Equipe Commands

(Control, Optimization, Models, Methods and Applications for Nonlinear Dynamical Systems)

Présentation OPTIMEO, 4 avril 2008

http://www.cmap.polytechnique.fr/commands

INRIA ENSTA CMAP

Thèmes

- Conception et analyse pour l'optimisation dynamique
- Optimisation de trajectoire : véhicules, processus de production
- Systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles
- Programmation dynamique et ses extensions au temps continu (HJB)
- Systèmes incertains : programmation stochastique et contrôle stochastique.

Domaines d'application

- Aérospatial (CNES) : lanceurs, rentrée
- Energie (Total, GDF, EDF) : production électrique, stockage et négoce de gaz
- Process industriels : génie chimique
- Biologie ??

Equipe : Permanents

- J. Frédéric BONNANS : DR2 INRIA, responsable scientifique
- Hasnaa ZIDANI : Enseignante chercheur ENSTA, responsable permanent
- Pierre MARTINON : CR2 INRIA
- Emmanuel TRELAT : Prof. Univ. Orléans, collaborateur extérieur

Equipe : non permanents

- Jérôme BOLTE (délégation U. Paris VI, sept. 07 - aot 08)
- Pascal JAISSON (détachement Educ. Nat.: sept. 07- sept. 09)
- Nicolas FORCADEL (post-doc, sept. 07 - août 08)
- Emiliano CRISTIANI (sept 07-août 08, CNES-INRIA+DGA-ENSTA contracts)

Doctorants au 1-1-08

- Gregory EMIEL (EDF-IMPA, fin en sept 2008)
  Production électrique moyen terme
- Audrey HERMANT (DGA, fin en sept 2008)
  Algorithmes de tir en commande optimale
- Soledad ARONNA (Cotutelle U. Rosario, Argentine, début sept. 07)
  Modèles de production électrique en temps continu
- Francesco SILVA (Cordi/CMM, début sept. 07)
  Algorithmes de points intérieurs en commande optimale

Contrats et relations industrielles

- CNES (pôle Opale) : trajectoires lanceurs et rentrée, 2006-2008.
- DGA Planification de trajectoire 2007-2008.
- EDF (thèse R. Apparigliato), Production court terme, 2005-2007.
- EDF (thèse G. Emiel), Production moyen terme, 2005-2008.

Articles parus en 2007, par thème

- *Optimization de trajectoire* : J. Guidance, Control and Dynamics / Optimal Control Applic. & Methods / COCV
- *Schémas anti-dissipatifs* : J. Sci. Computing / Applied Num. Maths.
- *Algorithmes de tir* : Math. Programming / SIAM J. Control Optim.
- *Contrôle stochastique* : Applied Math. and Optim.

Trajectoires optimales avec arcs singuliers pour des problèmes de lanceurs spatiaux

Intervenants: P. Martinon, F.Bonnans, E.Trélat

Contexte: Contrat R&T avec le CNES (pôle OPALE)

Problème de lanceur: Ariane 5

- Vol depuis Kourou jusquà l'orbite GTO
(orbite de transfert vers la géostationnaire)

- Difficultés les plus notables:
- séparation des étages (phases de vol)
- données physiques tabulées

- Simplification par rapport au vol réel:
- direction de poussée libre

Critère: maximisation de la charge utile.

Question: Existence de trajectoires optimales avec arcs singuliers ?
(ie niveau de poussée α des propulseurs auxiliaires non maximal ?)

Calcul numérique des extrémales

Deux grandes classes de méthodes:

- Méthodes directes:
  On discrétise le problème de contrôle optimal
  $\Rightarrow$ problème de minimisation sous contraintes (non linéaire)
  pénalisation, points intérieurs, SQP, ...

- Méthodes indirectes:
  On implémente le Principe du Maximum de Pontryagin
  $\Rightarrow$ méthode de tir
  méthode de Newton (+ continuation)

Position du problème

Etat du système:

- position $r \in \mathbf{R}^3$
- vitesse $v \in \mathbf{R}^3$
- masses des constituants du lanceur

Dynamique du vol:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}(T(r,u) - D(r,v)) \ + \ g(r) \\ \dot{m} = -\beta \|u\| \end{array} \right.$$

-$T(r,u)$: poussée des propulseurs.
-$D(r,v)$: traînée dûe à l'atmosphère.
-$g(r)$: gravité.

- **Gravité:** $\mathbf{g} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^3} \left(\mathbf{r} + \mathbf{J_2} \frac{\mathbf{R_T^2}}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{M_{J_2}} \mathbf{r}\right)$

(le terme du J_2 modélise la non-sphéricité de la Terre)

- **Poussée:** $\mathbf{T} = \alpha\beta \, \mathbf{Isp} \; \mathbf{g_0} \; - \mathbf{S} \; \mathbf{P_z}$

- α: niveau de poussée entre 0 et 1, β: débit maximal
- Isp: impulsion spécifique dans le vide, S: section de sortie
- P_z: pression atmosphérique à l'altitude z (table donne $Ln(P_z)$).

- **Traînée:** $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\gamma \mathbf{P_z} \mathbf{M^2} \; \mathbf{Sr} \; \mathbf{C_x}(\mathbf{M})$

- γ: rapport des chaleurs massiques, S_r: surface aérodynamique
- C_x: coefficient aérodynamique (suivant vitesse en Machs, table).
- M: vitesse en Machs, $M = V_{rel}/V_{son}$ (suivant l'altitude, table).
- V_{rel}: vitesse relative, $V_{rel} = V_{abs} - V_{air}$ ($V_{abs} = \|v\|$)

Contrôle optimal

Principe du Maximum de Pontryagin:

$\rightarrow$ le contrôle optimal u^* maximise le Hamiltonien (p: état adjoint)

$$H =< p_r, v > + < p_v, -\frac{D(r,v)}{m}\frac{v}{\|v\|} - \frac{g(r)}{m} + \frac{u}{m} > -p_m \; b\|u\|$$

Posons $\Psi(x,p) = -\frac{\|p_v\|}{m} - p_m \; b$ la **fonction de commutation**

$$\begin{cases} Si \;\; \Psi(x,p) > 0 & Alors \quad u = 0 \\ Si \;\; \Psi(x,p) < 0 & Alors \quad u = -C \; \frac{p_v}{\|p_v\|} \\ Si \;\; \Psi(x,p) = 0 & Alors \quad u = -\alpha \; C \; \frac{p_v}{\|p_v\|}, \quad \alpha \in [0,1] \end{cases}$$

Deux premiers cas: loi de commande **bang-bang** (on/off)

Dernier cas: commutation ou contrôle singulier.

On obtient alors u^*_{sing} à partir de $\ddot{\Psi} = 0$ (calcul formel, MAPLE).

Quelques points techniques

• Instants de séparation
- on considère les masses des différentes parties du lanceur
(pour garder la continuité des variables d'état)

• Traitement des données tabulées
- interpolation (linéraire ou splines cubiques)
- calcul de dérivées par différentiation automatique
(outil TAPENADE, Inria Sophia, TROPICS)
- adaptation du calcul des contrôles singuliers
(expression formelle de $\ddot{\Psi}$ non disponible)

• Changement de coordonnées
- conditions d'orbite finales exprimées sur l'orbite
(passage cartésien $\rightarrow$ képlerien: librairie MSLIB du CNES)

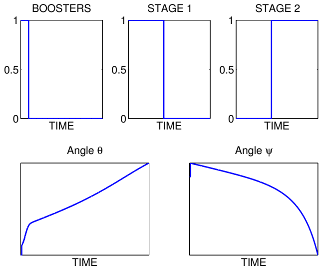
• Discontinuités du contrôle
- algorithme de détection des commutations pour le tir

Etude préliminaire: vol à poussée maximale

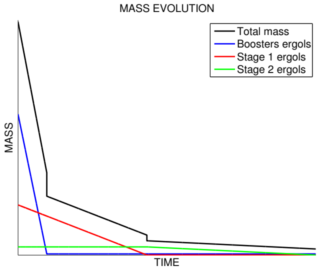
On considère ici un niveau de poussée maximal fixé $\alpha = 1$.

La résolution par tir simple est possible en procédant par étapes.
Résolution du vol à 1 phase $\longrightarrow$ ajout de la phase 2$\longrightarrow$ vol complet

Solution à poussée maximale

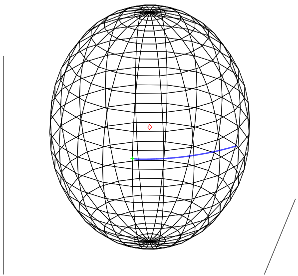


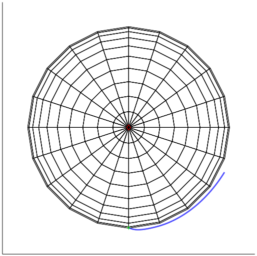
Contrôles



Masses

Trajectoire à poussée maximale





Temps de vol: 1232.375 secondes (consommation totale des ergols)
Charge utile obtenue: 14623kg (référence 12610kg)
NB. On a supprimé la contrainte d'incidence...

Etude des arcs singuliers

Déterminer la structure singulière (nombre d'arcs) du contrôle ?

$\rightarrow$ **Continuation:** on régularise, ajout d'une perturbation quadratique au critère de consommation minimale

$$Min \int_0^{t_f} \|u(t)\| + (1-\lambda)\|u(t)\|^2 dt, \quad \lambda \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ Hamiltonien **strictement convexe** par rapport à u, pour $\lambda < 1$.

$$\begin{cases} Si\ \Psi > 0 & Alors\ \alpha = 0 \\ Si\ \Psi < -2\beta(1-\lambda) & Alors\ \alpha = 1 \\ Sinon & \alpha = -\frac{\psi}{\beta(1-\lambda)} \end{cases}$$

Résolution:

- quand $\lambda \rightarrow 1$, informations sur la structure singulière du contrôle.
- puis tir simple avec structure singulière

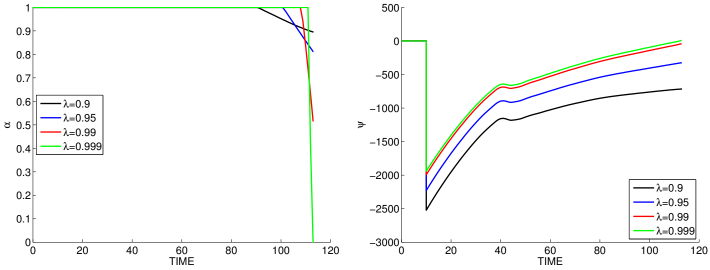
Initialisation:

Même régularisé, le problème est difficile à résoudre...

$\longrightarrow$ continuation: introduction progressive de l'atmosphère.

Problème de départ: pas d'arcs singuliers

On ne détecte pas de trajectoires optimales avec arcs singuliers: la continuation mène à une solution $\alpha = 1$.



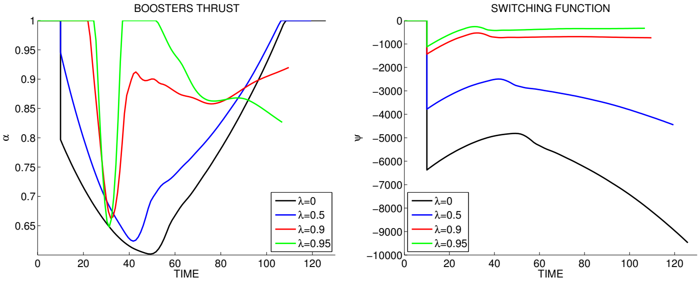
Remarque: il y a en fait une commutation tout à la fin.

Méthodes directes: solution à poussée maximale également.

Etude d'un lanceur modifié

On tente d'augmenter l'influence de la traînée, via les paramètres S_r (surface de référence) et Isp_{EAP} (impulsion spécifique).

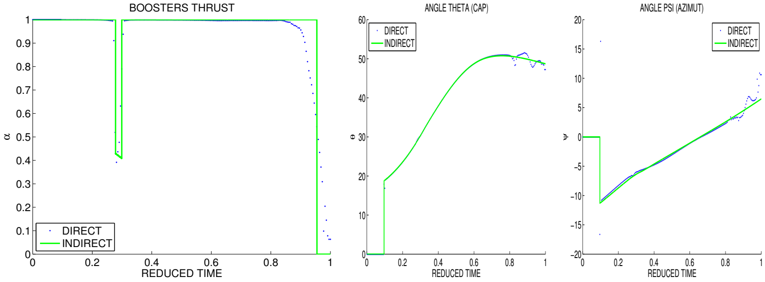
Avec $S_r \times 2$ et $Isp_{EAP} \times 1.25$, on détecte un arc singulier:



L'evolution des solutions suggère une structure de la forme **bang(1)** - **sing** - **bang(1)** **[- bang(0)]**

Solution avec arc singulier

Le tir simple et la méthode directe confirment cette hypothèse:

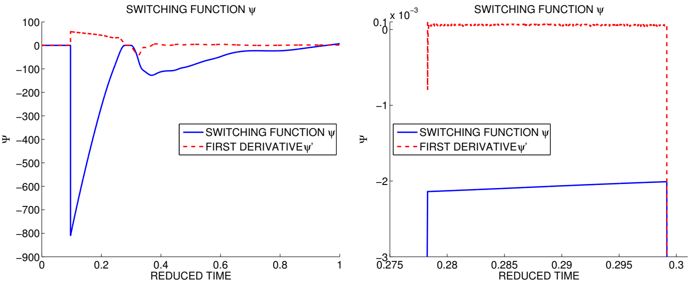


Critère (masse finale EAP):

- tir simple: $m_1(t_f) = 165163kg$
- direct: $m_1(t_f) = 164990kg$

- solution bang-bang (direct): $m_1(t_f) = 164442kg$

Fonction de commutation et sa première dérivée:



$\rightarrow \Psi$ et $\dot{\Psi}$ sont bien proches de 0 sur l'arc singulier.

Conclusions et Perspectives

Conclusions

- Pas d'arc singulier pour le problème de départ.
- Arc singulier possible suivant les valeurs de S_r et Isp (par ex).
- Méthode de résolution éprouvée.

Perspectives (demande d'un nouveau contrat R&T en cours)

- Dépendance de l'arc singulier quant aux paramètres du lanceur ?
- Etude de lanceurs à voilure (terme de portance)
- Conditions suffisantes d'optimalité ?

Equations d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Intervenants: F. Bonnans, E. Cristiani, N. Forcadel, H. Zidani

Equations d'Hamilton-Jacobi-Bellman

- Approche globale pour les problèmes de contrôle optimal (déterministes ou stochastiques)
  - Basée sur le principe de programmation dynamique de Bellman (60's)
  - Cadre théorique: notion de solution de viscosité (80's)
  - Avantages: approche globale, solutions feed-back.
  - Difficultés: équations non linéaires, solutions peu régulières, coût numérique élevé

- Modélisation de plusieurs phénomènes physiques: propagation de fronts, dislocation de cristaux, ...

Equations HJB: nos contributions

- ☞ Etudes théoriques: existence, unicité et étude de régularité des solutions. Estimations d'erreurs d'approximation.
- ☞ Algorithmes rapides, efficaces, adaptatifs. Convergence des schémas numériques
- ☞ Applications: propagation de fronts, contrôle optimal déterministe ou stochastique, domaine de viabilité, bassin de capture

(Scalapplix, Cermics, Ceremade, U. La Sapienza, UCLA, Berkeley, ...)

Equation HJB provenant du contrôle optimal déterministe

$$\partial_t \vartheta(x,t) + \mathcal{H}(x, D_x\vartheta(x,t)) = 0 \quad]0,T[\times\mathbb{R}^d, \tag{1a}$$
$$\vartheta(x,0) = \Phi(x) \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1b}$$

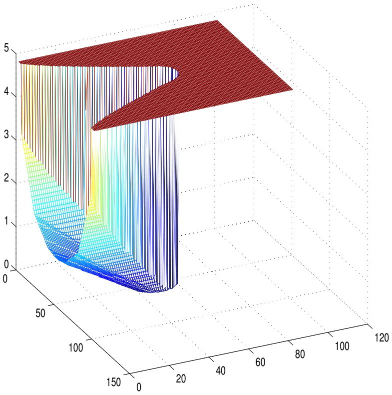
avec $\mathcal{H}(x, D_x\vartheta(x,t)) = \max_{a\in\mathcal{A}(x)} \Big(f(x,a)\cdot D_x\vartheta(x,t) \Big)$

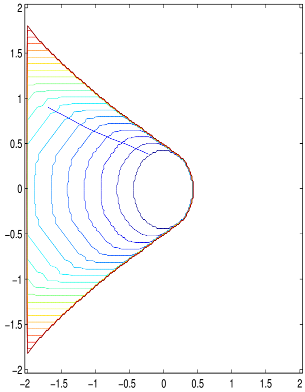
Φ est (en général) discontinue.

Pour un problème de commande optimale, f est la dynamique du système, Φ est le coût final et ϑ représente la fonction valeur.

Exemple: Navigation d'une barque (Zermelo)

Zone de trajectoires admissibles pouvant atteindre la cible en temps fini





•Cas de coût final Φ continue

- Différences finies: Godunov type, Lax Friedrichs, ...
  (Lions, Souganidis, Barles,...),
- Méthodes Semi-Lagrangiennes utilisant le principe dynamique
  (Cristiani, Falcone, Ferreti, Grüne, ...)
- Approximations par chaînes de Markov (Kushner-Dupuis,...)
- Schémas non-oscillants (ENO,WENO) (Osher, Shu, ...)
- Galerkin discontinu (Cockburn, Shu,...)
- Schémas d'ordre élevé (R. Abgrall)

•Cas de $\Phi \in \{0, 1\}$

- Fast Marching Method
  (Sethian, Falcone, Forcadel, Cristiani, Monneau, Zidani ...)
- Méthodes anti-dissipatives (Bokanowski, Zidani, ...)

Nos principales contributions: HJB du 1er ordre

- Schémas anti-dissipatifs non-monotones (UltraBee): Convergence et estimations d'erreur
- Réalisation d'un code rapide (dimension 2, 3 ou 4) sur des grilles creuses pour la résolutions des équations HJB avec des solutions qui ne prennent que les valeurs 0 et 1.

Implémentation sur des grilles creuses

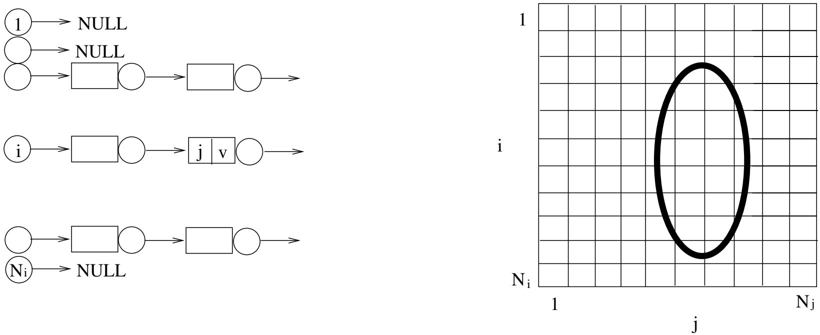
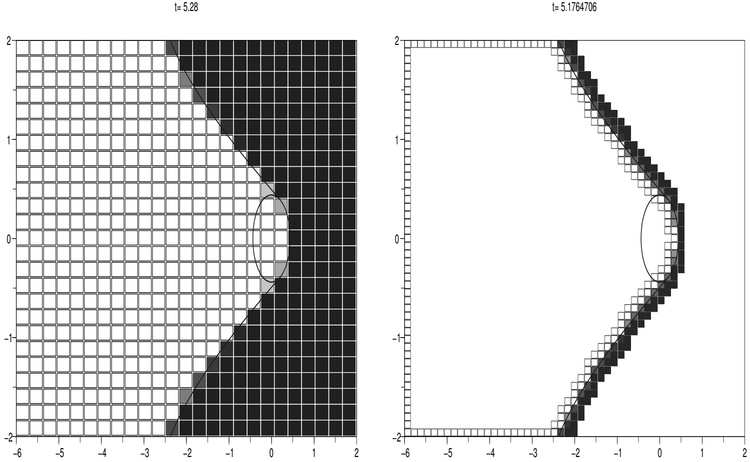


Figure: structure contenant les mailles traversées par le front ainsi que leurs voisines (SP-Static)

Problème de Zermelo: Bassin de capture



Implémentation sur des grilles creuses: 3D

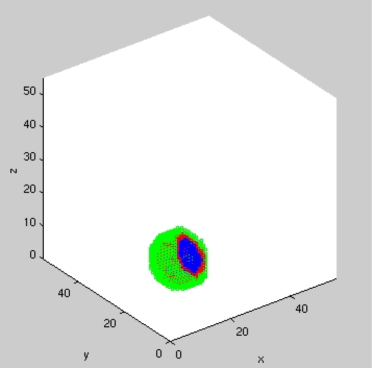


Figure: A $t = 0$

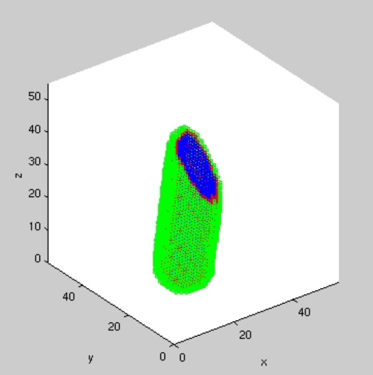


Figure: A $t = 1.5$

Figure: Exemple d'une propagation de fronts en 3D

Implémentation sur des grilles creuses (UltraBee): 3D

nodes	FULL 256MB	FULL 8GB	SP-STATIC	NB
25^3	0.02	0.01	0.02	432
50^3	0.38	0.24	0.18	2016
100^3	6.10	4.39	1.51	8016
200^3	x	64.29	14.41	31416
400^3	x	1175.00	146.78	125968

Implémentation sur des grilles creuses (UltraBee): 4D

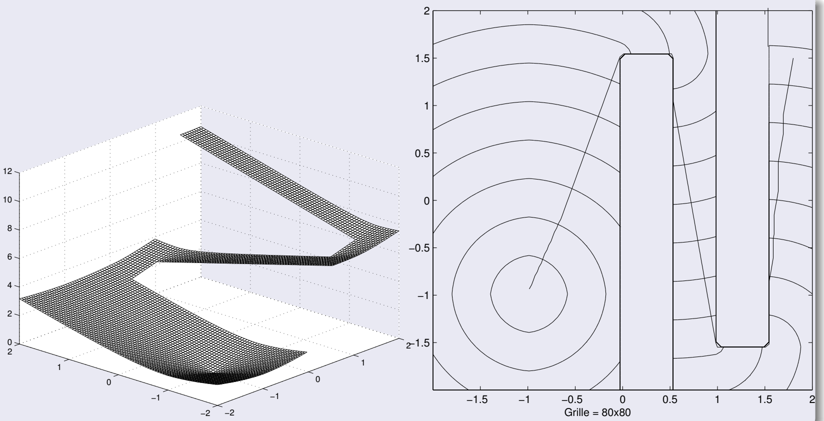
Noeuds	SP-STATIC	Iter.	Nbre de noeuds NB
25^4	0.49	4	3024
50^4	6.39	7	23552
100^4	123.97	14	179472

Table: Temps CPU pour des tests 4D

Noeuds	SP-STATIC	Iter.	Nbre de noeuds NB
16x	19.4x	2x	7.6x

Table: rapport des temps CPU

Propagation de fronts/Planification de trajectoires



Applications: HJB du 1er ordre

- Consommation d'un moteur hybride (Renault, 2002)
- Problème de montée des lanceurs sous contrainte de lanceurs (Cnes, en cours)
- Planification de trajectoires (DGA, en cours)

Equations HJB du second ordre: contrôle stochastique

- Estimations d'erreur des approximations numériques
- Schémas de différences finies généralisées pour les équations du second ordre avec matrice de diffusion dégénérée.
- Code rapide pour la résolution de l'équation HJB en dimension 2
- Application: Problème de sur-couverture (en collaboration avec la Société Générale)

Sujets d'interaction ?

- Dynamique de population / médical
- Calcul d'enveloppe d'ensembles discrets
  Applis schémas HJB et stabilité de structures (CEA)
- Optimisation globale (réseaux de gaz)

$$P_i^2 - P_j^2 = c_{ij}\frac{Q_{ij}}{D_{ij}}.$$

- Programmation stochastique