2.1 **Convessità del quoziente**. Si consideri un insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, una funzione concava $g : C \to \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ e una funzione convessa $f : C \to \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$. Le funzioni $\frac{1}{g}$ e $\frac{1}{f}$ sono convesse? Perché?

2.2 **Scelta del passo**. Nei metodi del gradiente, una volta scelta la direzione di discesa $\mathbf{d}_k$ all'iterazione k, si deve scegliere il passo di riduzione α_k in modo che $f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) \le f(\mathbf{x}_k)$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x)^2 - 2(1-x) & \text{for } x > 1 \\ \frac{3}{4}(1+x)^2 - 2(1+x) & \text{for } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{for } -1 \le x \le 1, \end{cases}$$

e si applichi il metodo del gradiente, ponendo $d_k = -\nabla f(x_k)$. Si dimostri che:

(a) la scelta del passo $\alpha_k = 1$ per ogni k soddisfa il criterio di riduzione $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ menzionato sopra, in modo stretto;

(b) il metodo del gradiente con questa scelta di α_k non converge alla soluzione ottimale $x = 0$ del problema $\min f(x)$ per punti iniziali x_0 con $|x_0| > 1$, nonostante f sia convessa.

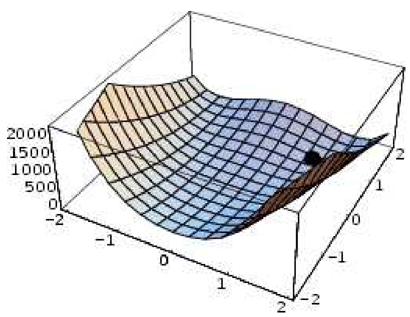
2.3 **Condizioni di Wolfe**. Dimostrare che se $c_1 \le \frac{1}{2}$, i minimi di una funzione unidimensionale quadratica fortemente convessa soddisfano sempre le condizioni di Wolfe viste a lezione

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \le f(\mathbf{x}_k) + c_1 \alpha (\nabla f(\mathbf{x}_k))^\top \mathbf{d}_k.$$

2.4 **Funzione di Rosenbrock**. La funzione di Rosenbrock è definita nel modo seguente:

$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 105(x_2 - x_1^2)^2.$$

La rappresentazione grafica della funzione è data nella figura sotto.



Il problema $\min_{x_1,x_2} f(x_1, x_2)$ è nonconvesso ha un ottimo globale a $(1, 1)$ con valore 0. Per mezzo di MATLAB, si verifichi la convergenza a partire dal punto iniziale (0,0) dei seguenti metodi:

- algoritmo del gradiente risolvendo in modo esatto i sottoproblemi di ricerca unidimensionale;

- algoritmo del gradiente risolvendo con l'algoritmo di *backtracking line search* visto a lezione i sottoproblemi di ricerca unidimensionale;
- algoritmo di Newton;
- algoritmo di Newton risolvendo con l'algoritmo di *backstracking line search* visto a lezione i sottoproblemi di ricerca unidimensionale (con passo iniziale $\alpha_0 = 1$).

Si applichino questo algoritmi partendo dai punti iniziali $(1.2, 1.2)$ e $(-1.2, 1)$.

2.5 **Invarianza affine del metodo di Newton**. Sia D un cambio di coordinate affine non singolare, tale che $\mathbf{x} = D\mathbf{y}$, e si ponga $\bar{f}(\mathbf{y}) = f(D\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$. Siano $\mathbf{d}_\mathbf{x} = -(\nabla^2 f(\mathbf{x}))^{-1}\nabla f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{d}_\mathbf{y} = -(\nabla^2 \bar{f}(\mathbf{y}))^{-1}\nabla \bar{f}(\mathbf{y})$ le direzioni di Newton rispetto a f e $\bar{f}$ rispettivamente. Si dimostri che $\mathbf{x} + \mathbf{d}_\mathbf{x} = D(\mathbf{y} + \mathbf{d}_\mathbf{y})$.

2.6 **Rapidità di convergenza**. Si consideri la funzioni quadratica $f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top Q\mathbf{x}$, dove Q è una matrice $n \times n$ simmetrica e definita positiva. Il metodo del gradiente è dato da:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k,$$

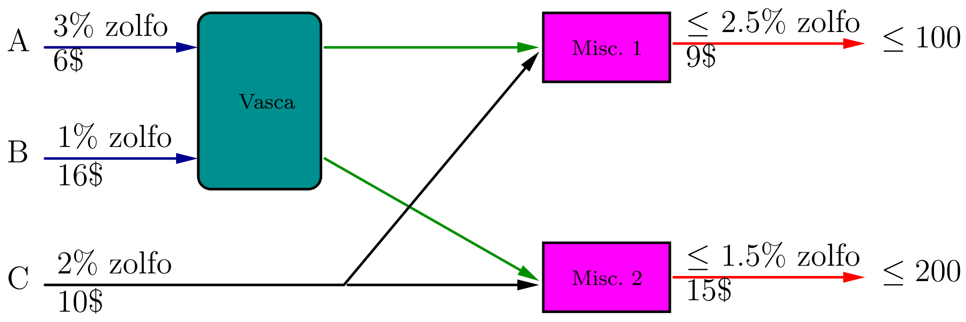
dove $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$ e α_k è tale che $f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$. Dimostrare che per ogni k,

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) \leq \left(\frac{a - A}{a + A}\right)^2 f(\mathbf{x}_k),$$

dove a, A sono rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore di Q.

[*Suggerimento.* Si utilizzi la seguente disuguaglianza dovuta a Kantorovich: per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\frac{(\mathbf{x}^\top \mathbf{x})^2}{(\mathbf{x}^\top Q\mathbf{x})(\mathbf{x}^\top Q^{-1}\mathbf{x})} \geq \frac{4aA}{(a+A)^2}$.]

2.7 **Problema di miscelazione di greggio**. In una raffineria l'impianto di miscelazione è composto da una vasca e due miscelatori, come nella figura sotto. La vasca ha due input A,B di greggio i cui costi unitari e percentuale di zolfo sono rispettivamente 6\$, 16\$ e 3%, 1%. Il contenuto della vasca è portato ai miscelatori, che hanno anche un input supplementare C di greggio di costo unitario 10\$ e una percentuale di zolfo del 2%. Il miscelatore 1 deve produrre un petrolio di costo unitario 9\$, garantito al 2.5% di zolfo, mentre il miscelatore 2 deve produrre un petrolio più puro, di costo unitario 15\$, garantito al 1.5% di zolfo. La domanda massima di acquisto del mercato è di 100 unità di petrolio raffinato di tipo 1 e 200 unità di petrolio raffinato di tipo 2. Si scriva un modello di PNL per risolvere il problema di determinare le quantità di greggio di tipo A, B, C richieste dall'impianto al fine di massimizzare il guadagno. Il problema è convesso?



2.8 **Problema di controllo ottimo di un razzo**. Un razzo di massa m deve essere portato dal livello del mare a un'altezza H in tempo t. Sia $y(t)$ l'altezza del razzo al tempo t e $u(t)$ la forza agente in direzione verticale al tempo t, che non può eccedere un determinato valore b. Il razzo, bruciando il combustibile, perde massa in ragione di $\alpha u(t)$ kg s^{-1}, e la massa di combustibile iniziale è c (si assuma che la massa iniziale m del razzo sia $m_0 + c$, dove m_0 è la massa del razzo senza il combustibile). Si supponga che l'accelerazione di gravità g sia costante nell'intervallo $[0, H]$.

(a) Discretizzando il tempo t in un'orizzonte $[0, T]$ in n intervalli, si scriva un modello di PNL che determini (per ogni $k \leq n$) la forza $u(t_k)$ agente sul razzo in modo che la quantità di carburante consumata sia minima.

(b) Si dica come si può approssimare la formulazione ottenuta a un problema non vincolato, si commenti sulle proprietà di convessità del problema approssimato, e lo si risolva con MATLAB utilizzando un metodo opportuno.

[*Suggerimento.* Si introduca un termine di penalità per ogni vincolo di equazione e una barriera logaritmica per ogni vincolo di disuguaglianza.]