



*Keio University*

*2-15-15 Mita, Minato-ku,  
Tokyo 108-8345, Japan*

*Tel : +81-3-3453-4511*

*Fax : +81-3-3427-1578*

Report on "Méthodes Sémantiques en Dédution Modulo" submitted by  
Mr. Olivier Hermant

Reporter: Mitsuhiro Okada, Professor, Department of Philosophy, Keio University

Overall themes and purposes of the thesis:

Studies on logical deduction systems for a combined framework of a logical deductive system with equational (rewrite) non-logical computational axioms (where equations are extended to a certain propositions level) are very important from both the theoretical view point and the practical view point. The setting of Deduction Modulo is important in this respect. The thesis aims at the basic research of the semantics. This thesis investigated in a semantical method for the Deduction Modulo, with the special focus on the cut-elimination theorem and the related theories.

This field (combination of the ideas of a cut-free proof-search space and rewriting computation) is important to consider a computational aspect of deduction systems, and the semantic framework provided by this thesis as a basic tool is very contributing.

The overall evaluation of the thesis.

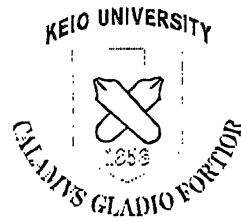
The results on the semantical research on logical deductions modulo a certain equational (rewrite) axioms are steady and original, and the thesis content satisfies the criteria of positive consideration for the French doctoral degree.

The thesis results have showed many potentials of the practical uses based on the results, and have opened many promising directions of further investigations of the theoretical fields. I, as a thesis reporter, strongly support this thesis.

Minor comments and suggestions for future work.

Proofs of cut-elimination through Kripke semantics itself is not new since such ideas has been investigated since the 60s, for example by Schutte. (A detailed and well known presentation of such a proof was given in the standard textbook of proof theory,

1/3



*Keio University*

*2-15-15 Mita, Minato-ku,  
Tokyo 108-8345, Japan*

*Tel : +81-3-3453-1511*

*Fax : +81-3-5427-1578*

Takeuti, 1975. (A most natural completeness proof of intuitionistic sequent calculus with respect to Kripke semantics leads to "completeness of the cut-free sequent calculus", including the intuitionistic logic (with a little syntactic trick), as presented in the text book. Hence by combining with the Kripke's original soundness of intuitionistic logic in the early 60s, there is an obvious cut-elimination proof through Kripke semantics.

The significance of this thesis work is, therefore, more related to the additional framework with a certain form of ground equational or rewriting axioms, rather than the Kripke semantic cut-elimination proof itself. The conditions of cut-elimination for Deduction Modulo has been investigated in former works, eg. Dowek—Werner, Dowek—Hardin—Kirchner, etc. and in the former works (ENAR-group's work). The thesis succeeded in developing a new methodology of these, especially, a direct semantical treatment. The semantic consolidation by this thesis has added the additional grounds on the field.

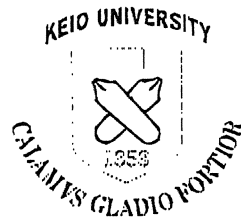
Naming of some notions might need to be re-considered in the future work; the namings such as A-consistency and A-completeness sound like consistency and completeness as special cases, but in fact the notions are specific-syntax-dependent; they heavily depend on the specific formulation of syntax.

The author's treatment of higher order cut elimination proof essentially uses Takahashi—Prawitz method which is based on Schutte's idea of extending the semivaluation to a model construction. I would like to note that Takahashi and Prawitz method is actually based on Tait's work where Tait succeeded in the second order case based on the Schutte's proposed paradigm, (although the thesis does not mention the Tait break-through contribution).

It was not so clear for the reviewer why the author's emphasis on saying modulo "rewritings", instead of modulo (some restricted) propositional "equations", since the reflexive and symmetric extensions " $=_R$ " is often used (which means a certain equality). Although the use of rewriting is central on the implementation level, the theoretical basis could be explained on the equational level separately.

As for the comment of the author toward the "normalization" theorem at the very end of the thesis; It is not so obvious to the reviewer that his methods could be expended to

2/3



*Keio University*

*2-15-45 Mitu, Minato-ku,  
Tokyo 108-8345, Japan*


*Tel : +81-3-3453-4511*

*Fax : +81 3 5427-1578*

normalization proofs. The reviewer has some doubt especially because it is well know that there is a technical gap between the Tait–Takahashi–Prawitz method of 60's (which worked for cut-elimination theorem (existence theorem of normal proofs), on which some part of the author's semantic technique essentially depends (including the higher order cases), and Tait–Girard (–Martin-Lof–Prawitz) method of mainly 70's (which worked not only for cut-elimination theorem (the existence theorem) but also for the weak and strong normalization theorems, to which some other semantic treatment such as phase semantics are more closely related. It should not be ignored the novelty of the Tait (for the first order logics, or equivalently typed lambda calculi) –Girard (for the higher order logics, or equivalently, strongly polymorphic typed lambda calculi), compared with the Tait–Takahashi–Prawitz's traditional semantic treatment (extension of semi-valuation and Henkin construction), due to Henkin (just for completeness)–Schutte (for cut-elimination). So, the reviewer would need to wait for the author's future work to see if his further work on this direction.

A theoretical question for a future work could include to study the question if one could extend a proof-theory and semantics with a wider range of equation axioms and a direct treatment of such equational axioms in the formal language to really combine the original deduction system with the additional equation systems in the same language, rather than the equation system as a meta-system outside the deduction system. There should be no difference if one keeps the strong restriction such that the equational rules are ground (closed). But, if one relaxes this restriction, the combined system becomes a deduction system with some strong equality (which would have a predicate logic with equality as a part, of course).

It might be interesting if the author could compare and analyze other results related combining logic and rewriting rules into one integrated computation model; for example, various works on combining a type system and a rewriting system since early 90's, initiated by Tannen –Mayer and by Jouannaud –Okada (eg. Blanqui –Jouannaud –Okada, TCS 2003).

  
Mitsuhiro Okada

3/3

Computing Science  
Thierry Coquand  
Professor

## Rapport sur la thèse d' Olivier Hermant

### Introduction

Un des buts principaux de ce travail est d'analyser, par des méthodes sémantiques, la propriété d'élimination des coupures pour des extensions du calcul des prédicats en Dédution Modulo.

Ceci est assez bien compris pour le calcul des prédicats usuels. On oppose d'habitude les approches de Gödel et de Henkin pour les preuves de complétudes. Toutes les deux approches reposent sur deux lemmes du genre

(1) Si  $A$  n'est pas prouvable, alors il existe un ensemble  $K$  ayant la propriété  $P$  tel que la formule non  $A$  soit dans  $K$

(2) Tout ensemble ayant la propriété  $P$  est satisfaisable

Mais elles diffèrent sur la propriété  $P$ : pour Gödel,  $K$  contiendra seulement des sous-formules de non  $A$  alors que pour Henkin,  $K$  pourra contenir des formules quelconques. De plus, pour Gödel, dans le point (1), il suffira d'avoir que  $A$  n'est pas prouvable sans coupures. Cet aspect important de l'approche de Gödel 1930 (et auparavant de Skolem 1922) a été mis en évidence à travers les travaux de Beth, Kanger, Schütte, Prawitz. On obtient ainsi une approche "sémantique" pour montrer la propriété d'élimination des coupures: si  $A$  est prouvable avec coupure,  $A$  est valide, et donc, par complétude "forte",  $A$  est prouvable sans coupure. C'est par exemple en suivant cette méthode que l'élimination des coupures pour la logique du second-ordre (conjecture de Takeuti) a d'abord été démontrée par Tait 1966. La preuve de Henkin est présentée dans la plupart des livres de logique, par exemple de livre de Cori et Lascar, car elle semble plus élégante que l'approche de Gödel. Toutefois, elle fournit un résultat un peu plus faible puisque qu'elle ne fournit la complétude "faible" que pour le calcul avec la règle de coupure.

En commençant cette thèse, je m'attendais à ce que l'auteur suive l'approche "à la Gödel" et l'adapte pour la Dédution Modulo (où l'on ajoute des règles de réécritures au calcul des prédicats, règles qui peuvent être complexes, car on peut réécrire non seulement des termes mais aussi des propositions). Mais l'auteur présente à la place une variante originale et intéressante de l'argument de Henkin qui donne la complétude forte. L'idée est de remplacer prouvabilité par prouvabilité sans coupure, et d'adapter la notion de théorie complète utilisée par Henkin dans ce cadre. On arrive ainsi à combiner l'élégance de cette approche avec un résultat de complétude forte. Le prix à payer est qu'il faut montrer un lemme d'inversion (qui généralise un résultat de Kleene). On obtient alors une méthode d'attaque qui permet de montrer la complétude forte avec des règles de réécritures non triviales, et qui s'adapte aussi au calcul des séquents intuitionnistes.

### Description Générale

La première partie contient une description claire du calcul des séquents (classiques et intuitionnistes) et de la Dédution Modulo.

La deuxième partie présente la variation de la preuve de Henkin qui sera utilisée par la suite. C'est une

CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY  
GÖTEBORG UNIVERSITY  
Computing Science  
SE-412 96 Göteborg, SWEDEN  
Visiting address: Ekandagatan 88  
Telephone: +46-(0)31 772 1035 Fax: +46-(0)31 18 58 58  
Chalmers tekniska högskolan AB, Reg. No: 556478-5598, VAT No. SE556478559801  
www-address: <http://www.md.chalmers.se/~petard> E-mail: [petard@cs.chalmers.se](mailto:petard@cs.chalmers.se)



variation non triviale: par exemple, il n'est pas du tout clair a priori ce que doit devenir la propriété de complétude (pour tout  $A$  on a  $A$  dans  $T$  ou non  $A$  dans  $T$ ) utilisée par Henkin. Elle devient ici: pour tout  $A$  soit la formule  $A$  est dans  $T$  soit on peut montrer sans coupure une contradiction à partir de  $T, A$ . Pour pouvoir utiliser cette définition il faut montrer un lemme technique sur la notion de prouvabilité sans coupure, lemme qui avait été montré par Kleene dans le cas du calcul des prédicats purs. Cette deuxième partie présente aussi une preuve élégante d'un théorème de conservativité d'introduction de symboles de fonctions pour le calcul intuitionniste. Cette preuve marche si l'on a la propriété de complétude par rapport aux modèles de Kripke, et donc s'adapte au cas Dédution Modulo qui ont cette propriété.

La troisième partie est le coeur de la thèse et présente diverses preuves sémantiques d'élimination des coupures, correspondant à des conditions différentes sur la théorie équationnelle que l'on ajoute au calcul des prédicats. L'hypothèse la plus simple est, outre la confluence, une condition de bonne fondation. Une autre hypothèse demande en plus de la confluence une condition de positivité. La méthode s'adapte au cas du calcul des séquents intuitionnistes. L'auteur montre aussi comment traiter la logique d'ordre supérieure dans ce cadre (on ne peut pas appliquer toutefois les résultats précédents). Finalement, le dernier chapitre de cette partie compare la propriété de normalisation à celle, purement existentielle, d'existence d'une preuve sans coupure à partir d'une preuve donnée. Il présente un exemple intéressant de logique en Dédution Modulo qui ne normalise pas, mais pour lequel on peut montrer que si un séquent est prouvable, alors il admet aussi une preuve sans coupure.

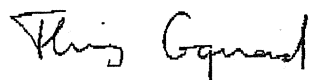
La quatrième partie étudie les connections entre cette approche et le système ENAR, un système de résolution étendu avec des règles de réécriture, et montre que ce système correspond bien au fragment du calcul des séquents sans coupure.

La conclusion présente différentes perspectives sur ce travail. Tout d'abord, la méthode de preuve, comme pour la preuve de Henkin, repose sur un procédé de complétion qui n'est pas constructif. On peut se demander quel est le contenu calculatoire de cet argument. L'auteur fait la remarque très pertinente qu'une adaptation constructive rapprochera cet argument de la méthode des tableaux, et des modèles de Beth. L'adaptation de l'approche à la Beth-Kanger-Schütte (peut-on étendre une branche infinie en une semi-évaluation?), que j'ai décrite plus haut, est mentionnée aussi comme un thème de recherche futur. Je pense en effet que c'est une direction naturelle de comparer l'approche de cette thèse avec cette approche plus traditionnelle (dans le cas du calcul des prédicats pur). Une question qui se pose aussi est le rapport entre cette approche et la "normalisation par évaluation", qui peut être vu comme le contenu calculatoire de la méthode de reductibilité, d'abord dans le cas intuitionniste, puis classique. L'exemple du chapitre 8 doit être analysé dans ce cadre. Contrairement à l'auteur, je pense que la construction d'une preuve de sans coupure à partir d'une preuve donnée implicite dans l'argument classique dépend en général de la preuve donnée, surtout si on part d'une preuve à la Schütte, mais c'est une question extrêmement intéressante. Finalement, je pense que l'approche doit être comparée aussi aux preuves d'élimination des coupures mentionnées dans l'article récent de J. Avigad "Forcing in Proof Theory", *Bulletin of Symbolic Logic* 10, 2004.

## Conclusion

Les motivations de cette thèse sont claires, et j'ai trouvé sa rédaction agréable à lire et très vivante. Les résultats obtenus sont non triviaux, et soulèvent des questions naturelles pour des travaux à venir. Tout ceci constitue donc un très bon travail de recherche qui justifie largement l'obtention d'une thèse.

A Göteborg,



Thierry Coquand  
Professor of Computing Science