Ottimizzazione del Portafogli

Un portafogli è un vettore $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in cui x_i rappresenta la quantità di denaro investita nell'i-esimo investimento. Un buon investimento è caratterizzato da due obiettivi non compatibili: (1) massimizzazione della crescita finanziaria e (2) minimizzazione del rischio. Un buon portafogli cresce in modo continuativo senza fluttuazioni a breve termine.

L'idea è quella di assegnare il capitale disponibile B agli investimenti che rendono bene a lungo termine e che compensano vicendevolmente le fluttuazioni a breve termine. Il modello di Markowitz, proposto nel 1952, è un modello di ottimizzazione per bilanciare il guadagno atteso e il rischio di un portafogli. Il modello utilizza la varianza statistica del costo delle azioni come misura di rischio, e il suo ritorno monetario medio come misura dei suoi prospetti a lungo terine. L'obiettivo è quello di minimizzare la varianza totale del portafogli, soggetto ai seguenti vincoli basilari: (1) il guadagno atteso del portafogli deve superare una quantità prefissata e (2) non si può investire una quantità di denaro superiore al capitale disponibile.

Nel caso specifico, abbiamo 4 investimenti possibili $\{1, 2, 3, 4\}$ per un orizzonte temporale di un anno, con i seguenti guadagni attesi

$$\mathbf{r} = (0.05, 0.1, 0.15, 0.3)$$

e le seguenti covarianze:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.08 & -0.05 & -0.05 & -0.05 \\ -0.05 & 0.16 & -0.02 & -0.02 \\ -0.05 & -0.02 & 0.35 & 0.06 \\ -0.05 & -0.02 & 0.06 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

Il budget è $B = 10000$ euro e vorremmo arrivare a guadagnare una percentuale $p = 10\%$ di B durante l'anno.

(a) Formulare un modello di Markowitz per risolvere il problema.

(b) Il problema è convesso?

(c) Proporre un metodo di ottimizzazione vincolata per la soluzione del problema, e descriverlo brevemente.

(d) Risolvere il problema tramite MATLAB o GNU Octave. Il metodo è numericamente stabile?

(e) Come si deve modificare il modello se per attivare un ogni investimento è richiesta una quantità minima di denaro $d = 100$ euro? La formulazione così ottenuta è ancora convessa? Il metodo proposto è ancora valido? Giustificare la risposta in caso affermativo, e suggerire un metodo alternativo altrimenti.

Soluzione

(a) Il ritorno atteso del portafogli è $\mathbf{rx}$. Il rischio associato è dato da $f(\mathbf{x}) = \mathrm{Var}(\mathbf{rx}) = \mathbf{x}^\top Q\mathbf{x}$. Si tratta perciò di minimizzare la forma quadratica f soggetta a vincoli. Il vincolo (1) si formula con $\mathbf{rx} \geq pB$, e il vincolo (2) con $\mathbf{1x} \leq B$, dove $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Il modello perciò è:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top Q\mathbf{x} & \\ \mathbf{rx} &\geq pB \\ \mathbf{1x} &\leq B \\ \mathbf{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

(b) Il problema ha una funzione obiettivo quadratica e vincoli lineari. Poiché gli autovalori di Q sono $(0.04034222681, 0.1839338815, 0.2900000000, 0.4257238917)$, la forma quadratica è definita positiva, e quindi strettamente convessa. Il problema è dunque convesso.

(c) Dato che il problema è convesso, le condizioni KKT sono necessarie e sufficienti all'ottimalità. È pertanto possibile tentare di risolverle direttamente. La Lagrangiana per questo problema è:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}^\top Q\mathbf{x} + \mu_1(pB - \mathbf{rx}) + \mu_2(\mathbf{1x} - B) - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x},$$

dove l'ultimo termine $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$ si riferisce alle condizioni di non-negatività di $\mathbf{x}$, espresse come $-\mathbf{x} \leq 0$. Le condizioni KKT sono quindi:

$$\begin{aligned} 2Q\mathbf{x} - \mu_1\mathbf{r}^\top + \mu_2\mathbf{1}^\top &= \boldsymbol{\lambda} \\ \mu_1(pB - \mathbf{rx}) &= 0 \\ \mu_2(\mathbf{1x} - B) &= 0 \\ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} &= 0 \\ \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} &\geq 0. \end{aligned}$$

Dato che MATLAB/Octave dispongono di un metodo (`fsolve`) per risolvere le equazioni nonlineari, ma non le disequazioni, per il momento rilassiamo i vincoli $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0$. Se i valori per i moltiplicatori di Lagrange sono non-negativi nella soluzione del sistema, allora i valori per le variabili risolvono il problema. Si noti che il sistema sopra è nonlineare.

(d) Codifichiamo il sistema nel file MATLAB `portfolio_system.m`:

```
% kkt system for portfolio problem
function y = portfolio_system(x)
  r = [ 0.05 ,  0.1  ,  0.15 ,  0.3  ];
  Q = [ 0.08 , -0.05 , -0.05 , -0.05 ;
       -0.05 ,  0.16 , -0.02 , -0.02 ;
       -0.05 , -0.02 ,  0.35 ,  0.06 ;
       -0.05 , -0.02 ,  0.06 ,  0.35 ];
  B = 10000;
```

```
  p = 0.1;
  v1 = ones(1,length(r));

  n = length(x);
  m = 2;
  n1 = (n - m) / 2;

  y = zeros(n, 1);

  x1 = x(1:n1);
  mu = x(n1+1:n1+m);
  lambda = x(n1+m+1:n);

  y(1 : n1) = 2*Q*x1 - mu(1)*r' + mu(2)*v1' - lambda;
  y(n1 + 1) = mu(1)*(p*B - r*x1);
  y(n1 + 2) = mu(2)*(v1*x1 - B);
  y(n1 + m: n) = lambda' * x1;
%end function
```

Per utilizzare la funzione `fsolve` c'è bisogno di un punto iniziale $\mathbf{x}_0$. Proponiamo una situazione iniziale in cui gli ogni investimento è pari a 2500 euro. In questo modo $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{0}$ (dato che $\mathbf{x}_0 \not> \mathbf{0}$) e $\mu_2 = 0$. Come punto iniziale μ_1 scegliamo arbitrariamente il valore 5000. Per ottenere la soluzione al sistema KKT si esegue il comando seguente.

```
octave:1> fsolve('portfolio_system',[2500;2500;2500;2500;5000;0;0;0;0;0])
ans =
  3663.00027
  2207.78318
   906.34961
  1533.73076
  2425.87376
     0.00000
     0.00000
     0.00000
     0.00000
     0.00000
```

N.B. Il comando `fsolve` di MATLAB non funziona bene quanto quello di Octave, almeno su questo problema. Il comportamento di `fsolve` in MATLAB, purtroppo, risulta talmente instabile da poter essere classificato come "indeterminato". Si consiglia pertanto di scaricare Octave da `http://www.octave.org`. Una versione per Windows può essere scaricata da `http://www.site.uottawa.ca/~adler/octave/octave-2.1.42-p6a.exe`.

Dunque si ottiene $\bar{\mathbf{x}} = (3663, 2207.78, 906.35, 2425.73)$, $\bar{\boldsymbol{\mu}} = (2425.87, 0)$ e $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$. Dato che tutti i moltiplicatori di Lagrange all'ottimo sono non-negativi, $\bar{\mathbf{x}}$ è la soluzione del problema.

Per quanto riguarda la stabilità del metodo, possiamo fare un'analisi del grafico di $||(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})||$ in funzione del valore iniziale delle variabili. Scegliamo, per esempio, la variabile μ_1. Sia $\psi(\mu_1)$ la norma della soluzione del sistema KKT in funzione del punto iniziale μ_1.

Utilizziamo la seguente funzione MATLAB/Octave:

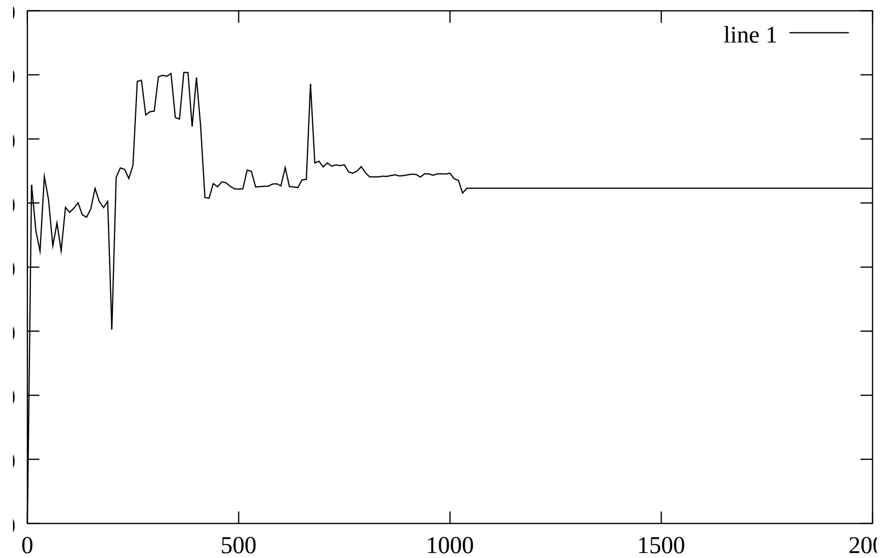
```
% used to study numerical stability of direct KKT solution method
```

```
function y = stability_function(muvals)
  N = length(muvals);
  y = zeros(N,1);
  for i=1:N
    [z, info, msg] = ...
      fsolve('portfolio_system', [2500;2500;2500;2500;muvals(i);0;0;0;0;0]);
    y(i) = norm(z,2);
  end
%end function
```

I comandi MATLAB/Octave sono:

```
octave:1> X = [0:10:2000];
octave:2> Y = stability_function(X);
octave:3> plot(X,Y)
```

Si ottiene il grafico sotto:



Si può vedere che il metodo non è assolutamente stabile per $\mu_1 < 1050$.

(e) Si introducono variabili binarie $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_4)$ dove $y_i = 1$ se l'investimento i viene fatto, e 0 altrimenti. Si aggiungono i vincoli:

$$\begin{array}{rcll} x_i & \leq & By_i & \forall\, i \leq n \\ x_i & \geq & dy_i & \forall\, i \leq n. \end{array}$$

In questo modo, il primo vincolo assicura che se l'investimento non viene effettuato, la quantità di denaro investita è zero. Se l'investimento viene effettuato, invece, il secondo vincolo assicura che la quantità di denaro investita è almeno d. Il problema modificato non è convesso per via della presenza dei vincoli $\mathbf{y} \in \{0,1\}^n$.

Il metodo utilizzato per risolvere il problema in (a) non funziona in questo caso, dato che per applicarlo è necessario rilassare i vincoli $y_i \in \{0,1\}$ per ogni $i \leq n$. Si può utilizzare un metodo di ricerca di punto di sella per la funzione Lagrangiana (ma questi sono solitamente di difficile applicazione). Comunemente viene utilizzato un metodo Branch-and-Bound dove ad ogni nodo viene risolto un problema nonlineare convesso.