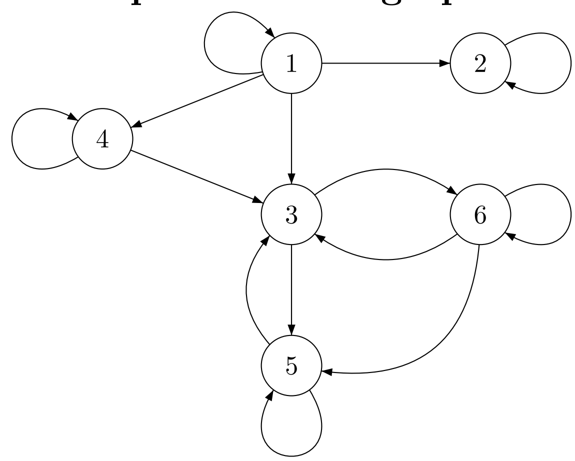
Algorithmique — M1
TD 1 : Graphes et représentations

1 Trois façons de représenter un graphe



Exercice 1 : Donner une représentation du graphe ci-dessus au moyen d'une liste d'adjacence, puis au moyen d'une matrice d'adjacence.

Considérons un graphe $G = (V, E)$ sans boucle triviale. On appelle matrice d'incidence du graphe G, la matrice à $|V|$ lignes et $|E|$ colonnes, $B = (b_{i,j})$ définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si l'arête } j \text{ part du sommet } i \\ 1 & \text{si l'arête } j \text{ arrive dans sommet } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2 : Donner une représentation du même graphe (ci-dessus) en matrice d'incidence. Quels problèmes rencontre-t-on ?

Exercice 3 : Proposer un algorithme de construction de la matrice d'incidence à partir de la liste d'adjacence d'un graphe, puis à partir de sa matrice d'adjacence.

Exercice 4 : Si B^T désigne la transposée de B, que représente la matrice BB^T ?

2 Algorithmique sur chacune des représentations

Exercice 5 : Dans chacune des trois représentations, quel temps faut-il pour déterminer si deux sommet u et v donnés sont voisins ?

Exercice 6 : Dans chacune des trois représentations, quel temps faut-il pour pour calculer le degré sortant d'un sommet ? Même question pour le degré entrant.

Exercice 7 : Ré-écrivez l'algorithme générique de parcours d'un graphe vu en cours de façon adaptée à chaque représentation. Quel est le temps d'execution, à chaque fois ?

Exercice 8 : Considérons un graphe orienté $G = (V, E)$. Un sommet v est un *puits universel*[1] s'il est de degré entrant $|V|-1$ et de degré sortant 0. Étant donnée une représentation d'un graphe $G = (V, E)$ par une matrice d'adjacence, proposer un algorithme permettant de déterminer s'il existe un puits universel.

3 Graphes et modélisation

Exercice 9 : Combien y a-t-il de circuits simples dans le graphe de sommets $V = \{v_i, s_i, t_i\}, i \in [0..n-1]$ et d'arcs $E = \{(v_i, s_i), (v_i, t_i), (s_i, v_j), (t_i, v_j)$ avec $j = 1 + i \ mod \ n\}, i \in [0..n-1]$?

Exercice 10 : Un passeur se trouve au bord d'une rivière avec un loup, une chèvre et une salade. Comme vous le savez probablement, les loup mangent les chèvres mais pas les salades, les chèvres mangent les salades mais pas les loups, et les salades ne mangent personne. Dans sa barque, le passeur ne peut transporter qu'un seul des trois protagonistes à la fois. Lorsqu'il est dans sa barque ou sur la rive opposée, il ne peut empêcher de carnage alimentaire. On souhaite savoir s'il peut amener, sains et saufs, de l'autre côté de la rive le loup, la chèvre et la salade. Si cela est possible, combien de traversées sont nécessaires ?

Pour répondre à ce problème, vous en donnerez une modélisation par un graphe, et le reformulerez dans ce cadre.

Exercice 11 : Des étudiants A, B, C, D, E et F doivent passer des examens dans différentes disciplines, chaque examen occupant une demi-journée :

- Algorithmique : étudiants A et B.
- Compilation : étudiants C et D.
- Bases de données : étudiants C, E, F et G.
- Java : étudiants A, E, F et H.
- Architecture : étudiants B, F, G et H.

On cherche à organiser la session d'examen la plus courte possible.

Pour répondre à ce problème, vous en donnerez une modélisation par un graphe, et le reformulerez dans ce cadre.

4 Graphes euleriens

Exercice 12 : Un circuit eulérien dans un graphe orienté est un circuit qui passe exactement une fois par chaque arc. Soit G un graphe orienté sans sommet isolé. Démontrer que s'il existe un circuit eulérien dans G alors G est fortement connexe (il existe un chemin $u \rightsquigarrow w$ pour chaque couple de sommets u, w) et pour chaque sommet u $\deg^-(u) = \deg^+(u)$ (les degrés sortant et entrant sont égaux).

Exercice 13 : Inversement, supposant que G est un graphe fortement connexe et pour chaque sommet u, $\deg^-(u) = \deg^+(u)$. Comment trouver dans ce graphe un cycle simple ? (Un cycle simple passe au plus une fois par un arc.)

Si on a déjà trouvé un cycle simple dans G alors qu'est-ce que nous pouvons dire de degrés entrant et sortant de chaque sommets du graphe H obtenu à partir de G en supprimant dans G tous les arc de ce cycle ? Démontrer que G possède un circuit eulérien, donner un algorithme permettant de trouver ce circuit.

---

[1] puits veut dire de degré sortant zéro, et universel qu'il voit tout le monde

1 Trois façons de représenter un graphe

En listes : 1 : (1,2,3,4) ; 2 : (2) 3 : (5,6)
4 : (4,3) ; 5 : (5,3) 6 : (6,5,3)
Bien sûr, il s'agit en fait de listes chaînées !

En matrice d'adjacence (zéros omis pour plus de clarté)

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1		
2		1				
3					1	1
4			1	1		
5			1		1	
6			1		1	1

Correction 2 : On rencontre deux difficultés :
- Les arêtes n'ont pas de nom ; il faut en donner
- Les boucles ! On décide de mettre *pour cet exercice seulement* un 2 en $b_{u,e}$ dans la matrice d'incidence, si e est une boucle autour du sommet u. Notons qu'on étend ainsi la définition standard.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	-1	-1	-1										
2		1			2									
3			1			-1	-1		1		1			1
4				1				2	-1					
5						1				2	-1		1	
6							1					2	-1	-1

Correction 3 :

Pour construire la matrice d'incidence : tout d'abord on détermine sa taille et pour cela on compte le nombre d'arêtes du graphes. Ensuite, pour chaque arête on remplit la matrice (qui est au départ initialisé à 0). Cas des listes d'adjacence :

```
Entrée: tableau de liste d'adjacence E de taille $n$

Variables:  entier i initialisé à 0
            sommet x,y

Début:
    Pour x de 1 à n faire
        Pour tout voisin de y de x faire
            i++
        fin du pour
    fin du pour

    B = matrice de taille n*i

    i=0
    Pour x de 1 à n faire
        Pour tout voisin de y de x faire
            i++
            B(x,i)=-1
            B(y,x)=1
        fin du pour
    fin du pour
Fin.
```

Cas des matrices d'adjacence :

```
Entrée: matrice d’adjacence M de taille $n$
Variables:  entier i initialisé à 0
            sommet x,y

Début:
    Pour x de 1 à n faire
        Pour tout y de 1 à n faire
            si M(x,y)=1 faire
                i++
            fin du si
        fin du pour
    fin du pour

    B = matrice de taille n*i
    i=0
    Pour x de 1 à n faire
        Pour tout y de 1 à n faire
            si M(x,y)=1 faire
                i++
                B(x,i)=-1
                B(y,x)=1
            fin du si
        fin du pour
    fin du pour
Fin.
```

Correction 4 :
La matrice $M = BB^T = (m_{i,j})$ est carré de taille n. De plus :
- Pour tout $i \neq j$, $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{nb_{aretes}} b_{i,k} b_{j,k}$ vaut le nombre d’arêtes existant entre les sommets i et j (indépendamment de l’orientation)
- Pour tout i, $m_{i,i} = \sum_{k=1}^{nb_{aretes}} b_{i,k} b_{i,k}$ vaut le degré de i.

2 Algorithmique sur chacune des représentations

Correction 5 :
- Listes : $O(d^+(x))$ (on parcours la liste de u à la recherche de v)
- Matrice d’adjacence : $O(1)$ (simple accès à $E_{u,v}$)
- Matrice d’incidence : $O(m)$ (pour toute arête i on teste b_{ui} et b_{vi} qui doivent être non-nuls tous les deux)

Correction 6 : Degré sortant :
- Listes : $O(d^+(x))$ (taille d’une liste, standard)
- Matrice d’adjacence : $O(n)$ (compter les 1 dans la $u$ème ligne de la matrice)
- Matrice d’incidence : $O(m)$ (on compte pour toute arête i les b_{ui} valant 1)

Degré entrant :
- Listes : $O(m)$ (il faut parcourir toutes les listes et compter les listes où u apparaît)
- Matrice d’adjacence : $O(n)$ (compter les 1 dans la $u$ème col de la matrice)
- Matrice d’incidence : $O(m)$ (on compte pour toute arête i les b_{ui} valant -1)

Correction 7 : Seule la ligne “pour tout voisin v de u” est à réécrire

– Listes :
```
C = u.tete
Tant que C != null
   v = C.val
   ... // calcul sur v
Fin tant que
```
Se fait en $O(d^+(u))$ pour chaque sommet u. Chaque sommet est vu une fois. On est donc en $O(n+m)$ EN TOUT.

– Matrice d'adjacence :
```
Pour v de 1 a n
  Si E(u,v) = 1
   ... // calcul sur v
  Fin si
Fin pour
```
Se fait en $O(n)$ pour chaque sommet u donc $O(n^2)$ en tout.

– Matrice d'incidence : Pour e de 1 a m Si b(u,e) = 1 // u origine de e, cherchons la destination Pour v de 1 a n Si b(v,e) = -1 ... // calcul sur v Fin si Fin pour Fin si Fin pour
La complexité est immonde : $O(nm)$ pour chaque sommet u donc $O(n^2m^2)$ en tout.

Correction 8 : i est un puits universel si et seulement si dans la matrice la ligne i ne contient que des 0 et la colonne i ne contient que des 1 sauf à l'intersection de la ligne i. On peut donc tester de façon exhaustive, ce qui prend un temps quadratique en $|V|$.

3 Graphes et modélisation

Correction 9 : 2^n, le graphe se dessine comme un cycle de losanges. Les cycles contiennent tout les v_i, et à chaque fois, pour passer de l'un à l'autre il y a 2 possibilités, soit par le haut, soit par le bas. Bref n choix binaires à faire.

Correction 10 :

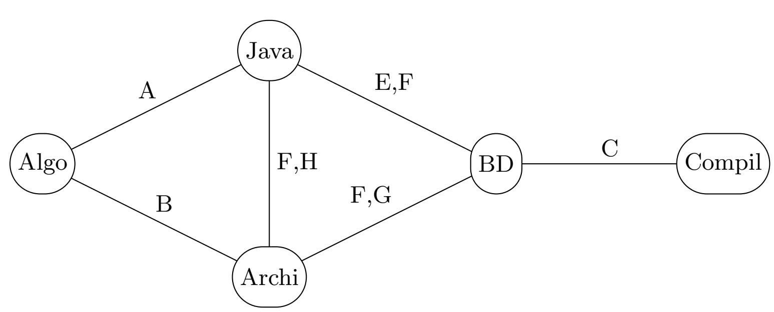
On construit un graphe correspondant à l'évolution du système. Il suffit alors de regarder s'il y a un chemin de la configuration initiale à la configuration finale.

On a le graphe (non orienté) page suivante.

Correction 11 :

On construit un graphe (non orienté ici) dans lequel chacune des disciplines par un sommet, et relier par des arêtes les sommets correspondant aux examen incompatibles (ayant des étudiants en commun)

Il s'agit alors de colorier chacun des sommets du graphes en utilisant le moins de couleurs possible, des sommets voisins ne pouvant être de la même couleur. Ici trois couleurs suffisent, et on ne peut faire mieux. Le problème est dans le cas général NP-complet, donc dur !



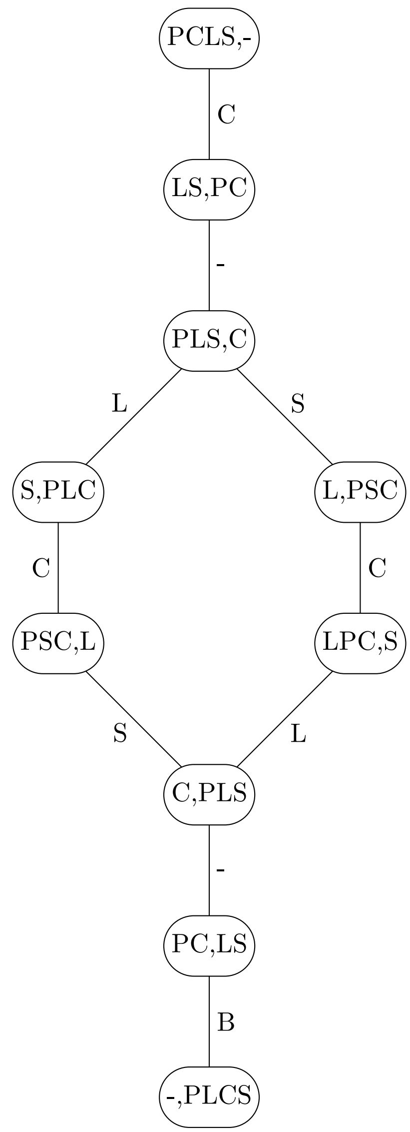


Fig. 1 – Corrigé de l'exercice 7

4 Graphes euleriens

Correction 12 : Il suffit de montrer que le circuit passe par tous les sommets. Si ce n'était pas le cas, il existerait un sommet incident à aucun arc (puisque le circuit les contient tous) donc isolé.

Le circuit "rentre" autant de fois dans un sommet qu'il en sort (loi des nœuds) donc les degrés entrants et sortants sont les mêmes.

Correction 13 : Remarquons que tout graphe simplement connexe avec $\deg^-(u) = \deg^+(u)$ est fortement connexe.

Toute marche dans un tel graphe revient au point de départ. En effet, une marche qui "grille" les arêtes déja vues maintient la propriété de l'égalité des degrés, sauf pour le sommet de départ. Le sommet de départ est toujours accessible, car on ne si on deconnecte (simplement) le graphe la marche est dans la composante qui le contient (elle a franchi un nombre pair de fois la frontière).

Dès qu'on a bouvclé une marche, il suffit d'n recommencer une en partant d'un sommet du sycle ayant des arcs non-grillés : on reviendra à ce sommet et on a ainsi agrandi le cycle.