École polytechnique
Promotion 1999

Majeure informatique

Cours « Conception et analyse d'algorithmes »
TD n^o 4 – programmation linéaire

1. Adéquation linéaire

Un physicien prend des mesures d'une fonction $y(x)$ qu'il sait linéaire. Les résultats sont donnés sous la forme de couples (x_i, y_i). Il souhaite trouver la droite qui correspond le mieux à ces données au sens que la distance verticale maximale entre un point (x_i, y_i) et la droite est la plus petite possible.

Écrire ce problème comme un problème linéaire. Pourquoi peut-il être préférable d'en résoudre le dual ?

2. Le sac à dos

On considère le problème classique du sac à dos : les objets à emporter, numérotés de 1 à n, ont pour poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et pour coefficients d'intérêt $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La capacité du sac (ou plutôt celle du porteur) est p.

i. Exprimer le problème d'optimisation du remplissage du sac sous forme d'un problème linéaire à $n+1$ contraintes faisant intervenir des variables à valeurs entières.

ii. (optionnel) Appliquer la méthode du simplexe au cas suivant avec $p = 18$:

i	1	2	3	4	5
p_i	8	6	6	4	3
a_i	7	5	4	3	2

iii. Un ensemble d'objets est dit *bloquant* si la somme des poids des objets qui le composent est supérieure à p, et *caractéristique* s'il est bloquant minimal. Montrer que l'on peut associer à chaque ensemble caractéristique une contrainte où les coefficients des variables sont 0 ou 1. Montrer que l'ajout de ces contraintes permet de supprimer la contrainte obtenue en **i.** qui contenait des coefficients supérieurs à 1, et que les deux formulations sont équivalentes (*i.e.* donnent les mêmes solutions optimales).

iv. Peut-on être assuré que l'optimum trouvé a toutes ses coordonnées égales à 0 ou 1 ?

3. La découpe.

Une entreprise fabrique des pièces de tissu ayant toutes la même longueur notée ℓ, et reçoit des commandes de clients pour des pièces de longueur ℓ_1, ..., ℓ_p. On note a_i le nombre de commandes de pièces de longueur ℓ_i. On suppose dans la suite p petit et les a_i grands. On souhaite poser le problème de la découpe optimale sous la forme d'un problème linéaire.

i. On considère l'exemple où $\ell = 100$ et $p = 4$ avec des commandes de 85 pièces de longueur 44, 75 pièces de longueur 36, 121 pièces de longueur 31 et 151 pièces de longueur 17.

Montrer qu'il y a 12 façons de découper une pièce de longueur ℓ en morceaux de tailles correspondant aux commandes (sans laisser de coupe de longueur supérieure ou égale à la plus petite commande), puis donner un programme linéaire à 12 variables qui modélise le problème d'optimisation dans ce cas particulier.

ii. Que peut-on dire de la méthode du simplexe appliquée à cette famille de problèmes ? Donne-t-elle une solution optimale à valeurs entières ? Comment utiliser le résultat obtenu ?

4. Ordonnancement préemptif sur des machines parallèles

Un ensemble de tâches $\{1, \cdots, n\}$ doit être exécuté sur m machines parallèles. Chaque tâche a une durée p_i et peut être exécutée de manière préemptive, c'est-à-dire que l'exécution de chaque tâche i peut être faite en plusieurs sous-tâches dont la somme des durées est p_i. Une tâche peut commencer sur une machine, être interrompue et continuer sur une autre machine mais deux parties d'une même tâches ne peuvent être exécutées en même temps sur des machines différentes.

i. Montrer que la durée minimale d'un tel ordonnancement est

$$\max\left(\max_{1\leq i\leq n} p_i, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{m}\right)$$

et qu'un tel ordonnancement peut être déterminé en $O(n)$.

ii. Chaque tâche a maintenant une fenêtre horaire $[r_i, d_i]$ pendant laquelle elle doit être entièrement exécutée. Donner un système linéaire de taille polynomiale en n et ne dépendant pas de m permettant de déterminer s'il est possible d'exécuter toutes les tâches. En déduire un algorithme de minimisation de la durée de l'ordonnancement.

5. Le problème du voyageur de commerce.

On considère un graphe $G = (X, E)$, un cycle hamiltonien de G est un ensemble d'arêtes formant un cycle passant par tous les sommets de G ; on souhaite exprimer le problème de la recherche d'un cycle hamiltonien comme un problème linéaire à valeurs 0 ou 1. Dans la suite on note n le nombre de sommets de G et m le nombre de ses arêtes. Un sous-ensemble de E est donc représenté par un vecteur caractéristique à m variables.

i. Donner m inégalités et n égalités qui expriment une condition nécessaire pour qu'un sous-ensemble de E constitue un cycle hamiltonien. Montrer que ces égalités et inégalités ne sont pas suffisantes.

ii. À tout sous-ensemble de sommets Y de G on associe le sous graphe $G'_Y = (Y, E_Y)$ formé des arêtes ayant leurs extrémités dans Y. Donner une condition nécessaire sur le nombre d'éléments de $F \cap E_Y$ pour que $F \subset E$ soit un cycle hamiltonien. En déduire une formulation de la recherche d'un cycle hamiltonien (de coût minimum) sous forme d'un problème linéaire en nombres entiers.

6. Jeu matriciel

Soit A une matrice carrée. On associe à A un jeu, dit *jeu matriciel*, qui se joue à deux joueurs, Irène (I) et Jean (J). Au cours d'une partie, Irène choisit une ligne i de la matrice et Jean une colonne j (sans connaître le choix d'Irène). Irène est gagnante si A_{ij} est positif, Jean sinon, et la somme gagnée est $|A_{ij}|$ francs. On peut par exemple modéliser de cette façon le jeu pierre–papier–ciseaux.

Une stratégie pour Irène est la donnée d'un vecteur de réels positifs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dont la somme des coordonnées vaut 1, où chaque x_i représente la probabilité de choisir la ligne i. Irène détermine les valeurs de x_i de façon à maximiser le gain minimal qu'elle peut réaliser, à savoir

$$\max \min_{y \in Y_1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{ij} x_i y_j = \max \min_{y \in Y_1} xAy,$$

où Y_1 est l'ensemble des vecteurs de probabilité.

i. Transformer le problème de recherche de stratégie pour Irène en celui de la recherche de

$$\max \min_j \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} x_i$$

sous des contraintes linéaires à déterminer.

ii. Afin de transformer la fonction économique en une fonction linéaire on ajoute une nouvelle variable z et m contraintes, pour $j = 1, \ldots, m$:

$$z - \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} x_i \leqslant 0.$$

Quelle est la fonction économique dont la recherche du maximum donne la stratégie d'Irène ?

iii. Montrer que les problèmes linéaires qui déterminent les stratégies optimales d'Irène et Jean sont duaux.

iv. Quelles sont les stratégies optimales pour Irène et Jean dans le cas du jeu pierre–papier–ciseaux ?