Esercizi sulla Programmazione Lineare

4.1 **Risoluzione grafica e forma standard**. Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

dove $x = (x_1, x_2)^T$, $c = (16, 25)$, $b = (4, 5, 9)^T$, e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Risolvere il problema per via grafica.

(b) Scriverlo in forma standard e identificare B, N e la corrispondente partizione del vettore dei costi per il vertice ottimale del poliedro associato al problema.

4.2 **Geometria della PL**. Si consideri il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned} \max z^* \quad & = 3x_1 + 2x_2 && (*) \\ 2x_1 + x_2 \quad & \leq 4 && (1) \\ -2x_1 + x_2 \quad & \leq 2 && (2) \\ x_1 - x_2 \quad & \leq 1 && (3) \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Si risolva il problema per via grafica, specificando il valore di tutte le variabili e di z^* nel punto di ottimo.

(b) Si determinino le basi associate a tutti i vertici del poliedro delle soluzioni ammissibili.

(c) Si indichi la successione delle basi visitate dall'algoritmo del simplesso (si scelga x_1 come prima variabile entrante nella base).

(d) Si determini il valore dei coefficienti di costo ridotto delle soluzioni di base associate ai vertici ((eq. 1) $\cap$ (eq. 2)) e ((eq. 1) $\cap$ (eq. 3)), dove (eq. i) è l'equazione ottenuta dalla diseguaglianza (i) sostituendo $\leq$ con $=$.

(e) Si verifichi geometricamente che il gradiente della funzione obiettivo può essere espresso come combinazione lineare non negativa dei gradienti dei vincoli attivi solo nel vertice ottimo. Si calcoli il valore di tale combinazione nel vertice ottimo. N.B. I vincoli devono essere tutti in forma di $\leq$ dato che la direzione di ottimizzazione è quella di massimo (es. $x_1 \geq 0$ deve essere scritto come $-x_1 \leq 0$).

(f) Si determini per quali valori del termine noto b_1 associato alla (1) la base ottima non cambia.

(g) Si indichi per quali valori dei coefficienti della funzione obiettivo il vertice ottimo è $((x_1 = 0) \cap$ (eq. 2)), dove $x_1 = 0$ indica l'asse delle ordinate sul piano cartesiano x_1, x_2.

(h) Per quali valori del termine noto b_2 associato alla (2) la regione ammissibile (a) è vuota (b) contiene una sola soluzione?

(i) Per quali valori del coefficiente c_1 la soluzione ottima è multipla?

4.3 **Metodo del simplesso con regola di Bland**. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & x_1 - 2x_2 & \\
& 2x_1 + 3x_3 & = 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = 5 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{aligned}
$$

mediante il metodo del simplesso a due fasi applicando la regola di Bland per la scelta della variabile entrante nella base e uscente dalla base.