1.1 **Sconti.** Una ditta che produce un solo tipo di prodotto ha due tipologie di clienti (A e B) che usufruiscono di diversi tipi di sconti. Il cliente A paga $70 - 4q_A$ euro per unità di prodotto, dove q_A sono le unità prodotte per il cliente A. Il cliente B paga $150 - 15q_B$ euro per unità di prodotto, dove q_B sono le unità prodotte per il cliente B. Il costo di produzione di q unità è di $100 + 15q$ euro. Formulare il problema di massimizzazione del profitto in termini di PNL, enunciare le condizioni di ottimalità (necessarie e sufficienti) e risolverlo analiticamente.

1.2 **Iperpiano separatore.**

- Si dimostri che se C è un insieme convesso e $\mathbf{z}$ non appartiene a $\text{int}(C)$ (cioè, l'interno di C) allora esiste un iperpiano che separa C da $\mathbf{z}$, ovvero esiste un vettore $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{p}\mathbf{x} \leq \mathbf{p}\mathbf{z}$ per ogni $\mathbf{x} \in C$. Che differenza c'è tra questo teorema e quello di separazione tra insieme convesso e punto visto a lezione?
- Siano $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi convessi non vuoti tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Utilizzando il teorema dimostrato al punto (a), si dimostri che esiste un iperpiano che separa C_1 e C_2 , cioè $\exists \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{p}\mathbf{y} \leq \mathbf{p}\mathbf{z}$ per ogni $\mathbf{y} \in C_1, \mathbf{z} \in C_2$.
- Con quali condizioni aggiuntive su C_1, C_2 è possibile dimostrare la separazione stretta ($\mathbf{p}\mathbf{y} < \mathbf{p}\mathbf{z}$)?
- Con quali condizioni aggiuntive su C_1, C_2 è possibile dimostrare la separazione forte (esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathbf{p}\mathbf{y} < \mathbf{p}\mathbf{z} + \varepsilon$)?

1.3 **Insiemi e funzioni convesse.** Si dimostri che $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa sull'insieme convesso C se e solo se $\text{epi}(f)$ è un insieme convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.4 **Operatori su funzioni convesse.** Si consideri un insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$ e funzioni convesse $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ con $i \in \{1, \dots, m\}$. Le funzioni

- $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\mathbf{x})$ con $\alpha_i \geq 0$ per $i \in \{1, \dots, m\}$
- $\max_i f_i(\mathbf{x})$
- $\min_i f_i(\mathbf{x})$

sono convesse? Perché?

1.5 **Composizione di funzioni convesse.** Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni convesse. Sotto quali condizioni la composizione $h = g \circ f$ è convessa?

1.6 **Algoritmo del gradiente.** Si consideri il problema

$$\min(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2. \quad (1)$$

Si determinino le prime 5 iterazioni del metodo del gradiente a partire dal punto iniziale $\mathbf{x} = (0, 3)$ e risolvendo in modo esatto i sottoproblemi di ricerca unidimensionale. Si fornisca una rappresentazione grafica dei punti ottenuti nelle iterazioni e si commenti sull'andamento della convergenza dell'algoritmo.

1.7 Costruzione di un serbatoio. Si deve progettare un serbatoio cilindrico chiuso che contenga almeno 20 metri cubi di liquido. Il foglio metallico per la chiusura laterale e superiore costa 10\$ al metro quadrato, mentre quello (più spesso) per la chiusura inferiore costa 40\$ al metro quadrato. Inoltre, per evitare uno sbilanciamento del baricentro verso l'alto, l'altezza del serbatoio non può superare il doppio del suo diametro. Formulare un modello di PNL per trovare il progetto di costo minimo che soddisfi a tutti i requisiti, e rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni ammissibili.