentialia, quorum ordines sint respectives

5.6 Page 3a

$$\beta_1, \beta_2, \dots\ \beta_m,$$

sintque functiones in quibus obveniunt

$$u_{m+1}, u_{m+2} \dots\ u_{2m}.$$

Hinc si ex aequationibus

$$13) \frac{d^{\alpha_{m+1}} x_{m+1}}{dt^{\alpha_{m+1}}} = u_{m+1}, \frac{d^{\alpha_{m+2}} x_{m+2}}{dt^{\alpha_{m+2}}} = u_{m+2}, \dots\ \frac{d^{\alpha_{2m}} x_{2m}}{dt^{\alpha_{2m}}} = u_{2m},$$

deducuntur valores,

$$14) \frac{d^{\beta_1} x_1}{dt^{\beta_1}} = v_1, \frac{d^{\beta_2} x_2}{dt^{\beta_2}} = v_2, \dots \ \frac{d^{\beta_m} x_m}{dt^{\beta_m}} = v_m;$$

differentialia variabilium x_1, x_2, ... x_m in functionibus

$$v_1, v_2, \dots \ v_m, u_{2m+1}, u_{2m+2}, \dots \ u_n$$

respective inferiora erunt β_1^{to}, β_2^{to} ... β_m^{to}, ipsi autem β_1, β_2 ... β_m numeris α_1, α_2 ... α_m inferiores sunt. Differentientur aequationes 14) respective

$$\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots \ \alpha_m - \beta_m$$

vicibus successivis atque, ubique simulac proveniunt variabilium

$$x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots \ x_n$$

differentialia $\alpha_{2m+1}^{\text{tum}}$, $\alpha_{2m+2}^{\text{tum}}$, α_n^{tum}, eorum subsituantur valores e $n - 2m$ postremis [2204.a] aequationum propositarum 12) sumti. Quo facto si insuper advocantur m priores aequationum propositarum, eliminentur differentialia

$$\begin{array}{l} \text{ipsius } x_1 \text{ a } \beta_1^{\text{to}} \text{ usque ad } \alpha_1^{\text{tum}} \\ \text{ipsius } x_2 \text{ a } \beta_2^{\text{to}} \text{ usque ad } \alpha_2^{\text{tum}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{ipsius } x_m \text{ a } \beta_m^{\text{to}} \text{ usque ad } \alpha_m^{\text{tum}}; \end{array}$$

prodibunt m aequationes in quibus ipsarum x_1, x_2 ... x_m differentialia inveniuntur tantem inferiora quam respective β_1^{tum}, β_2^{tum}, ... β_m^{tum}; ipsarum x_{2m+1}, x_{2m+2}, x_n tantum inferiora respective quam $\alpha_{2m+1}^{\text{tum}}$, $\alpha_{2m+2}^{\text{tum}}$, ... α_n^{tum}; ipsarum x_{m+1}, x_{m+2}, x_{2m} differentialia respective ad

$$\gamma_1^{\text{tum}}, \gamma_2^{\text{tum}}, \dots \ \alpha_m^{\text{tum}}$$

ordinem ascendunt, siquidem

$$\gamma_1 = \alpha_{m+1} + \alpha_1 - \beta_1, \gamma_2 = \alpha_{m+2} + \alpha_2 - \beta_2, \dots \ \gamma_m = \alpha_{2m} + \alpha_{2m} - \beta_m.$$

Unde ex aequationibus illis proveniunt valores

$$\frac{d^{\gamma_1} x_{m+1}}{dt^{\gamma_1}} = w_1, \frac{d^{\gamma_2} x_{m+2}}{dt^{\gamma_2}} = w_2, \dots \ \frac{d^{\gamma_m} x_{2m}}{dt^{\gamma_m}} = w_m,$$

Unde jam obtinetur systema canonicum transformatum:

$$\begin{array}{ccc} \frac{d^{\beta_1} x_1}{dt^{\beta_1}} = v_1, & \frac{d^{\beta_2} x_2}{dt^{\beta_2}} = v_2, & \dots \ \frac{d^{\beta_m} x_m}{dt^{\beta_m}} = v_m \\ \frac{d^{\gamma_1} x_{m+1}}{dt^{\gamma_1}} = w_1, & \frac{d^{\gamma_2} x_{m+2}}{dt^{\gamma_2}} = w_2, & \dots \ \frac{d^{\gamma_m} x_{2m}}{dt^{\gamma_m}} = w_m \\ \frac{d^{\alpha_{2m+1}} x_{2m+1}}{dt^{\alpha_{2m+1}}} = u_{2m+1}, & \frac{d^{\alpha_{2m+2}} x_{2m+2}}{dt^{\alpha_{2m+2}}} = u_{2m+2}, & \dots \ \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} = u_n. \end{array}$$

Quod proposito satisfacit, cum summi ordines differentialium variabilium x_1, x_2, ... x_m minuti, variabilium x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_{2m} aucti, variabilium x_{2m+1}, x_{2m+2}, ... x_n immutati invenientur.

Fieri potest ut summa variabilium x_1, x_2, ... x_m differentialia, in functionibus u_{m+1}, u_{m+2}, ... u_{2m} obvenientia, non in numero m earum functionum inveniantur, sic forte omnes in earum una tantum vel duabus, neque igitur eorum differentialium valores 14) obtinere liceat. Tam quaestiones altioris indaginis poscuntur, quas alia occasione exponam.