Majeure Informatique

Optimisation Combinatoire et Problèmes NP

Contrôle classant

Mercredi 25 Mars 1998

Documents autorisés: polycopiés et notes de cours.

1 Exercice : Organisation de l'emploi du temps

On considère le problème de l'emploi du temps simplifié. Il s'agit d'affecter des salles à des cours $c_1, c_2, \ldots, c_n$. On connaît pour chaque cours c_i, l'heure de début d_i et l'heure de fin f_i. On doit attribuer à chacun des cours une salle de façon telle que deux cours dont les horaires se chevauchent aient lieu dans des salles différentes. Il s'agit de déterminer le nombre minimum de salles permettant de réaliser tous les cours.

1. Montrer que ce problème se ramène à un problème de coloration des sommets d'un graphe dont on précisera la construction.

2. Peut-on en déduire que le problème est NP-complet?

3. Décrire un algorithme glouton débutant par un classement des cours suivant les dates de début croiissantes, qui permet de résoudre le problème. Calculer sa complexité.

4. Démontrer que l'algorithme proposé donne bien la solution optimale : on vérifiera que si le nombre de salles attribuées est k, alors le graphe associé possède une clique de taille k.

2 Exercice : Algorithme probabiliste pour *2-SAT*

On considère le problème *2-SAT* pour lequel sont donnés un ensemble de clauses $u_i = y_i \vee z_i$ pour $i = 1, \ldots, p$ sur n variables, et on se propose de le résoudre par l'algorithme probabiliste suivant (où m est un entier que l'on précisera par la suite):

1. On part d'une affectation quelconque v_0 de valeurs aux variables.

2. `Pour` $cpt = 1$ à m `faire`

`Si` (Il existe une clause non satisfaite)

`Alors` choisir au hasard une des deux variables intervenant dans celle-ci et modifier sa valeur

`Sinon` répondre "Satisfaisable"

3. Répondre “Non-satisfaisable”

1. Préciser la complexité de l'algorithme en fonction de p et de m, l'algorithme donne-t-il toujours une réponse exacte?

On suppose qu'il existe une affectation v des variables pour laquelle toutes les clauses sont satisfaites. On note $E(i)$ le nombre moyen de modifications qu'il faut effectuer pour obtenir cette affectation, en supposant que le nombre de variables qui ont des valeurs différentes dans v et dans v_0 est égal à i. On rappelle que n désigne le nombre de variables différentes intervenant dans les clauses.

2. Montrer que $E(0) = 0$ et que $E(n) = 1 + E(n-1)$

3. On admet que pour $1 \leq i < n$ on a :

$$E(i) \leq 1 + \frac{1}{2}(E(i-1) + E(i+1))$$

On considère la suite finie u_i définie par

$$u_0 = 0, \quad u_n = 1 + u_{n-1} \quad u_i = 1 + \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_{i+1})$$

déterminer u_1 puis u_2 et enfin u_n.

4 En utilisant le résultat des questions précédentes, montrer que si $m > 2n^2$ la probabilité d'obtenir l'affectation v par l'algorithme précédent est supérieure à $\frac{1}{2}$. On montrera que si une variable aléatoire, à valeurs entières non négatives, a pour moyenne M alors la probabilité qu'elle soit supérieure à $2M$ est inférieure à $\frac{1}{2}$ (inégalité de Markov).

5. On souhaite généraliser cet algorithme à *3SAT*, on est ainsi amené à considérer une suite v_n satisfaisant des relations similaires à celles données plus haut pour u_n que l'on demande de donner sans preuve très formelle. On montrera que v_n satisfait $v_0 = 0$ et pour $i \geq 0$:

$$v_{n-i} = v_{n-(i+1)} + a_i$$

où a_i satisfait :

$$a_0 = 1 \quad a_{i+1} = 2a_i + 3$$

Que peut-on en conclure?

3 Exercice: MaxCut, Approximation

Dans la détermination de l'energie minimale du modèle d'Ising on est amené à résoudre le problème $MAXCUT$ suivant :

Soit $G = (X, E)$ un graphe symétrique, déterminer une partition de X en

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

telle que la coupure $E(X_1, X_2)$ formée des arêtes ayant une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2 soit de taillle maximum.

On se propose de donner un algorithme approché pour cette question puis de montrer que le problème exact est NP-complet.

On considère l'algorithme qui consiste à initialiser X_1, X_2 de façon quelconque puis à chercher itérativement s'il existe un sommet dont le passage de l'une des classes à l'autre augmente la taille de la coupure. Tant que l'on trouve un tel sommet on effectue ce passage, puis une fois que l'on en trouve plus, on déclare que la coupure est maximale.

1. Soit X_1, X_2 la partition donnée par l'algorithme ci-dessus et soit Y_1, Y_2 la partition optimale. On note $V_1 = X_1 \cap Y_1$, $V_2 = X_1 \cap Y_2$, $V_3 = X_2 \cap Y_1$ et $V_4 = X_2 \cap Y_2$. Enfin pour tout couple i, j on note $m_{i,j}$ le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans V_i et l'autre dans V_j. Montrer que pour tout sommet de V_1 le nombre de ses voisins dans V_2 est infe'rieur ou égal au nombre de ses voisins dans $V_3 \cup V_4$.

En déduire que

$$m_{1,2} \leq m_{1,3} + m_{1,4}$$

puis :

$$m_{1,2} + m_{3,4} + m_{1,4} + m_{2,3} \leq 2(m_{1,3} + m_{1,4} + m_{2,3} + m_{2,4})$$

2. Déduire de ce qui précède que l'algorithme donne une coupure dont la taille est minorée par la moitié de la taille de la coupure maximum.

Soit $U = \wedge_{i=1,p} u_i$ un ensemble de clauses sur n variables x_j (où $u_i = t_i \vee z_i$). On suppose qu'elles sont toutes distinctes et qu'elles contiennent chacune deux variables différentes. On construit le graphe $G(U)$ ayant pour ensemble de sommets $X = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, c_1, c_2, \ldots c_{2p}\}$ et dont les arêtes sont les paires suivantes associées aux clauses $u_i = t_i \vee z_i$

$$\{c_{2i-1}, t_i\}, \{c_{2i}, z_i\}, \{t_i, z_i\}$$

3.Dessiner le graphe associé à la formule

$$(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)$$

Montrer que s'il existe k clauses satisfaisables dans U alors le graphe $G(U)$ admet une partition X_1, X_2 telle que X_1 contienne $c_1, c_2, \ldots c_{2p}$ et donnant une coupure de taille $2k$.

4. Montrer que le probleme *MAX-2SAT* se réduit polynomialement au problème *MAXCUT-COMP* suivant :

Soit $G = (X, E)$ un graphe, K un entier, Y un sous ensemble de X et q paires a_i, b_i $(i = 1, \dots, q)$ de sommets de G disjointes; déterminer s'il existe une partition X_1, X_2 de X telle que :

- $Y \subset X_1$
- Pour tout $i = 1, \dots, q$ $\{a_i, b_i\} \cap X_1 \neq \emptyset$ et $\{a_i, b_i\} \cap X_2 \neq \emptyset$
- La coupure $E(X_1, X_2)$ est de taille supérieure ou égale à K.

5. On admettra que MAXCUT-COMP se réduit polynomialement à *MAXCUT*, en déduire que *MAXCUT* est NP-complet.