Majeure Informatique

Optimisation Combinatoire et Problèmes NP

Contrôle classant

Mardi 30 Mars 1999

Documents autorisés : polycopiés et notes de cours

1 Exercice : Algorithme probabiliste pour un ensemble disconnectant

On considère un graphe non orienté $G = (X, E)$, ayant n sommets $x_1, x_2, \ldots x_n$ et m arêtes, un ensemble $F \subset E$ est disconnectant si le graphe $(X, E - F)$ n'est pas connexe. On note $dis(G)$ le nombre minimum d'arêtes d'un ensemble disconnectant. On se propose de donner un algorithme qui détermine cette valeur.

1. Déterminer la valeur de $dis(G)$ dans les trois cas suivants :
(i) G est un arbre,
(ii) G est un cycle,
(iii) G est le graphe complet K_n à n sommets et $n(n-1)/2$ arêtes.

Dans la suite on considère un graphe $G = (X, E)$ non orienté quelconque et on dénote par k la valeur de $dis(G)$.

2. Montrer que si d_i désigne le nombre d'arêtes d'extrémité x_i dans G alors $d_i \geq k$; en déduire que :

$$k \leq \frac{2m}{n}$$

Dans la suite on considère des *multigraphes*, c'est-à-dire qu'il peut y avoir plusieurs arêtes ayant deux extrémités communes. On utilise [1] l'opération de contraction d'une arête e, ce qui donne le graphe G_e à partir de G. Cette contraction consiste à remplacer les deux sommets x, y extrémités de e par un seul sommet z dans G_e, toute arête $\{x, u\}$ ou $\{y, u\}$ est transformée en une arête $\{z, u\}$ dans G_e, de plus on supprime e et les autres arêtes qui joignent x à y s'il y en a, ainsi G_e n'a pas de boucle si G n'en a pas.

3. Dessiner les deux multigraphes différents que l'on peut obtenir en contractant successivement deux arêtes de K_5. Combien de multigraphes différents peut-on obtenir en contractant successivement 3 arêtes de K_5 ?

[1] comme il a été vu en cours pour le jeu de Shannon

On définit de la même façon que pour un graphe le nombre $dis(G)$ pour un multigraphe. Ainsi si U_m est le multigraphe ayant deux sommets et m arêtes parallèles qui les joignent, on a $dis(U_m) = m$.

4. Soit F un ensemble disconnectant minimal d'un multigraphe G et soit $e \notin F$ une arête, montrer que $dis(G_e) = dis(G)$. Si on choisit l'arête e au hasard montrer que la probabilité pour que $dis(G_e) = dis(G)$ est supérieure ou égale à $(1 - \frac{2}{n})$.

On considère l'algorithme suivant :

```
Dis (G) {
    If (nombre de sommets de G == 2)
           Return( nombre d'aretes de G)
    Else {choisir e au hasard; Return (Dis (Ge))}
}
```

5. Cet algorithme donne-t-il la valeur de $dis(G)$ dans les trois cas suivants :
(i) G est un arbre
(ii) G est un cycle
(iii) G est le graphe complet K_4

6. Avec quelle probabilité l'algorithme donne-t-il la bonne valeur pour $dis(K_5)$?

7. Montrer que pour G quelconque ayant n sommets l'algorithme donne la bonne valeur de $dis(G)$ avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{2}{n(n-1)}$ En déduire un algorithme qui pour une valeur de ε donnée fournit la valeur $dis(G)$ avec probabilité $1 - \varepsilon$.

2 Exercice : Répartition de tâches

On se propose dans cet exercice d'étudier un algorithme d'approximation pour le problème de répartition de tâches suivant. On dispose de k machines de performances identiques, soit un ensemble de tâches $T = t_1, \ldots, t_n$; chaque tâche t_i procure un bénéfice w_i si elle est réalisée. On suppose que les tâches sont effectuées par groupes $G_1, \ldots, G_l$, (chaque G_i est un sous-ensemble de T et deux G_i ne sont pas nécessairement disjoints), et l'on souhaite trouver l'ensemble de k groupes de tâches à réaliser qui maximise le bénéfice. Plus formellement on cherche un sous ensemble H de T, tel que H soit la réunion d'exactement k groupes parmi les G_i et tel que $\sum_{t_i \in H} w_i$ soit maximum.

1. Étudier le cas où $k = 2$, $n = 4$, $w_i = i$, $G_1 = \{t_3, t_4\}$, $G_2 = \{t_2, t_4\}$, $G_3 = \{t_1, t_4\}$.

2. On considère l'algorithme de type glouton pour ce problème qui consiste à commencer par poser $H = G_j$ où G_j est le groupe dont la somme des

bénéfices est maximal et à ajouter à H chaque étape le groupe qui augmente le plus le bénéfice. Donner un exemple qui montre que cet algorithme ne donne pas toujours l'optimum.

3. On cherche à estimer la performance de cet algorithme par rapport à la solution optimale. On note W_l le bénéfice de la réunion des sous-ensembles sélectionnés à l'étape l, et W_{opt} le bénéfice de la solution optimale. Montrer que

$$W_l - W_{l-1} \geq \frac{W_{\text{opt}} - W_{l-1}}{k}.$$

4. Déduire de la question précédente que

$$\frac{W_k}{W_{\text{opt}}} \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \geq 1 - \frac{1}{e}.$$

5. Dans certaines situations, détecter l'ensemble à rajouter à la l-ième étape de l'algorithme glouton est difficile ; on suppose que l'on ne dispose que d'un algorithme d'approximation à un facteur $\beta < 1$ près pour cette étape ; de quelle façon cela affecte-t-il le coefficient $1 - 1/e$ précédent ?

3 Exercice : Couverture par des chaînes

Soit $G = (Y \cup Z, E)$ un graphe biparti, où chaque arête e de E a une extrémité dans Y et l'autre dans Z. On associe [2] à G le graphe orienté G' avec capacités, défini de la façon suivante : on ajoute à G deux sommets s et t, un arc (s, y)de capacité 1 pour chaque $y \in Y$, un arc (z, t) de capacité 1 pour chaque $z \in Z$, on oriente les arêtes de E de Y vers Z et on affecte chacun de ces arcs de la capacité $|Y| + |Z|$.

1. Soit une coupe de capacité minimale de G' formée des arcs ayant une origine dans $\{s\} \cup Y' \cup Z'$ (où $Y' \subset Y$ et $Z' \subset Z$) et une extrémité dans le complémentaire. Montrer que tout arc de G' d'origine dans Y' a son extrémité dans Z'. En déduire la valeur de la capacité de cette coupe en fonction de $|Y|, |Y'|, |Z'|$.

Un ensemble de sommets X' de G est dit *couvrant* si toute arête de G a au moins une de ses extrémités dans X'.

2. Montrer que pour toute coupe de capacité minimale dans G' il existe un ensemble couvrant de G dont le nombre d'éléments est égal à cette capacité minimale.

[2]comme dans le cours à propos des couplages bipartis

3. Réciproquement, montrer que tout ensemble couvrant X' de G détermine une coupe de G' de capacité inférieure ou égale à $|X'|$.

4. Déduire de ce qui précède que dans un graphe biparti le nombre d'arêtes d'un couplage maximal est égal au nombre d'éléments d'un ensemble couvrant minimal.

On considère un graphe orienté **sans circuit** $G = (X, A)$, où $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, un ensemble de sommets U de G est dit *indépendant* dans G, si deux sommets quelconques de U ne sont pas reliés par un chemin. Un ensemble de chemins *couvre* G si deux d'entre eux n'ont pas de sommet commun et si tout sommet de G apparaît dans l'un de ces chemins. On souhaite montrer que le nombre minimum de chemins d'un ensemble qui couvre G est égal au nombre maximum de sommets indépendants de G.

Pour cela, on associe à G, un graphe biparti $Bip(G)$ ayant pour ensemble de sommets $Y \cup Z$ où $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ et $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ sont deux copies de X, $\{y_i, z_j\}$ est une arête de $Bip(G)$ si et seulement si (x_i, x_j) est un arc de G.

5. Montrer qu'à tout couplage de $Bip(G)$ contenant q arêtes on peut associer un ensemble de $p = n - q$ chemins qui couvre G.

6. Soit X' une couverture minimale de $Bip(G)$, montrer qu'il existe alors un ensemble U de sommets indépendants de G satisfaisant :

$$|X'| + |U| \geq n$$

7. En déduire que que le nombre minimum de chemins d'un ensemble qui couvre G est égal au nombre maximum de sommets indépendants.