

Quelques problèmes d'intérêt

Eric Goubault

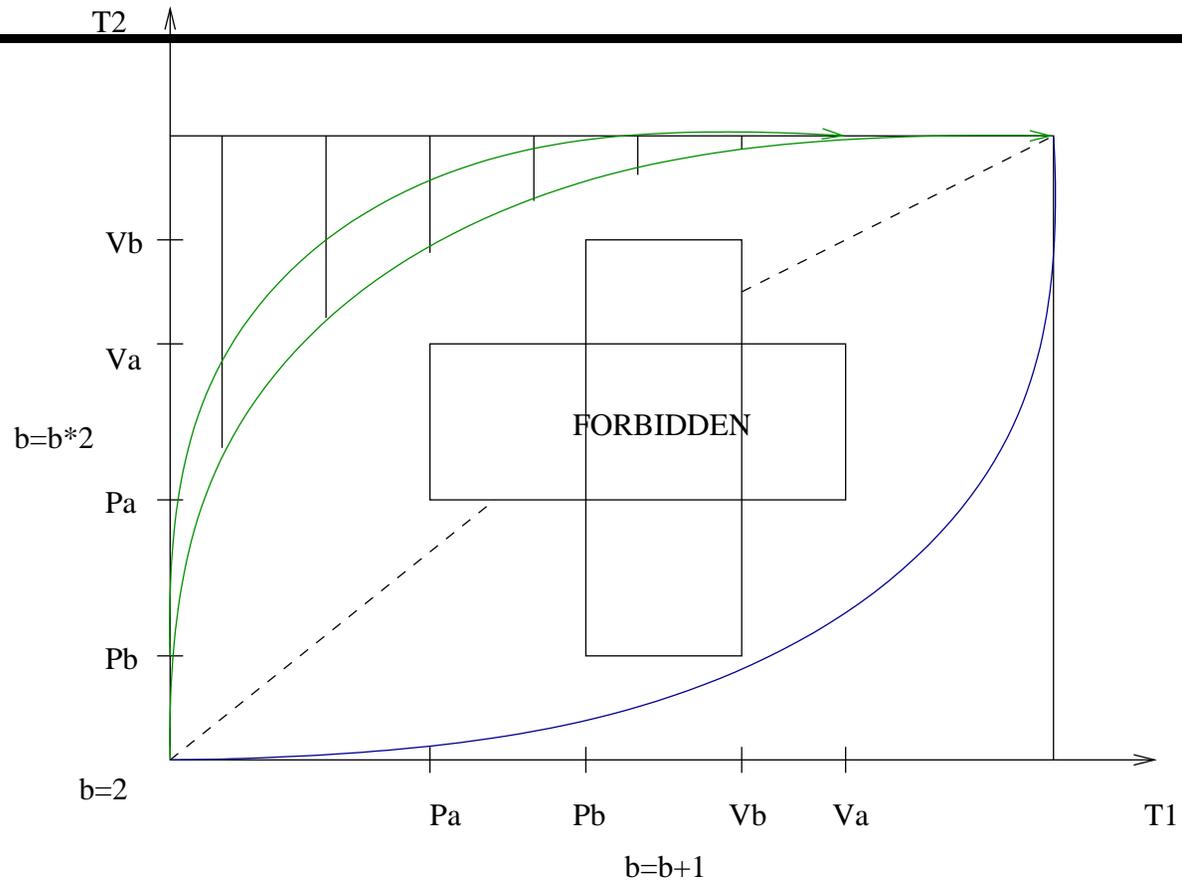
CEA Saclay & PPS

Le 27/11/03, AS "Topologie Algébrique..."

$\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_0$ dirigés

Le problème est de pouvoir calculer les invariants essentiels d'un système parallèle ou distribué, que sont $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_0$

Explication



T2 gets a and b before T1 does: b=5!

Voir mon exposé.

Reécriture

(cf. Paul-André Méliès)

Rapports entre le transparent précédent, et la théorie des résidus des ARS de Paul-André. Voir mon exposé.

Catégorie Flow

(cf. Philippe Gaucher)

- Notion de machine parallèle “universelle”? (classification des CW-complexes globulaires à équivalence d’homotopie forte par exemple) Le langage correspondrait au collage inductif de n -cellules
- Traduction des paradigmes classiques du parallélisme dans Flow, avec une “préservation” des observations modulo déformation (cf. relation d’indépendance induite dans tous les modèles du vrai parallélisme)
- Calculs?

Homologie de Baues-Wirshing

(cf. Daniel Guin, Philippe Malbos, Emmanuel Haucourt)

Permet de définir de meilleurs invariants homologiques? L'idée est la suivante:

- Les coefficients dans l'homologie sont des "filtres" à l'observation des invariants homotopiques
- Exemple, homologie classique, avec coefficients dans Z : des éléments de $H_1(X)$ sont des cycles modulo des bords (trous), représentés comme des sommes formelles dans une algèbre associative et *commutative*
- Systèmes de coefficients plus compliqués, *locaux* qui permettraient d'avoir des invariants *dirigés* plus fins.

Catégories modèles en sémantique

Modèle [discret]	complexes combinatoires
Modèle [continu]	espaces topologiques
Relation discret/continu	réalisation géométrique
Composition parallèle	produit
Raffinement d'action	subdivision
Compositionalité	Seifert/van Kampen
Points morts/atteignabilité	composantes connexes
Ordonnements	groupe fondamental
Equivalence observationnelle	équivalence d'homotopie (faible/forte)
Propriétés calculables	invariants topologiques (homologie etc.)

Catégories modèles

Permettent de résoudre le problème d'“équilibre” suivant:

- “Suffisamment gros”: Trouver une catégorie de “modèles” avec toutes les bonnes constructions catégoriques (au moins complète et co-complète), contenant au moins certains modèles raisonnables (variétés topologiques, CW-complexes etc.)
- “Suffisamment petit”: On doit pouvoir avoir une “équivalence observationnelle” raisonnable sur cette catégorie - équivalence d'homotopie faible et forte

Exemples

- (CW-complexes \subseteq espaces topologiques).
 - Les CW-complexes ne sont pas “pathologiques”: topologie simple, construction inductive, cellules par cellules etc.
 - Tout espace topologique est faiblement équivalent à un CW-complexe. Le foncteur “remplacement cofibrant” élimine les pathologies topologiques pour donner un CW-complexe faiblement équivalent.
- (Espaces simpliciaux de Kan \subseteq espaces simpliciaux).
 - $X \rightarrow S(| X |)$ est un remplacement cofibrant dans les espaces simpliciaux
 - $X \rightarrow | S(X) |$ est un remplacement cofibrant dans les espaces topologiques

Notion de générateurs de la théorie homotopique

- Co-complétion de $\Delta \rightarrow$ espaces simpliciaux
- Co-complétion de CW-complexes, *en conservant certaines des co-limites existantes* \rightarrow espaces topologiques
- Co-complétion de la catégorie des boules ouvertes de R^n et des fonctions continues entre ces boules \rightarrow espaces topologiques
- La théorie homotopique (*notion d'observation*) étant uniquement générée par: $\text{hocolim} U_{\bullet} \rightarrow X$ and $X \times I \rightarrow X$ sont des équivalences faibles

Deux façons de donner un sens à cela (cf. Dan Dugger)

- construction à partir de faisceaux de Grothendieck (à la Morel-Voevodsky)
- construction à partir de préfaisceaux simpliciaux ($sSet^{C^{op}}$) à la Bousfield-Kan

Qu'en est-il de?

- catégories modèles en sémantique dénotationnelle?
- travaux de Winskel sur les prefaisceaux: co-complétion, mais pas de préservation de limites existantes. Construction d'une équivalence observationnelle en sus. "Théorie des domaines"
- catégories modèles sur des espaces combinatoires (cubiques, à la Jardine)? sur des variétés topologiques ordonnées?

Homologie de Barr-Beck sur des adjonctions pas avec Set

- D'une adjonction, $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ adjoint à droite de $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, on en déduit une monade $U \circ F$ sur \mathcal{D} et une comonade $F \circ U$ sur \mathcal{C} .
- D'une monade on en déduit un ensemble co-simplicial (augmenté).
- Classiquement, étant donné un objet en groupe abélien dans \mathcal{C} , on en déduit une homologie dans \mathcal{C} . (cf. coefficients plus généraux - Baues-Wirshing).

Barr-Beck

- La monade $T = U \circ F$ induit sur la catégorie d'Eilenberg-Moore de T -algèbres une paire de foncteurs adjoints $F^T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^T$ à gauche de $U^T : \mathcal{D}^T \rightarrow \mathcal{D}$. C'est une paire de foncteur libre/oubli.
- Les foncteurs F et U induisent un foncteur $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^T$ par $U^T \circ \Phi = U$ et $F^T = \Phi \circ F$.
- Une adjonction est monadique si Φ est une équivalence de catégorie.

Barr-Beck

Quand l'adjonction est monadique l'homologie de Barr-Beck s'interprète en dimension 0 et en dimension 1 comme suit:

- $H^0(X, Y)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(X, Y)$ (en tant qu'ensemble)
- $H^1(X, Y)$ est isomorphe à $PO(X, Y)$, qui est une catégorie de fibrés particuliers

Barr-Beck

~~$p : E \rightarrow B$ dans \mathcal{C} est Y -principal si~~

- Y opère sur E , c'est à dire que l'on a une transformation naturelle $\cdot : \mathcal{C}(\cdot, Y) \times \mathcal{C}(\cdot, E) \rightarrow \mathcal{C}(\cdot, E)$ vérifiant...
- L'opération de Y sur E est compatible avec p . C'est-à-dire que quelque soient $y : B \rightarrow Y, e : B \rightarrow E$, alors $p(y.e) = p(e)$
- Y opère transitivement, c'est-à-dire que si on a $e_0, e_1 : B \rightarrow E$ tels que $p(e_0) = p(e_1)$, alors il existe un unique morphisme $y : B \rightarrow Y$ tel que $y.e_0 = e_1$
- on a une section $s : U(X) \rightarrow U(E)$ dans la catégorie \mathcal{D} telle que $s.U(p) = U(X)$

avec les morphismes évidents, cela forme une catégorie $\underline{PO}(X, Y)$.
La composante connexe de $\underline{PO}(X, Y)$ est la catégorie $PO(X, Y)$.

Barr-Beck

(cf. Albert Burroni, Jean Goubault-Larrecq)

- On sait quand une adjonction est monadique quand $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathit{Set}$ en particulier (Lawvere, Linton). C'est quand \mathcal{C} est équationnelle sur Set .
- Quand sait-on que l'adjonction est monadique avec Grph , avec $\Delta^{op} \mathit{Set}$? A t-on des invariants plus fins dans ces cas?
- Cf. Jean Goubault-Larrecq - homologie venant d'adjonction sur la catégorie des ensembles simpliciaux.

Systemes distribués tolérants aux pannes à la Herlihy

- Problèmes ouverts (hierarchie, algos randomises etc.)
- Rapport avec la topologie dirigée (cf. mon exposé Alliance)
- Encore des adjonctions et des monades dans les ensembles simpliciaux (cf. mon exposé Alliance).