

INF555 TD9

Sur la sphère vide, la triangulation de Delaunay et l'algorithme randomisé MINIBALL

Frank NIELSEN
nielsen@lix.polytechnique.fr

30 Novembre 2011

Faire les rendus graphiques sous Processing/OpenGL.

1 La sphère vide et la triangulation de Delaunay

- Étant donné trois points du plan (non alignés), calculer (et afficher sous Processing) l'unique cercle (sphère de dimension 2) passant exactement par ces trois points. Le centre de cette boule se calcule comme l'intersection de deux des trois médiatrices. Affichez sous Processing le disque en le discretisant par un polygone régulier (un k -gon):
`gl.glBegin(GL.GL_LINE_LOOP); ... gl.glVertex2d(x,y) ... ; .`
- La triangulation de Delaunay d'un ensemble fini \mathcal{S} de points du plan est définie comme l'unique triangulation ayant toutes les sphères associées aux triangles vides d'autres points. En utilisant l'algorithme naïf qui considère tous les triplets de points, calculer et afficher la triangulation de Delaunay pour $n = |\mathcal{S}| = 20$ points. (De nombreux algorithmes optimaux en $O(n \log n)$ existent; ils seront étudiés dans le cours de géométrie algorithmique.)
- Connaissant n : le nombre de points, t : le nombre de triangles, en déduire que $e \leq 3n - 6$: le nombre d'arête (relation d'Euler $n + t = e + 2$).
(* Experimentalement, vérifiez que le nombre moyen de triangles est $t = 9n + 1$ et la valence des sommets est de 6.)
- Calculer l'aire de la triangulation (partition en triangle de l'enveloppe convexe) en utilisant les déterminants définis par les triangles.

(Notez aussi que l'arbre recouvrant de longueur minimale est contenu dans la triangulation de Delaunay.)

2 L'algorithme randomisé MINIBALL 2D

Etant donné un ensemble \mathcal{S} de n points du plan, on cherche à calculer le centre c^* de l'unique boule de plus petit rayon couvrant tous les points de \mathcal{S} . C'est-à-dire: $c^* = \arg \min_c \max_i \|p_i - c\|$.

Pour des points en position générale, deux points diamétralement opposés ou trois points au plus se trouvent sur le bord de la boule.

- Donnez les primitives qui calculent le centre de la boule circonscrite à exactement deux points (procédure `Ball2`), puis à trois points (procédure `Ball3`).
- Planter ensuite l'algorithme MINIBALL de Welzl (voir les notes de cours).