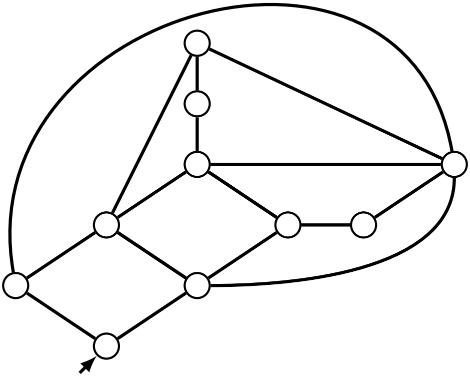
Une généralisation de la relation des quadrangulations sur les constellations et les hypercartes

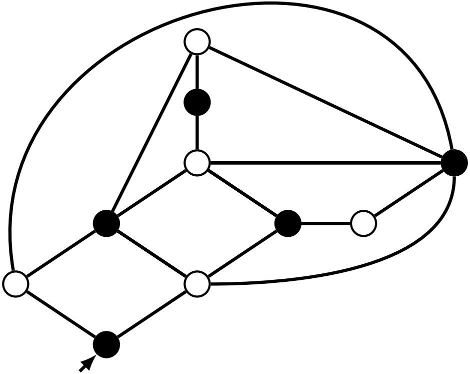
Wenjie Fang, LIAFA

Journée "Cartes"
6 février 2013, LIX, École Polytechnique

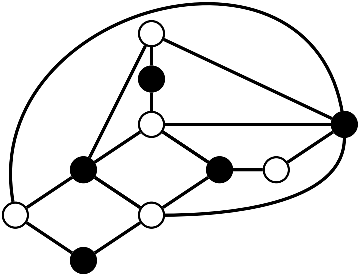
Une quadrangulation planaire



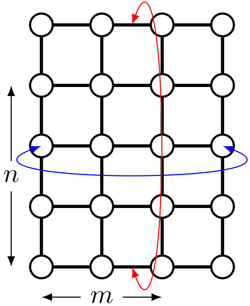
... est toujours bipartie.



Ce n'est plus vrai en genre supérieur.



Cas planaire



Cas $g = 1$ (un tore)

Relation des quadrangulations

On note $Q_n^{(g)}$ et $B_n^{(g,k)}$ le nombre des quadragulations (resp. biparties avec des sommets marqués) avec :

- n le nombre d'arêtes
- g le genre
- k le nombre de sommets noirs marqués

Théorème (La relation de quadrangulation (Jackson et Visentin, 1990))

On a alors la relation suivante.

$$Q_n^{(g)} = 4^g B_n^{(g,0)} + 4^{g-1} B_n^{(g-1,2)} + 4^{g-2} B_n^{(g-2,4)} \dots$$

Relation des quadrangulations

On note $Q_n^{(g)}$ et $B_n^{(g,k)}$ le nombre des quadragulations (resp. biparties avec des sommets marqués) avec :

- n le nombre d'arêtes
- g le genre
- k le nombre de sommets noirs marqués

Théorème (La relation de quadrangulation (Jackson et Visentin, 1990))

On a alors la relation suivante pour le cas **planaire***.*

$$Q_n^{(0)} = B_n^{(0,0)}$$

Relation des quadrangulations

On note $Q_n^{(g)}$ et $B_n^{(g,k)}$ le nombre des quadragulations (resp. biparties avec des sommets marqués) avec :

- n le nombre d'arêtes
- g le genre
- k le nombre de sommets noirs marqués

Théorème (La relation de quadrangulation (Jackson et Visentin, 1990))

On a alors la relation suivante.

$$Q_n^{(g)} = 4^g B_n^{(g,0)} + 4^{g-1} B_n^{(g-1,2)} + 4^{g-2} B_n^{(g-2,4)} \dots$$

Relation obtenue algébriquement, *sans* justification bijective.

Relation des quadrangulations

On note $Q_{n,D}^{(g)}$ et $B_{n,D}^{(g,k)}$ le nombre de cartes (resp. biparties avec des sommets marqués) avec :

- n le nombre d'arêtes
- g le genre
- k le nombre de sommets noirs marqués

Théorème (La relation de quadrangulation (Jackson et Visentin, 1990))

On a alors la relation suivante.

$$Q_{n,D}^{(g)} = 4^g B_{n,D}^{(g,0)} + 4^{g-1} B_{n,D}^{(g-1,2)} + 4^{g-2} B_{n,D}^{(g-2,4)} \dots$$

Ici D signifie que toute face doit être de degré $2d$ pour $d \in D$.

Notre généralisation, cas $m = 3$

Pour le cas $m = 3$, notons $H_{n,3,D}^{(g)}$ et $C_{n,3,D}^{(g,k_1,k_2)}$ le nombre de 3-hypercartes (resp. 3-constellations avec des sommets marqués) avec :

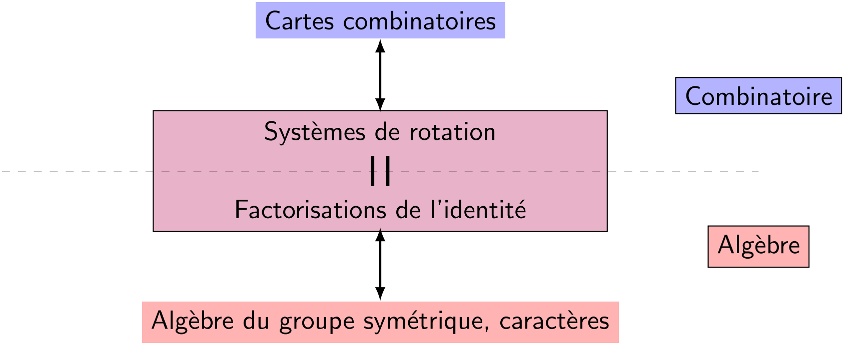
- n le nombre d'hyperarêtes
- g le genre
- k_i le nombre de sommets de couleur i marqués
- D la restriction sur le degré des hyperfaces

Théorème (Notre relation généralisée, cas $m = 3$)

On a alors la relation suivante.

$$H_{n,3,D}^{(g)} = \sum_{i=0}^{g} 3^{2g-2i} \sum_{l=0}^{2i} \frac{2^{l+1} - (-1)^{l+1}}{3} C_{n,3,D}^{(g-i,l,2i-l)}$$

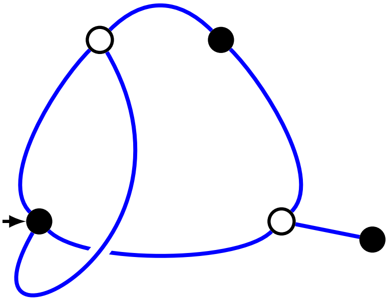
Approche algébrique



Exemple : Goupil et Schaeffer (1998), Goulden et Jackson (2008), Poulalhon et Schaeffer (2002), Goulden, Guay-Paquet et Novak (2012), etc...

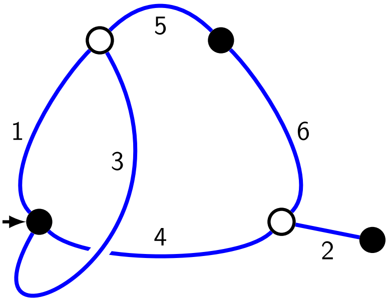
Qu'est-ce c'est une carte bipartie ?

Une **carte bipartie** est un graphe biparti connexe bien plongé dans une surface. On note n le nombre d'arêtes.

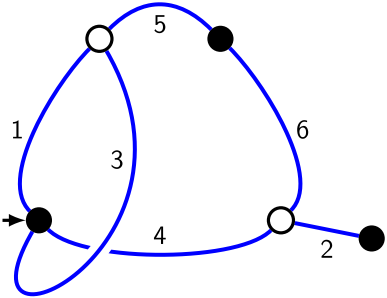


Système de rotation

Les arêtes sont étiquetées de 1 à n.



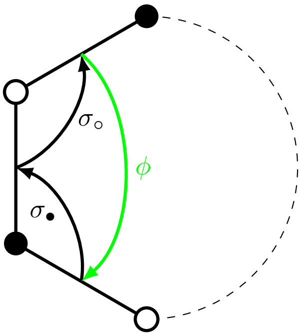
Système de rotation (suite)



- Sommets noirs
  $\sigma_\bullet = (1,3,4)(2)(5,6)$
- Sommets blancs
  $\sigma_\circ = (1,3,5)(2,6,4)$
- Faces
  $\phi = (1,6,2,3,4,5)$

On voit que $\sigma_\bullet \sigma_\circ \phi = id$.

Factorisation de l'identité



On a alors :

$$\sigma_\bullet \sigma_\circ \phi = id_n$$

C'est une *factorisation de l'identité* dans le groupe symétrique.
L'énumération des cartes biparties est equivalente à l'énumération des factorisations.

Généralisation en constellations

Les cartes biparties correspondent aux factorisations de la forme :

$$\sigma_\bullet \sigma_\circ \phi = id.$$

Il existe une généralisation en un nombre arbitraire de permutation :

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m \phi = id.$$

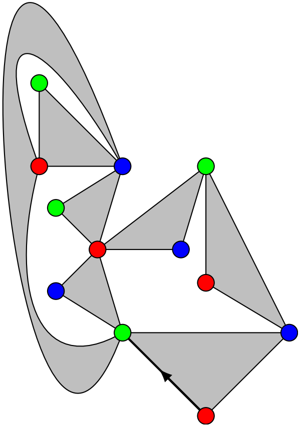
Ce sont les **constellations** (*c.f.* Lando et Zvonkin (2004), aussi Bousquet-Mélou et Schaeffer (2000) et Bouttier, Di Francesco et Guitter (2004)).

Constellations et hypercartes

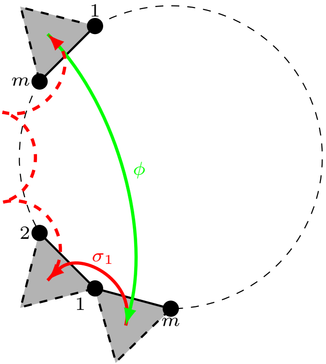
Une m-*constellations* est une carte enracinée qui vérifie les conditions suivantes.

- Les faces sont bicolorées.
- Les faces noires (*hyperarêtes*) sont tous de degré m.
- Les degrés des faces blanches (*hyperfaces*) sont tous multiples de m.
- On peut colorier les sommets tel que les sommets d'une hyperarête sont coloriés de 1 à m en sens direct.

Une m-*hypercarte* est une carte vérifiant les 3 premières conditions (*c.f.* Chapuy (2009)).



Système de rotation d'une m-constellation

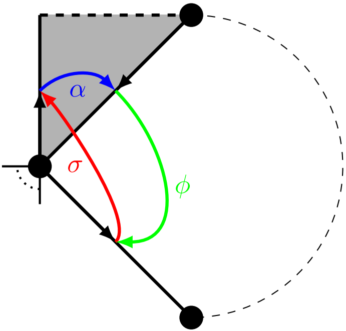


Notons n le nombre d'**hyperarêtes**, on a alors :

$$\sigma_1 \ldots \sigma_m \phi = id_{\mathbf{n}}$$

- σ_i : hyperarêtes adjacentes à chaque sommet de couleur i
- ϕ : hyperarêtes adjacentes à chaque hyperface par une arête partant d'un sommet de couleur 1

Système de rotation d'une m-hypercarte



Notons n le nombre d'**hyperarêtes**, on a alors :

$$\sigma\alpha\phi = id_{\mathbf{mn}}$$

- σ : arêtes sortants de chaque sommet
- α : arêtes autour de chaque hyperarête
- ϕ : arêtes autour de chaque hyperface

On voit que α est toujours de type cyclique $[m^n]$, et tout cycle de ϕ est de longueur multiple de m.

C'est bien le dual d'une carte bipartie.

Algèbre du groupe symétrique

Pour le groupe S_n, on définit son algèbre $\mathbb{C}[S_n]$ l'espace vectoriel muni d'une base $(\sigma)_{\sigma \in S_n}$ et d'une multiplication qui étend linéairement la loi du groupe.
Soit $\lambda \vdash n$ une partition de n. On note $K_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \sigma$ la somme formelle des σ de type cyclique λ.
$(K_\lambda)_{\lambda \vdash n}$ est une base de $Z(\mathbb{C}[S_n])$, le centre de $\mathbb{C}[S_n]$.

$$K_{\lambda^{(1)}} \cdots K_{\lambda^{(m)}} = \sum_{\sigma_i \in C_{\lambda^{(i)}}} \sigma_1 \cdots \sigma_m$$

Pour $\phi \in C_\mu$ fixé, $[K_\mu] K_{\lambda^{(1)}} \cdots K_{\lambda^{(m)}}$ est le nombre des factorisations $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m \phi = id$ avec $\sigma_i \in C_{\lambda^{(i)}}$.

Compter les factorisations

Pour $\phi \in C_\mu$ fixé, $[K_\mu]K_{\lambda^{(1)}} \cdots K_{\lambda^{(m)}}$ est le nombre des factorisations $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m \phi = id$ avec $\sigma_i \in C_{\lambda^{(i)}}$.
Par la theorie de représentation, on peut exprimer ce nombre avec des caractères.

Formule de Frobenius

Le nombre de telles factorisations est

$$\sum_{\theta \vdash n} \frac{dim(V_\theta)^{1-m}}{\# S_n} \left(\prod_{i=1}^{m} \# C_{\lambda^{(i)}} \right) \left(\chi_\mu^\theta \prod_{i=1}^{m} \chi_{\lambda^{(i)}}^\theta \right)$$

Cas des hypercartes

Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ une partition, on note $m\mu$ la partition $(m\mu_1, m\mu_2, \ldots, m\mu_k)$.
Pour les m-hypercartes, on veut évaluer :

$$\sum_{\theta \vdash n} \frac{\#C_\lambda \#C_{m\mu}}{dim(V_\theta)\#S_n} \chi^\theta_{[m^n]} \chi^\theta_{m\mu} \chi^\theta_\lambda$$

Deux parmi les trois sont évalués aux points $m\mu$. Comment exploiter ?

Factorisation de $\chi^{\theta}_{m\mu}$

En fait, on peut exprimer un caractère de la forme $\chi^{\theta}_{m\mu}$ avec des caractères dans des groupes plus petits.

Théorème (Factorisation de caractère (W.F.))

Soient m, n entiers positifs, et $\mu \vdash n$, $\theta \vdash mn$ deux partitions. On a

$$\chi^{\theta}_{m\mu} = z_{\mu} \mathrm{sgn}(\pi_{\theta}\pi'_{\theta}) \sum_{\mu^{(1)} \uplus \cdots \uplus \mu^{(m)} = \mu} \prod_{i=1}^{m} \chi^{\theta^{(i)}}_{\mu^{(i)}} z^{-1}_{\mu^{(i)}}.$$

Ici $z_{\mu} = \#S_n / \#C_{\mu}$

C'est la clé pour obtenir notre relation sur les hypercartes et les constellations.

Deux approches différentes

Deux approches menant au même résultat sont possibles.

- **Approche algébrique**
  Par l'identité de Jacobi-Trudi, $\chi^{\theta}_{m\mu}$ s'exprime comme un déterminant, qui peut être rangé en bloc. La factorisation vient de cette structure en bloc.
- **Approche combinatoire**
  On peut interpreter $\chi^{\theta}_{m\mu}$ combinatoirement avec les *ribbon tableaux*. Dans le cadre de la correspondence boson-fermion, cela donne une factorisation de caractère.

Fonctions symétriques homogènes

Définition

Pour $k \in \mathbb{N}$ un entier positif,

$$h_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

De plus, pour $k < 0$, on définit $h_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

On voit que h_k est de degré total k.

Fonctions de Schur

Pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0) \vdash N$, la **fonction de Schur** s_λ peut être définie comme un déterminant.

$$s_\lambda = \det \begin{bmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & h_{\lambda_1+2} & \cdots & h_{\lambda_1+n} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & h_{\lambda_2+1} & \cdots & h_{\lambda_2+n-1} \\ h_{\lambda_3-2} & h_{\lambda_3-1} & h_{\lambda_3} & \cdots & h_{\lambda_3+n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & h_{\lambda_n-n+3} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

C'est la **formule de Jacobi-Trudi**.
Elle est bien symétrique. En plus, s_λ est de degré total N.

Relation avec les caractères

Définition (Fonctions symétriques power-sum)

Pour $k \in \mathbb{N}$ un entier positif et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash N$ une partition,

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad p_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{l} p_{\lambda_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

On voit que p_λ est de degré total N pour $\lambda \vdash N$. En fait, $(p_\lambda)_{\lambda \vdash N}$ est une base de l'espace vectoriel des fonctions symétriques de degré N.

Caractères comme coefficients

Pour $\lambda \vdash n$, on a

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu$$

Evaluation des caractères

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu$$

Ici $z_\mu = \#S_n / \#C_\mu$.
Pour évaluer χ_μ^λ, il suffit de prendre $[p_\mu] s_\lambda$. Par Jacobi-Trudi, c'est d'évaluer un déterminant formé des h_k.

Exemple : $m = 3$

On essaie d'évaluer $\chi^\lambda_{3\mu}$, avec $\lambda = (6,6,4,4,4,3,3)$.

$$\chi^\lambda_{3\mu} = z_{3\mu}[p_{3\mu}] \det \begin{bmatrix} h_6 & h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} & h_{11} \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}$$

C'est une application de Jacobi-Trudi.

Exemple : $m = 3$

On essaie d'évaluer $\chi^{\lambda}_{3\mu}$, avec $\lambda = (6,6,4,4,4,3,3)$.

$$\chi^{\lambda}_{3\mu} = z_{3\mu}[p_{3\mu}] \det \begin{bmatrix} h_6 & h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} & h_{11} \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}$$

C'est parce que $[p_{3\mu'}]h_m = 0$ pour tout μ' si $3 \nmid m$.

Exemple : $m = 3$

On essaie d'évaluer $\chi^{\lambda}_{3\mu}$, avec $\lambda = (6, 6, 4, 4, 4, 3, 3)$.

$$\chi^{\lambda}_{3\mu} = z_{3\mu}[p_{3\mu}] \det \begin{bmatrix} h_6 & 0 & 0 & h_9 & 0 & 0 & h_{12} \\ 0 & h_6 & 0 & 0 & h_9 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 & 0 \\ h_0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 \\ 0 & 0 & h_0 & 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}$$

C'est parce que $[p_{3\mu'}]h_m = 0$ pour tout μ' si $3 \nmid m$.

Exemple : $m = 3$

On essaie d'évaluer $\chi^{\lambda}_{3\mu}$, avec $\lambda = (6,6,4,4,4,3,3)$.

$$\chi^{\lambda}_{3\mu} = z_{3\mu}[p_{3\mu}] \det \begin{bmatrix} h_6 & 0 & 0 & h_9 & 0 & 0 & h_{12} \\ 0 & h_6 & 0 & 0 & h_9 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 & 0 \\ h_0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_6 \\ 0 & 0 & h_0 & 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}$$

Les termes qui restent se divisent en trois groupes.

Exemple : $m = 3$

On essaie d'évaluer $\chi^{\lambda}_{3\mu}$, avec $\lambda = (6, 6, 4, 4, 4, 3, 3)$.

$$\chi^{\lambda}_{3\mu} = z_{3\mu}[p_{3\mu}] \det \begin{bmatrix} h_6 & h_9 & h_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & h_3 & h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_6 & h_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & h_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_3 \end{bmatrix}$$

On peut les remettre en blocs.

Exemple : $m = 3$

On essaie d'évaluer $\chi^{\lambda}_{3\mu}$, avec $\lambda = (6, 6, 4, 4, 4, 3, 3)$.

$$\chi^{\lambda}_{3\mu} = z_{3\mu}[p_{3\mu}] \left(\det \begin{bmatrix} h_6 & h_9 & h_{12} \\ h_0 & h_3 & h_6 \\ 0 & h_0 & h_3 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} h_6 & h_9 \\ h_3 & h_6 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} h_3 & h_6 \\ h_0 & h_3 \end{bmatrix} \right)$$

On obtient ainsi une factorisation en facteurs similaires qu'un déterminant de Jacobi-Trudi. Ces facteurs s'expriment aussi en caractères.

Factorisation de caractère

Théorème (Factorisation de caractère (W.F.))

Soient m, n *entiers positifs, et* $\mu \vdash n$, $\theta \vdash mn$ *deux partitions. On a*

$$\chi^{\theta}_{m\mu} = z_{\mu} \mathrm{sgn}(\pi_{\theta}\pi'_{\theta}) \sum_{\mu^{(1)} \uplus \cdots \uplus \mu^{(m)} = \mu} \prod_{i=1}^{m} \chi^{\theta^{(i)}}_{\mu^{(i)}} z^{-1}_{\mu^{(i)}}.$$

Lien entre constellations et hypercartes, version séries

Soient $H^{(g)}(x,y,z)$ et $C^{(g)}(x_1,\ldots,x_m,y,z)$ les séries des m-hypercartes et des m-constellations dans le genre g. Ici,

- x marque les sommets (x_i marque les sommets de couleur i),
- y marque les faces,
- z marque les hyperarêtes.

Corollaire

Les séries $H^{(g)}$ et $C^{(g)}$ sont reliées par l'égalité suivante.

$$H^{(g)}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{g} \frac{m^{2g-2k}}{m(2k)!} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} (i-j) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{2k} C^{(g-k)} \right) (x,\ldots,x,y,z)$$

Idée de preuve

Corollaire

Les séries $H^{(g)}$ et $C^{(g)}$ sont reliées par l'égalité suivante.

$$H^{(g)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{g} \frac{m^{2g-2k}}{m(2k)!} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} (i-j) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{2k} C^{(g-k)} \right) (x, \ldots, x, y, z)$$

- Factorisation de caractère $\Rightarrow$ la série des hypercartes comme produit des copies de la série des constellations
- Imposer la connexité en prenant un $\log$ $\Rightarrow$ le produit transformé en somme
- Extraction directe de coefficient en contrôlant le genre

Restriction de degré des hyperfaces

Soit $D \subset \mathbb{N}$. On veut que toute hyperface soit de degré md avec $d \in D$. Par abus de notation, on signifie cette restriction par une indice $_D$.

Corollaire (Résultat principal, version séries)

On a les relations suivantes.

$$H_D^{(g)}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{g} \frac{m^{2g-2k}}{m(2k)!} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} (i-j) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{2k} C_D^{(g-k)} \right)(x,\ldots,x,y,z)$$

Lien entre constellations et hypercartes, version nombre

On note $C_{n,m,D}^{(g,a_1,\ldots,a_{m-1})}$ le nombre des m-constellations de genre g avec n hyperarêtes et a_i sommets de couleur i marqués pour chaque i. On note similairement $H_{n,m,D}^{(g)}$ pour les m-hypercartes.

Corollaire (Résultat principal, version nombre, cas $m = 3, 4$)

$$H_{n,3,D}^{(g)} = \sum_{i=0}^{g} 3^{2g-2i} \sum_{l=0}^{2i} \frac{2 \cdot 2^l + (-1)^l}{3} C_{n,3,D}^{(g-i,l,2i-l)},$$

$$H_{n,4,D}^{(g)} = \sum_{i=0}^{g} 4^{2g-2i} \sum_{\substack{l_1,l_2 \geq 0 \\ l_1+l_2 \leq 2i}} \frac{2(3^{l_1}2^{l_2} + 2^{l_2}(-1)^{l_1})}{4} C_{n,4,D}^{(g-i,l_1,l_2,2i-l_1-l_2)}.$$

En fait, les coefficients sont toujours entiers positifs.

Application au comptage asymptotique

D'après Chapuy (2009), le nombre $C^{(g)}_{n,m,D} = C^{(g,0,\ldots,0)}_{n,m,D}$ des m-constellations est de l'ordre $\Theta(n^{\frac{5}{2}(g-1)}\rho^{n}_{m,D})$ quand n tend vers l'infini.
On retrouve alors le résultat suivant, donné par Chapuy (2009).

Corollaire (Comportement asymptotique des m-hypercartes)

Quand n tend vers l'infini,

$$H^{(g)}_{n,m,D} \sim m^{2g} C^{(g)}_{n,m,D}.$$

Notre relation peut être vu comme un “développement en ordre supérieur” de ce corollaire.

Une preuve combinatoire ?

Est-ce qu'il y a une preuve combinatoire ?
Est-ce qu'il y a une interprétation combinatoire des coefficients ?

Merci de votre attention