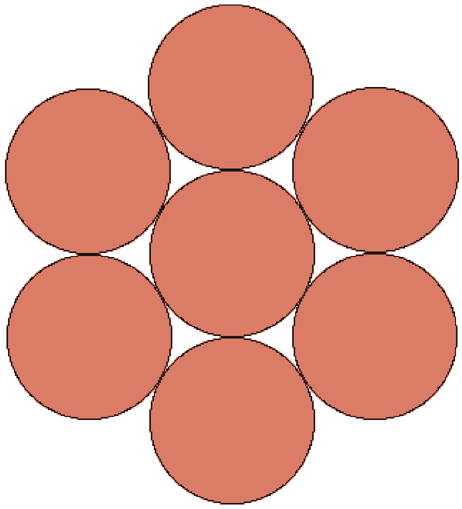
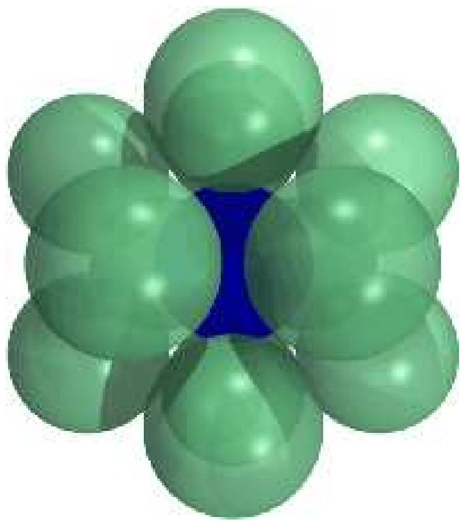
4.1 **Il problema del Kissing Number**. Nel 1694 Newton e Gregory discussero del problema del Kissing Number (KNP) nello spazio tridimensionale, che consiste nel determinare il numero massimo K_D di sfere che possono toccare una sfera centrale nello spazio $\mathbb{R}^D$ (tutte le sfere hanno il medesimo raggio). Il termine "kissing" deriva dal gioco del bigliardo (qual è il massimo numero di palle da bigliardo che possono essere sistemate nello spazio in modo che siano adiacenti a una palla data?): quando due palle da bigliardo si toccano, nel linguaggio tecnico del bigliardo, si dice che sono "kissing balls". Nel caso dello spazio $\mathbb{R}^2$ è facile verificare che $K_2 = 6$, come nella figura seguente.



Nel caso tridimensionale, il problema non è banale. Newton proponeva la soluzione $K_3 = 12$, Gregory $K_3 = 13$. Una dimostrazione del fatto che $K_3 = 12$ apparve soltanto 250 anni dopo, per opera di Leech (soluzione illustrata sotto).



Molto recentemente è stato dimostrato che $K_4 = 24$. Di K_5 si sa soltanto che $40 \leq K_5 \leq 48$.

(a) Si formuli un modello di PNL che risolva il problema di decidere se si possono sistemare N sfere (di intersezione a misura 0) adiacenti a una sfera data in D dimensioni.

(b) Si proponga un metodo algoritmico per risolvere il KNP utilizzando iterativamente il punto (a).

(c) Si formuli un modello di programmazione nonlineare a variabili miste (continue/binarie) per la soluzione del KNP. (*Suggerimento*: si formuli una sistemazione di $\bar{N}$ sfere, dove $\bar{N}$ è un limite superiore dato a K_D, con variabili binarie per controllare l'adiacenza di ogni sfera e la sovrapposizione di ogni coppia di sfere.)

4.2 **Perturbazione del problema**. Si consideri la funzione di perturbazione $\varphi(\mathbf{y}) = \min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall\ i \leq m\ (g_i(\mathbf{x}) \leq y_i)\}$. Si mostri che se f, g_i sono funzioni convesse ($i \leq m$) allora $\varphi(\mathbf{y})$ è una funzione convessa. Se f, g_i sono lineari, allora quale altra condizione soddisfa $\varphi(\mathbf{y})$?

4.3 **Condizioni KKT**. Si consideri il seguente problema nonlineare:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 & \\ x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}. & \end{aligned}$$

(a) Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sono necessarie all'ottimalità di questo problema? E sufficienti?

(b) Si determini la funzione di perturbazione $\varphi(y)$ associata a questo problema.

(c) La Lagrangiana ha un punto di sella $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mu})$ dove $\bar{\mathbf{x}}$ è l'ottimo di questo problema?

(d) Si determini l'iperpiano di supporto del grafico di $\varphi(y)$ a $y = 0$ e si verifichi che $\varphi'(0) = -\bar{\mu}$.

4.4 **Soluzione di un problema PNL**. Si risolva il seguente problema di PNL:

$$\begin{aligned} \max -8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2 & \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 8x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. & \end{aligned}$$

4.5 **Dualità Lagrangiana e Lineare**. Si formuli il duale Lagrangiano del problema di programmazione lineare (PL) seguente in forma canonica:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{cx} & \\ A\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dove A è una matrice $m \times n$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(a) Si confronti il duale Lagrangiano con il duale studiato in programmazione lineare.

(b) Si determinino le condizioni di sella.

(c) Quale risultato fondamentale di programmazione lineare otteniamo?

(d) Si confrontino le condizioni di sella con le condizioni KKT.

(e) Che differenze ci sono considerando un problema di PL in forma standard:

$$\begin{array}{rcl} \min \mathbf{c}\mathbf{x} & & \\ A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

4.6 **Duale Lagrangiano in PNL**. Si formuli il duale Lagrangiano del problema di PNL $\min\{x^2 + 3y^2 \mid 2x + y \leq -8\}$. La Lagrangiana ha un punto di sella? Si determini il sottogradiente della Lagrangiana $L'(\mu)$ per $\mu \geq 0$.

4.7 **PNL con Variabili Binarie**. Si trovi la soluzione ottima del problema:

$$\begin{array}{rcl} \min 3x_1 + x_2 & & \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 \in \{0, 1\}. & & \end{array}$$

Si determini la Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \mu)$. Esiste un punto di sella? Si disegni il grafico di $w(\mu) = \inf_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^2} L(\mathbf{x}, \mu)$ in funzione di μ, e si determinino i sottogradienti per ogni $\mu \geq 0$.