3.1 **Complessità degli algoritmi.** Si considerino due algoritmi A, B che risolvono un dato problema. Il primo è $O(n^2)$ e il secondo è $O(2^n)$, dove n è la dimensione dell'istanza. Sia n_0^A la dimensione dell'istanza più grande risolvibile in un'ora dall'algoritmo A su un dato elaboratore, e n_0^B la corrispondente dimensione per l'algoritmo B. Se avessimo a disposizione un elaboratore 100 volte più veloce, di quanto aumenterebbero, rispettivamente, n_0^A e n_0^B?

3.2 **Dimensioni di istanze**. Qual è la dimensione di un'istanza del problema dell'albero di supporto di costo minimo?

3.3 **Problemi $\mathcal{NP}$-completi e $\mathcal{NP}$-difficili**. Dato un grafo orientato $G = (V, A)$ con lunghezze razionali qualsiasi (non necessariamente non negative) assegnate agli archi e una coppia di nodi s e t di V, si mostri che il problema di determinare un cammino *semplice* (che passa al massimo una volta per ogni nodo) di lunghezza massima fra s e t è $\mathcal{NP}$-difficile.

Si mostri cioè che è $\mathcal{NP}$-completo il problema di riconoscimento associato.

> Max-CamminoS-r: Dato un grafo orientato $G = (V, A)$ con lunghezze razionali associate agli archi, due nodi assegnati s e t, e un intero K, esiste un cammino semplice fra s e t di lunghezza almeno pari a K?

[*Suggerimento*: si proponga una riduzione del problema di determinare se un grafo orientato possieda o meno un circuito Hamiltoniano a Max-CamminoS-r.]

3.4 **PLI è $\mathcal{NP}$-difficile**. Verificare che la programmazione lineare intera è un problema $\mathcal{NP}$-difficile:

> PLI: Data una matrice[1] $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ e vettori $b \in \mathbb{Z}^m$ e $c \in \mathbb{Z}^n$, trovare un vettore $x \in \{0, 1\}^n$ che soddisfa $Ax \geq b$ e minimizza $c^\mathsf{T} x$.

[*Suggerimento*: Procedere per riduzione dal problema di soddisfacibilità (SAT).]

3.5 **Complessità e dimensioni della formulazione (opzionale)**. Si proponga una formulazione di PLI per il problema di determinare l'albero di supporto di costo minimo in un grafo $G = (V, E)$. Il numero di vincoli della formulazione è polinomiale o esponenziale in $n = |V|$? Esiste un legame tra la dimensione di una formulazione (numero di variabili + numero di vincoli) e la difficoltà intrinseca del problema associato?

[1] La notazione $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ indica che A è una matrice $m \times n$ a coefficienti interi.