

# Calculabilité et complexité

## Cours n° 3

**Nicolas (Miki) Hermann**

LIX, École Polytechnique

`hermann@lix.polytechnique.fr`

Nous savons que  $C = \text{co}C$  pour les classes  $C$  déterministes. Etant donné que  $\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$ , la classe **coNPSPACE n'existe pas** non plus. Le théorème de Savitch ne règle pas la question de **NL** versus **coNL**.

## Théorème [Immerman-Szelepcsényi]

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  avec  $|V| = n$  et un sommet  $x \in V$ , le **nombre de sommets accessible** dans  $G$  à partir de  $x$  peut être calculé par une machine de Turing **non-déterministe** en **espace  $\log n$** .

## Théorème [Immerman-Szelepcsényi]

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  avec  $|V| = n$  et un sommet  $x \in V$ , le **nombre de sommets accessibles** dans  $G$  à partir de  $x$  peut être calculé par une machine de Turing **non-déterministe** en **espace  $\log n$** .

## Preuve :

Quatre boucles imbriqués.

Soit

$$S(k) = \{v \in V \mid v \text{ est accessible de } x \text{ par un chemin } p \text{ avec } |p| \leq k\}$$

## Preuve du théorème Immerman-Szelepcsényi (cont 1)

Boucle n° 1 calcule successivement les valeurs  $|S(1)|, \dots, |S(n-1)|$ .  
La valeur  $|S(n-1)|$  est la réponse de l'algorithme.

```
 $|S(0)| \leftarrow 1$   
for  $k \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do  
    calculer  $|S(k)|$  à partir de  $|S(k-1)|$   
od  
return( $|S(n-1)|$ )
```

## Preuve du théorème Immerman-Szelepcsényi (cont 2)

Boucle n° 2 calcule la valeur  $|S(k)|$  pour un  $k$  donné.

```
 $\ell \leftarrow 0$   
forall  $u \in V$  do  
  if  $u \in S(k)$  then  $\ell \leftarrow \ell + 1$  fi  
od  
return( $\ell$ )
```

## Preuve du théorème Immerman-Szelepcsényi (cont 3)

Boucle n° 3 décide le prédicat  $u \in S(k)$  en réutilisant l'espace.

Soit  $G(u, v) = (u \equiv v) \vee (u, v) \in E$ .

$m \leftarrow 0$

$reponse \leftarrow \text{NO}$

**forall**  $v \in V$  **do**

**if**  $v \in S(k-1)$  **then**  $m \leftarrow m + 1$  **fi**

**if**  $(v \in S(k-1)) \wedge G(u, v)$  **then**  $reponse \leftarrow \text{YES}$  **fi**

**od**

**if**  $m < |S(k-1)|$  **then** return(NO) **else** return( $reponse$ ) **fi**

## Preuve du théorème Immerman-Szelepcsényi (cont 4)

Boucle n<sup>o</sup> 4 décide le prédicat  $v \in S(k - 1)$  par une machine **non-déterministe** travaillant en **temps  $\log n$** .

```
 $w_0 \leftarrow x$   
for  $p \leftarrow 1$  to  $k - 1$  do  
  choisir  $w_p \in V$   
  if  $\neg G(w_{p-1}, w_p)$  then return(NO) fi  
od  
if  $w_{k-1} == v$  then return(YES) else return(NO) fi
```

## Preuve du théorème Immerman-Szelepcsényi (fin)

La machine de Turing non-déterministe  $M$  maintient des rubans de travail pour les valeurs de  $k$ ,  $|S(k-1)|$ ,  $\ell$ ,  $u$ ,  $m$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $w_p$  et  $w_{p-1}$ . Tous ces entiers sont augmentés de 1 et comparés. La valeur de chaque une de ces variables (de chaque ruban de travail) est bornée par  $n$ , donc la longueur est bornée par  $\log n$ .  $\square$

## Corollaire 1

Pour toute fonction de complexité  $f(n) \geq \log n$

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{coNSPACE}(f(n))$$

## Corollaire 1

Pour toute fonction de complexité  $f(n) \geq \log n$

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{coNSPACE}(f(n))$$

## Preuve :

Supposons que le langage  $L \in \text{NSPACE}(f(n))$  est décidé par une machine non-déterministe  $M$  travaillant en espace  $f(n)$ . Nous allons construire un machine de Turing non-déterministe  $\bar{M}$ , travaillant un espace  $f(n)$ , qui décide  $\bar{L}$ . La machine  $\bar{M}$  avec le mot  $x$  travaille sur le graphe de configuration  $G(M, x)$ .

# Espace non-déterministe est clos par complément

## Preuve (cont)

La machine  $\bar{M}$  travaille sur le graphe  $G(M, x) = (V, E)$  ainsi.

```
w ← (START, ▷, x, ε, . . . , ε)
ℓ ← 0
while ℓ < |S(n - 1)| ∧ state(w) ≠ YES do
  choisir u ∈ V
  if (w, u) ∉ E then return(NO) fi
  if ∃k u ∈ S(k) ∧ state(u) == YES then return(NO) fi
  ℓ ← ℓ + 1
  w ← u
od
if state(w) ≠ YES ∧ ℓ == |S(n - 1)|
then return(YES) else return(NO) fi
```

Il est maintenant évident que  $L(\bar{M}) = \bar{L}$  et la machine non-déterministe  $\bar{M}$  travaille en **espace**  $f(n)$ . □

## Corollaire 2

$$NL = coNL$$