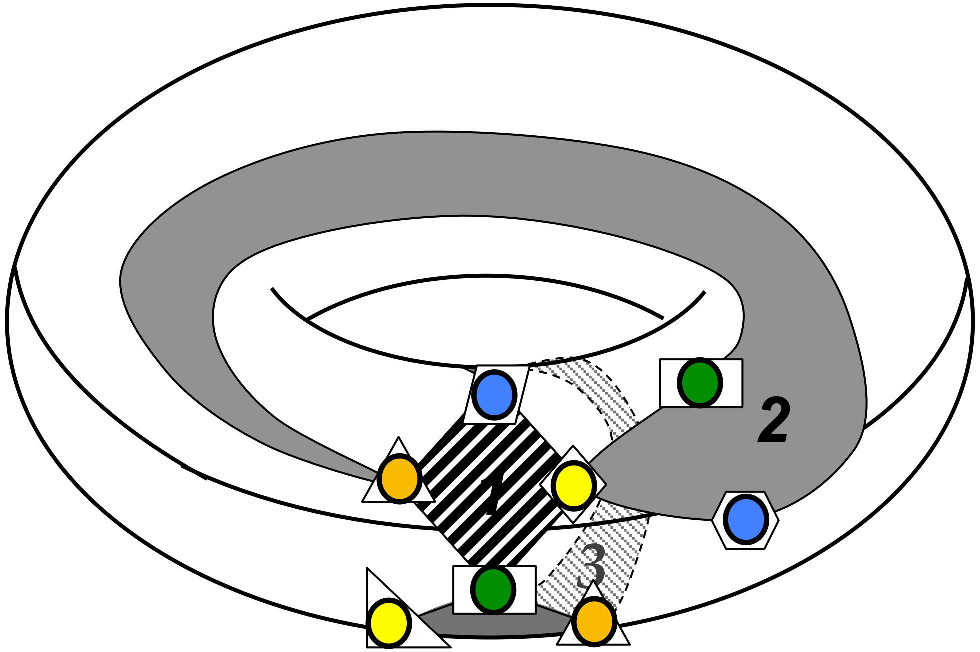
Dénombrement des constellations unicellulaires colorées

Ekaterina Vassilieva



Notations

- Soit S_n le groupe symétrique sur n éléments

- γ_n la permutation de S_n définie par $\gamma_n = (1\ 2\ \dots\ n)$

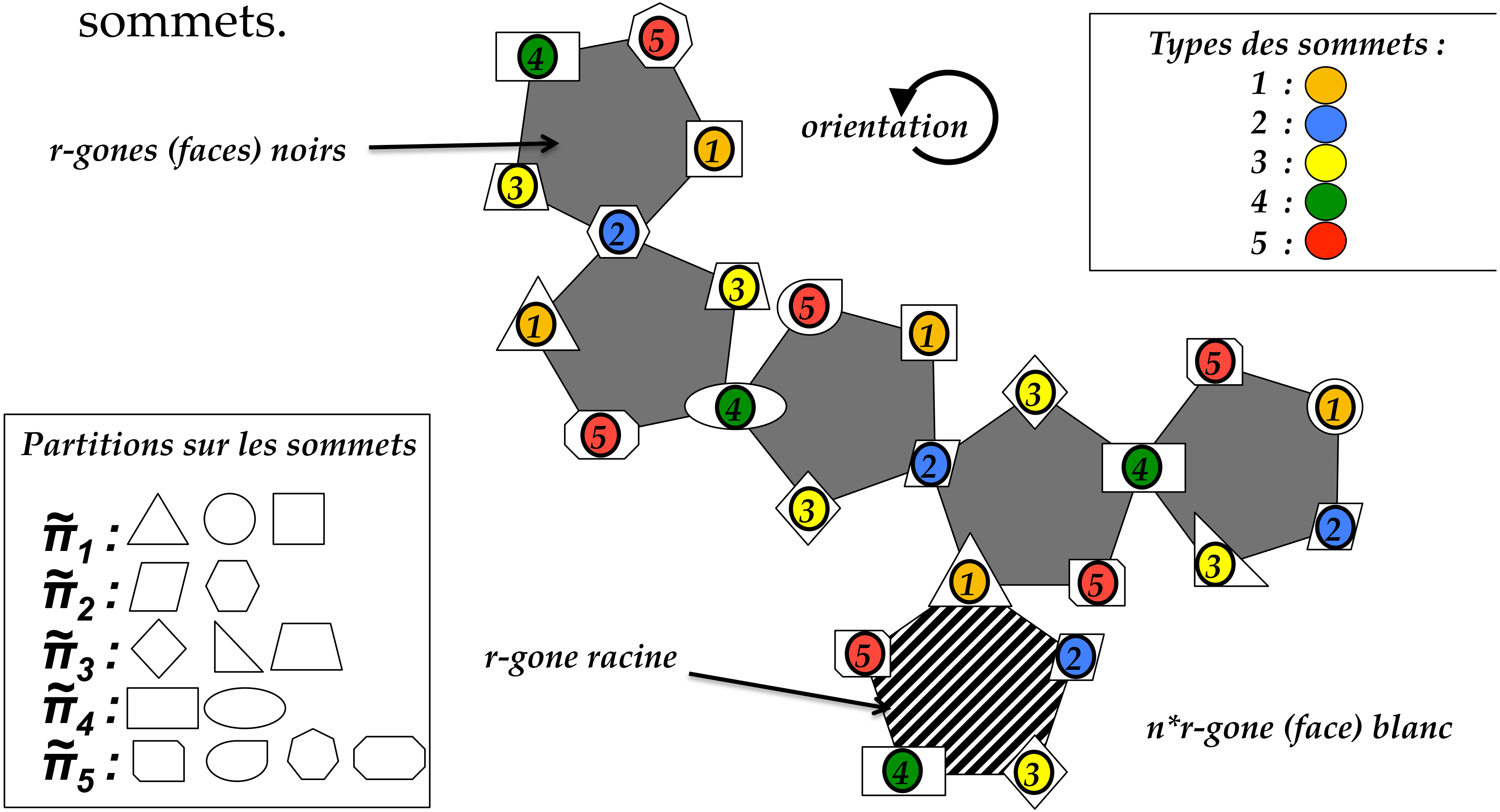
- Pour un entier r, une sous-séquence strictement croissante t de $1 \dots r$ est une séquence de la forme $t = (i_1, i_2, \dots, i_u)$ avec $u \geq 1$ et :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_u \leq r$$

- On note $k_{p_1, p_2, \dots p_r}$ le nombre de factorisations de γ_n en r facteurs $\gamma_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ tels que la permutation α_i a p_i cycles.

Problème : compter les cactus partitionés

- On souhaite dénombrer les constellations uni-faces (cactus) enracinées couplées à un jeu de partitions (coloration) sur les sommets.



Problème : compter les cactus partitionnés

- **<u>Définition</u>** : On appelle r-cactus partitionné à n hyper-arrêtes une décomposition d'une surface de genre quelconque orientée en sommets, arrêtes et faces homéomorphe à un disque ouvert avec :
  - exactement n faces noires (hyper-arrêtes) non adjacentes
  - une face blanche.
  - chaque face noire est un r-gone
  - la face blanche un $n*r$-gone
  - Les sommets autour de chaque r-gone sont considérés être de type $1,2,\ldots,r$. Tourner autour du r-gone (selon l'orientation de la surface) fait parcourir les sommets dans l'ordre (du type) $1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow r$.
  - r partitions sur les sommets (une pour chaque type)

Application : *r*-factorisations du groupe symétrique

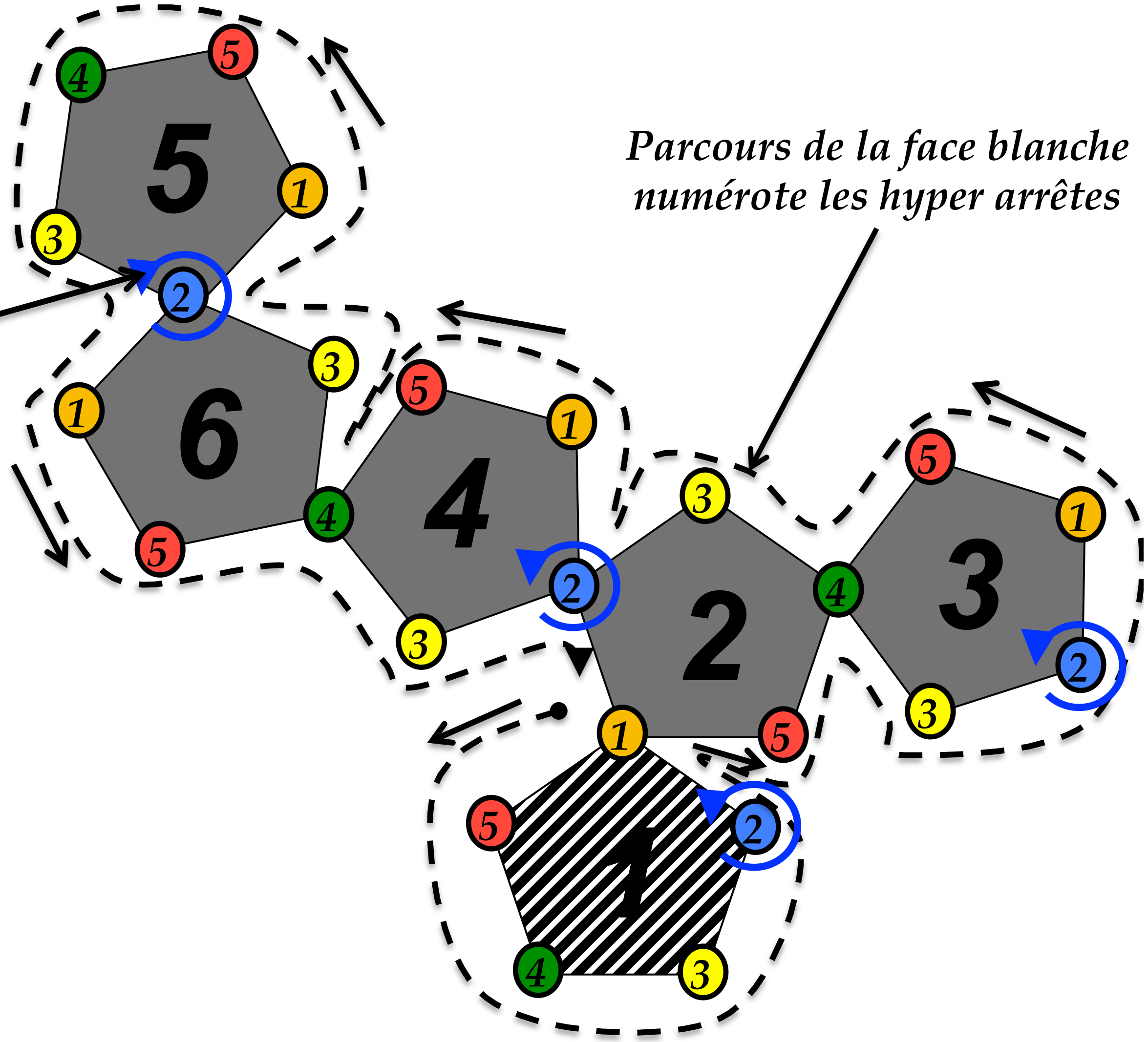
- **Théorème** : Soit $C^n(p_1,p_2,\ldots,p_r)$ l'ensemble des cactus partitionnés défini précédemment avec p_i blocs dans la partitions des sommets de type i. Le cardinal de cet ensemble et le nombre de factorisations de γ_n en r facteurs sont liés par :

$$\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} k_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \prod_{1\leq i\leq r} x_i^{p_i} = \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \mid C^n(p_1,p_2,\ldots,p_r) \mid \prod_{1\leq i\leq r} (x_i)_{p_i}$$

Application : r-factorisations du groupe symétrique

- Correspondance entre un cactus et une factorisation du long cycle γ_n en r facteurs :

Les cycles de la permutation α_i factorisant γ_n sont les indices des hyper arrêtes autour des sommets de type **i**

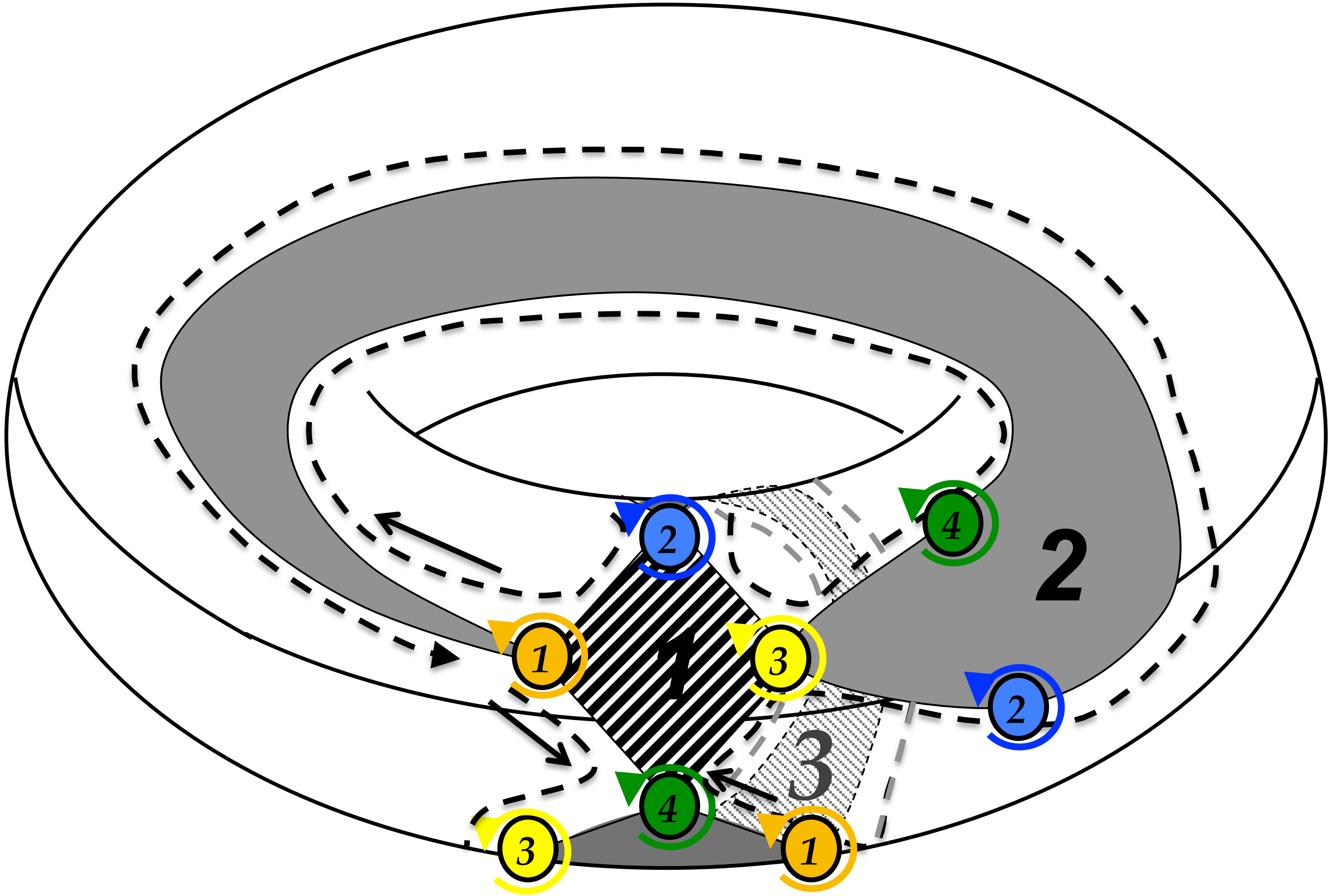


$$\alpha_1 = (12)(3)(4)(5)(6)$$
$$\alpha_2 = (1)(24)(3)(56)$$
$$\alpha_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$
$$\alpha_4 = (1)(23)(46)(5)$$
$$\alpha_5 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$
$$\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = \gamma_6}$$

Application : *r*-factorisations du groupe symétrique

- Autre exemple de cactus/factorisation de genre 1:

$\alpha_1 = (12)(3)$
$\alpha_2 = (13)(2)$
$\alpha_3 = (12)(3)$
$\alpha_4 = (13)(2)$
$\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \gamma_3}$



Arrière Plan

- Formule de Jackson (démonstration algébrique):

$$\frac{1}{(n!)^{r-1}} \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} k^n_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \prod_{1\le i\le r} x_i^{p_i} = \phi\left(\prod_{1\le i\le r} x_i \left(\prod_{1\le i\le r} (1+x_i) - \prod_{1\le i\le r} (x_i) \right)^{n-1} \right)$$

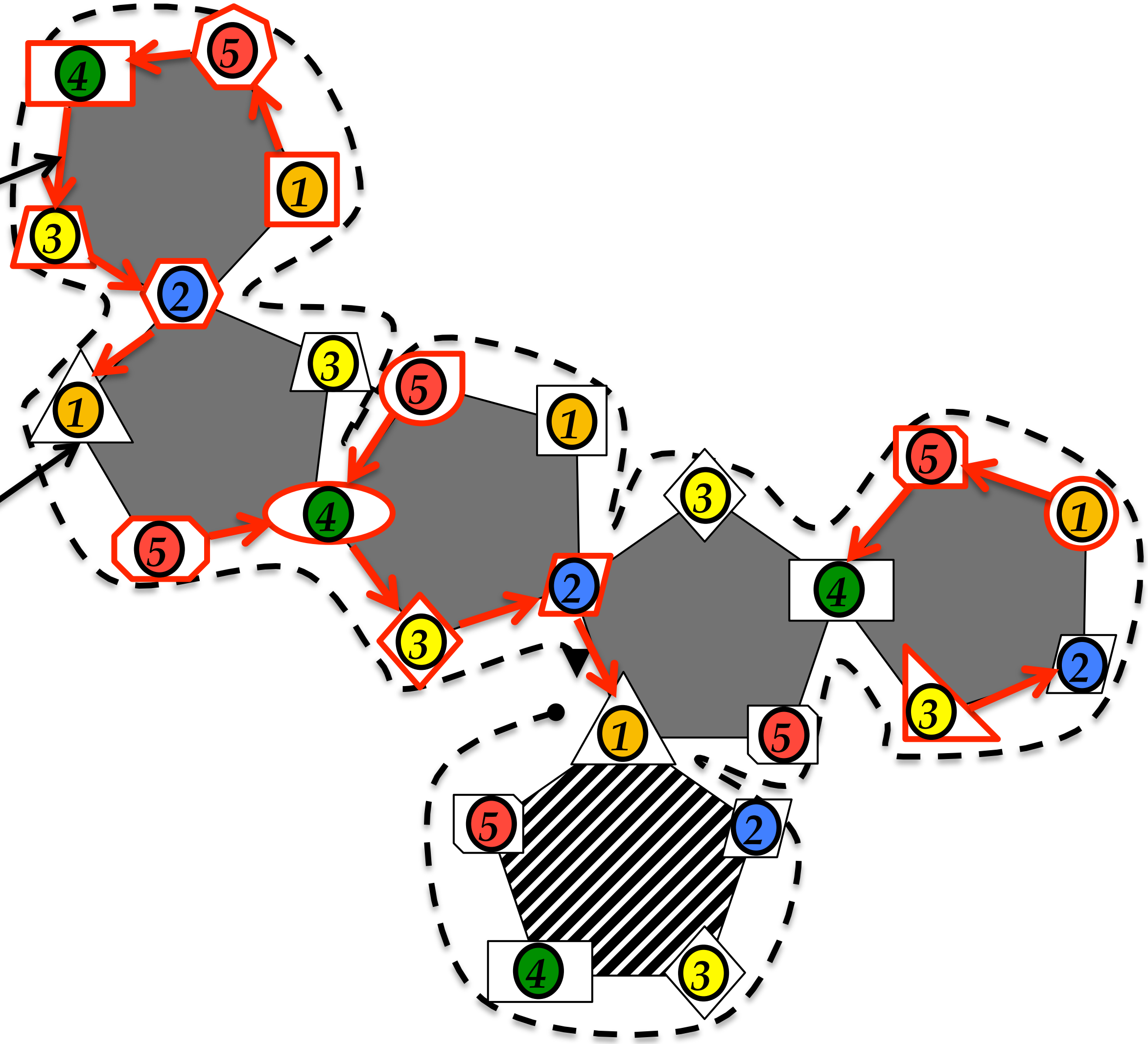
avec : $\phi(\prod_i x_i^{p_i}) = \prod_i \binom{x_i}{p_i}$

- Travaux combinatoires

Méthode

- Utiliser le dernier départ de chaque bloc pour la classification des hyper-arrêtes:

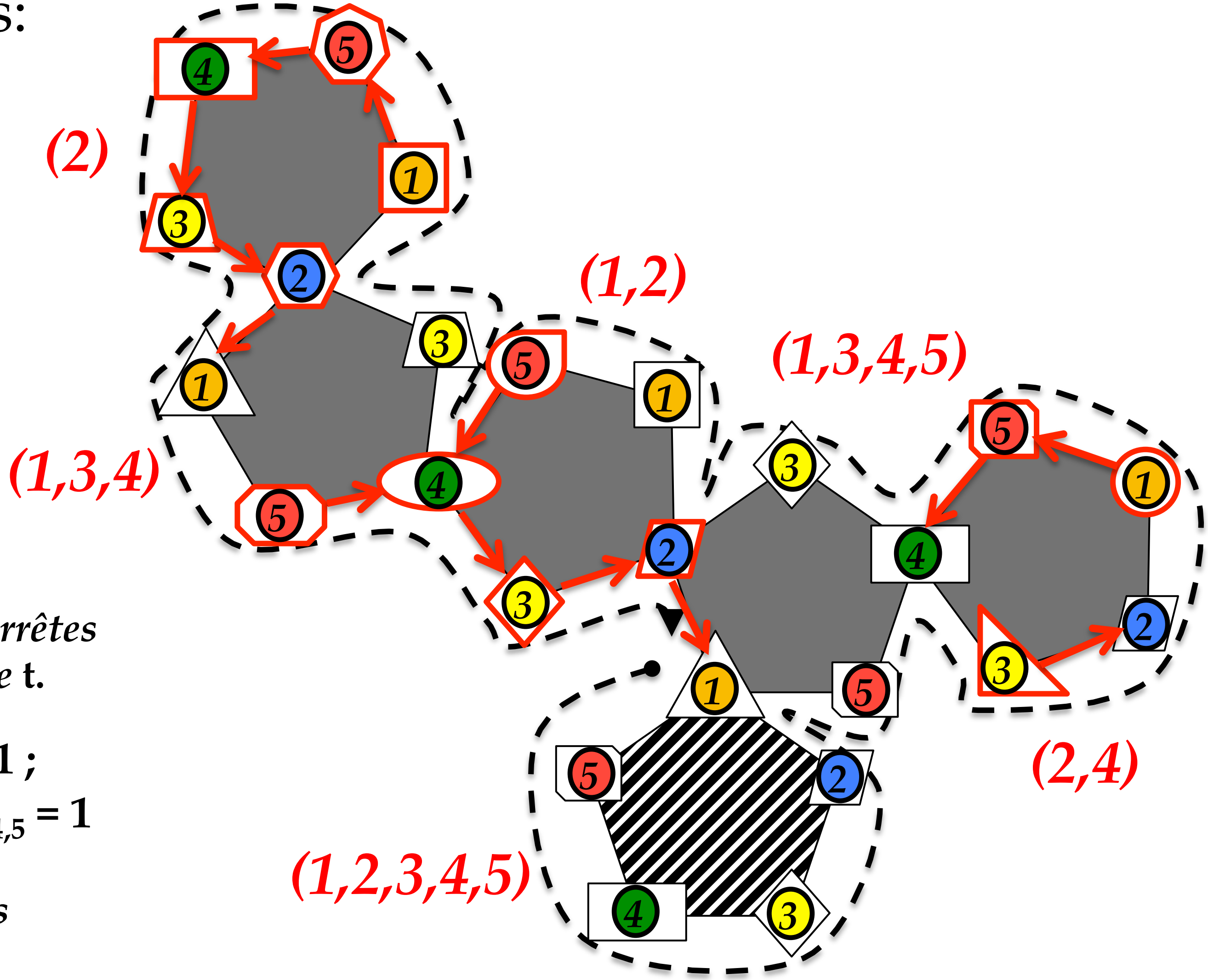
Le dernier passage par un bloc dans le parcours de la face blanche est noté par une flèche sortante rouge



Le bloc contenant le sommet de type 1 appartenant à l'hyper arrête racine est ignoré dans la recherche des maxima.

Méthode

- Utiliser le dernier passage par chaque bloc pour classification des hyper-arrêtes:



A chaque hyper-arrête est associé la séquence des types des sommets <u>non</u> maximum

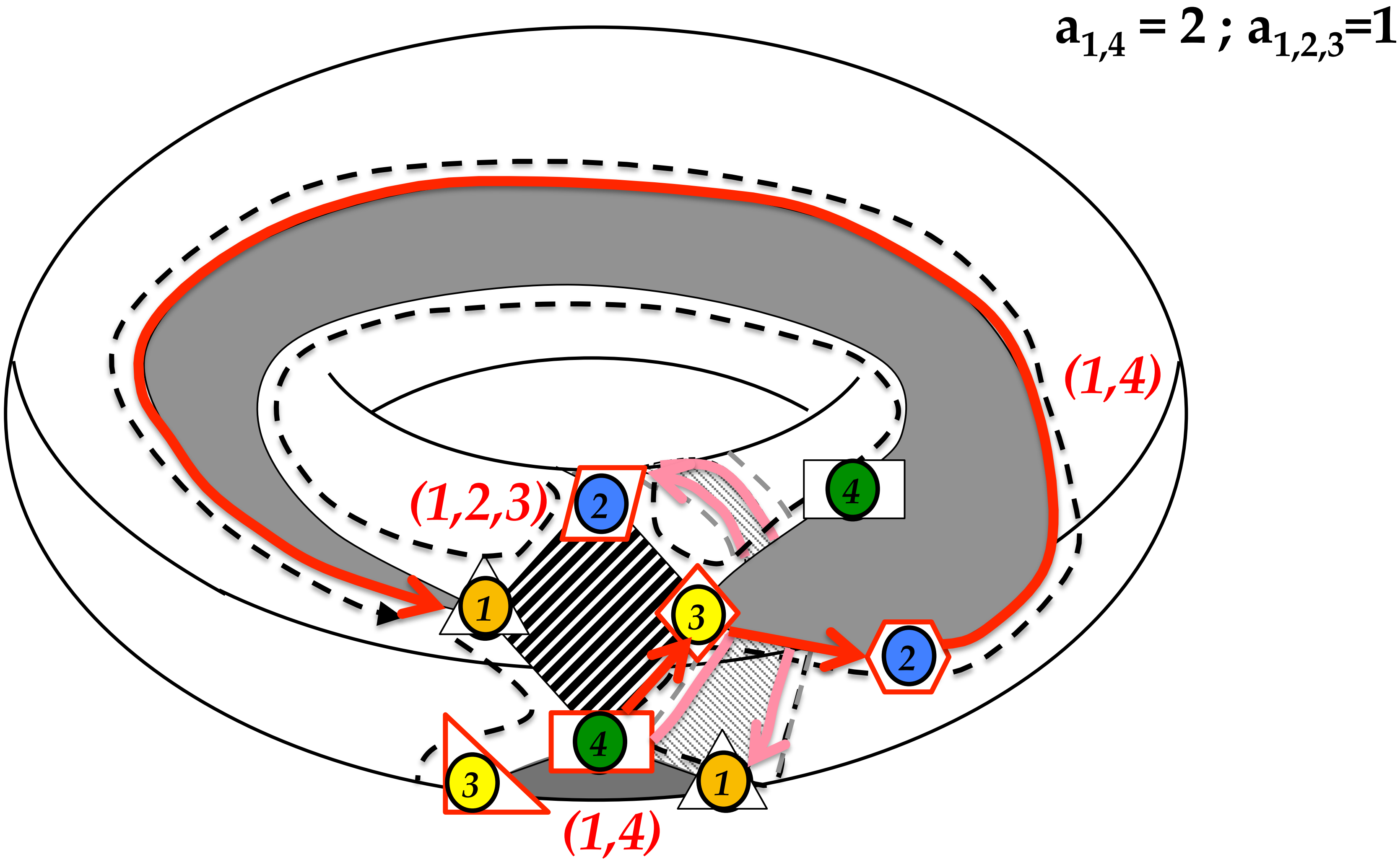
Soit $\mathbf{a_t}$ le nombre d'hyper-arrêtes associées à une séquence t.

$\mathbf{a_2 = 1}$; $\mathbf{a_{1,2}=1}$; $\mathbf{a_{1,3,4} = 1}$;
$\mathbf{a_{2,4} = 1}$; $\mathbf{a_{1,3,4,5} = 1}$; $\mathbf{a_{1,2,3,4,5} = 1}$

Les autres $\mathbf{a_t}$ sont nuls

Méthode

- Autre exemple :



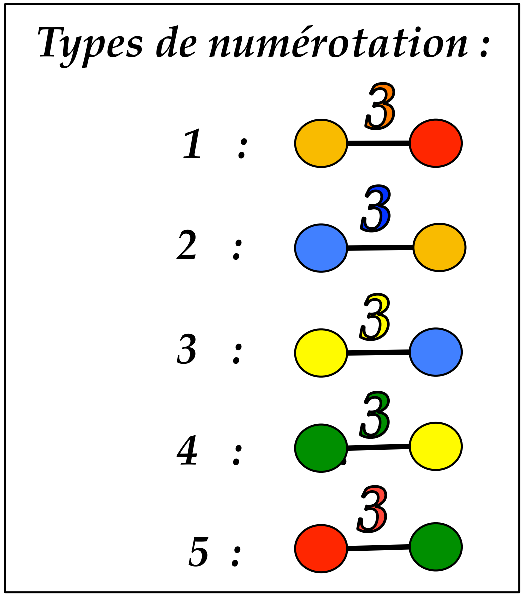
Méthode

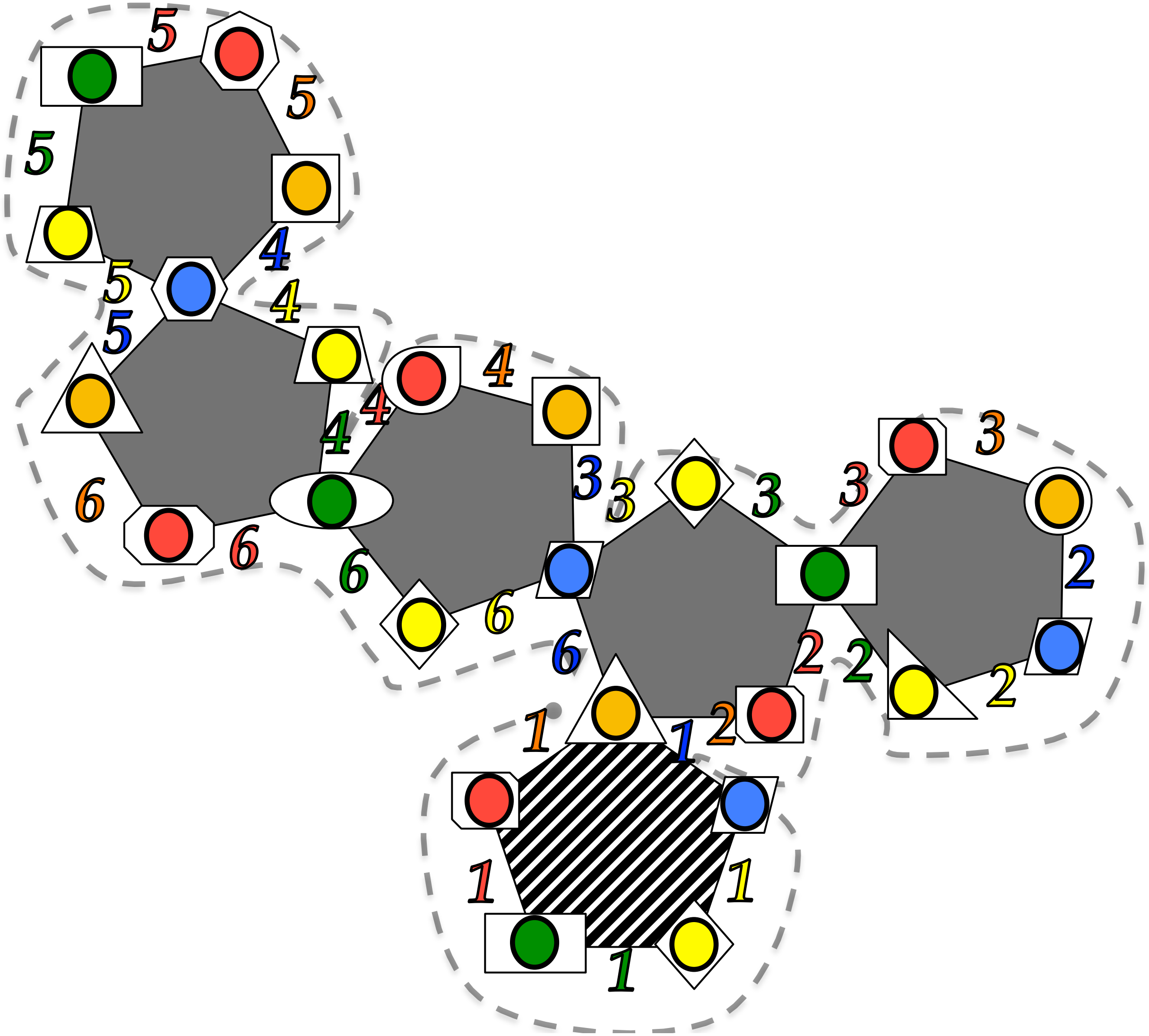
- Objectif : dénombrer grâce à une bijection l'ensemble *C(**a**)* des cactus partitionnés associés à un jeu de paramètre ***a*** = $(a_t)_t$ *où t* varie sur toutes les sous-séquences possibles de *1…r.* On a:

$$\mid C^n(p_1, p_2, \ldots, p_r) \mid \; = \sum_{\substack{\sum_t a_t = n \\ \sum_{t;\, i \notin t} a_t = p_i - \delta_{1i}}} \mid C(\mathbf{a}) \mid$$

Bijection

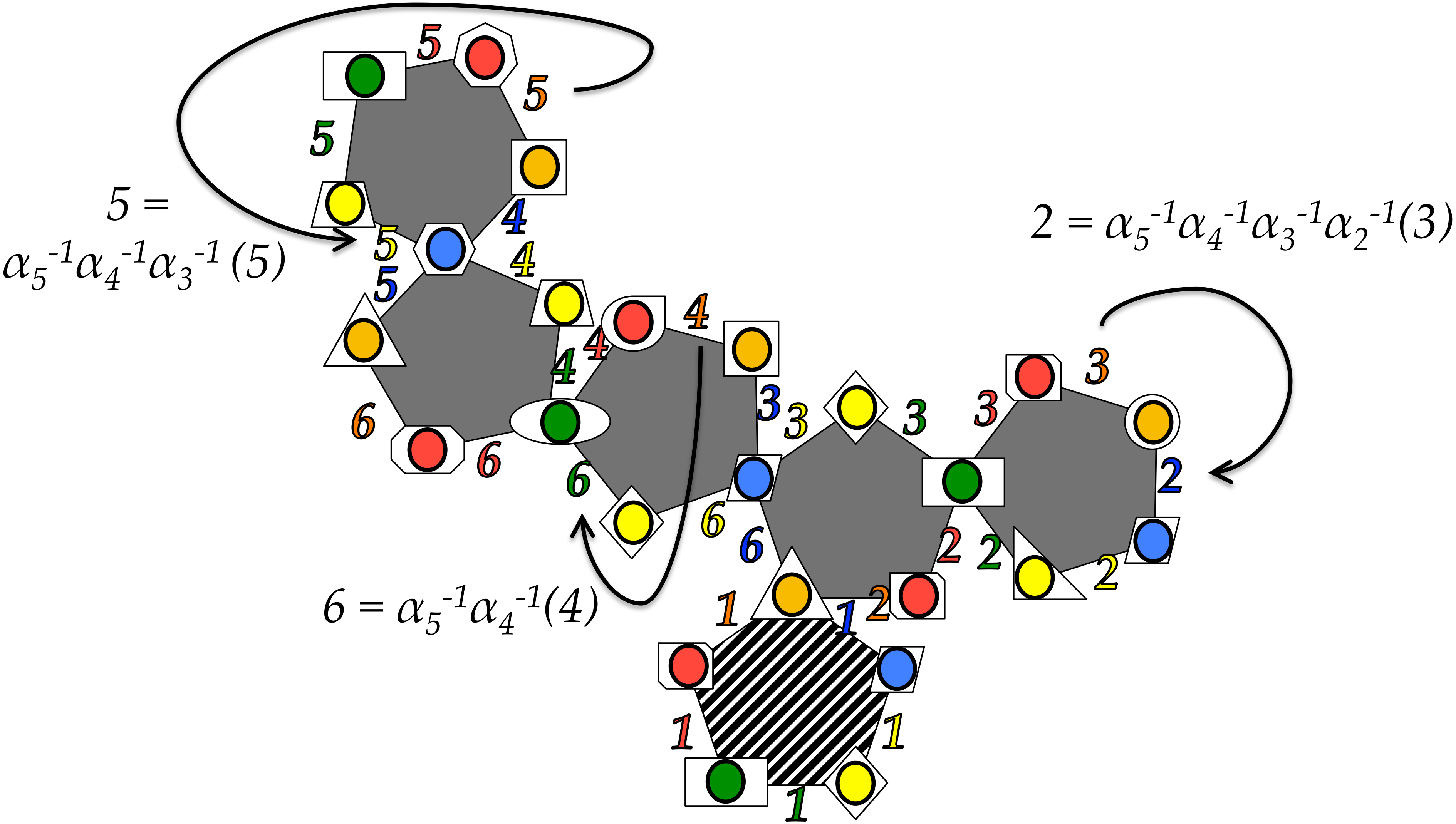
- Première étape numéroter les arrêtes autour des *r*-gones selon le parcours de la face blanche :





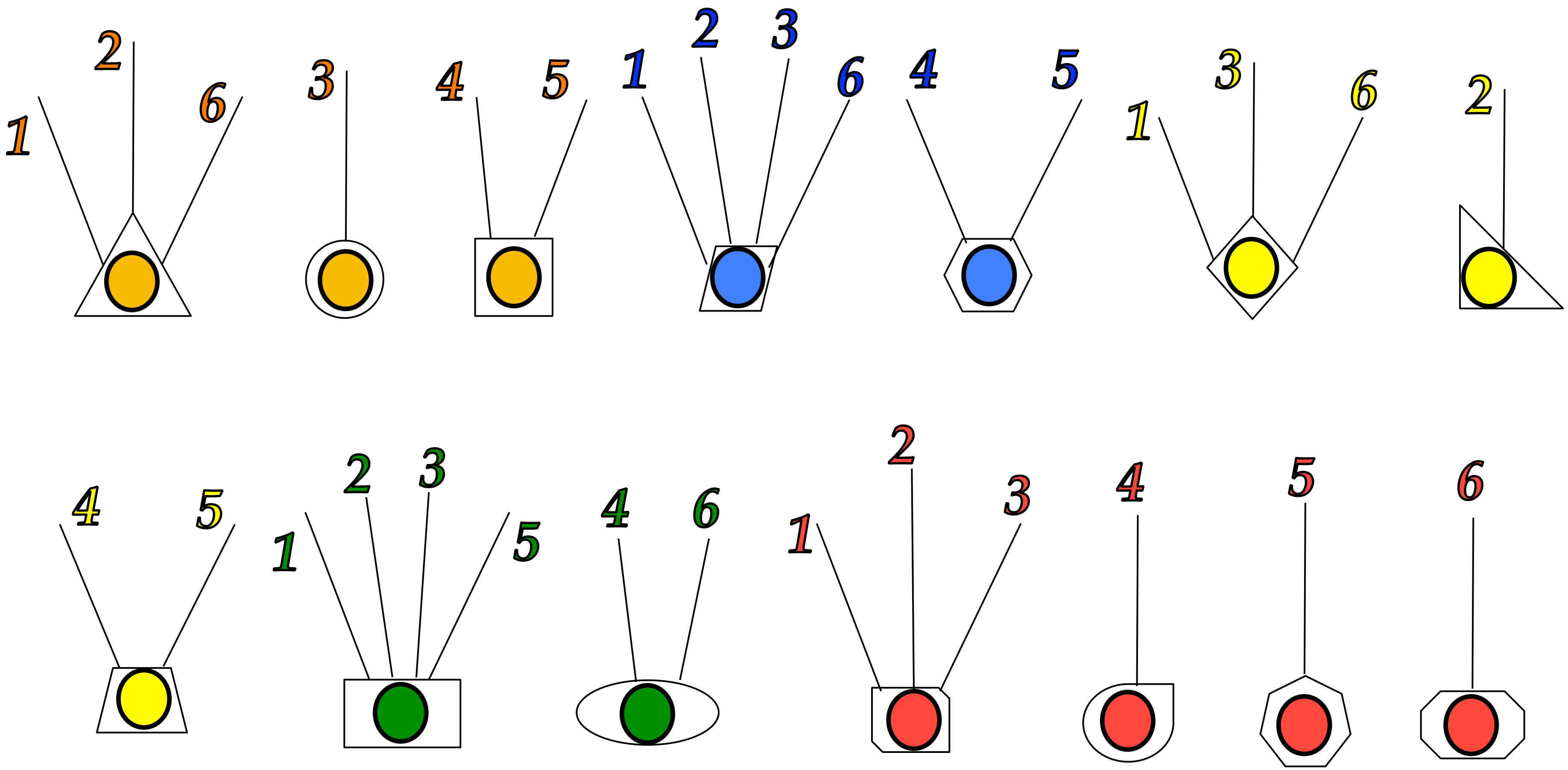
Bijection

- **<u>Propriété :</u>** Si i est l'indice de type 1 d'une hyper-arrête, l'indice de type k>1 de cette hyper-arrête est : $\alpha_r^{-1}\alpha_{r-1}^{-1}\ldots\alpha_k^{-1}(i)$



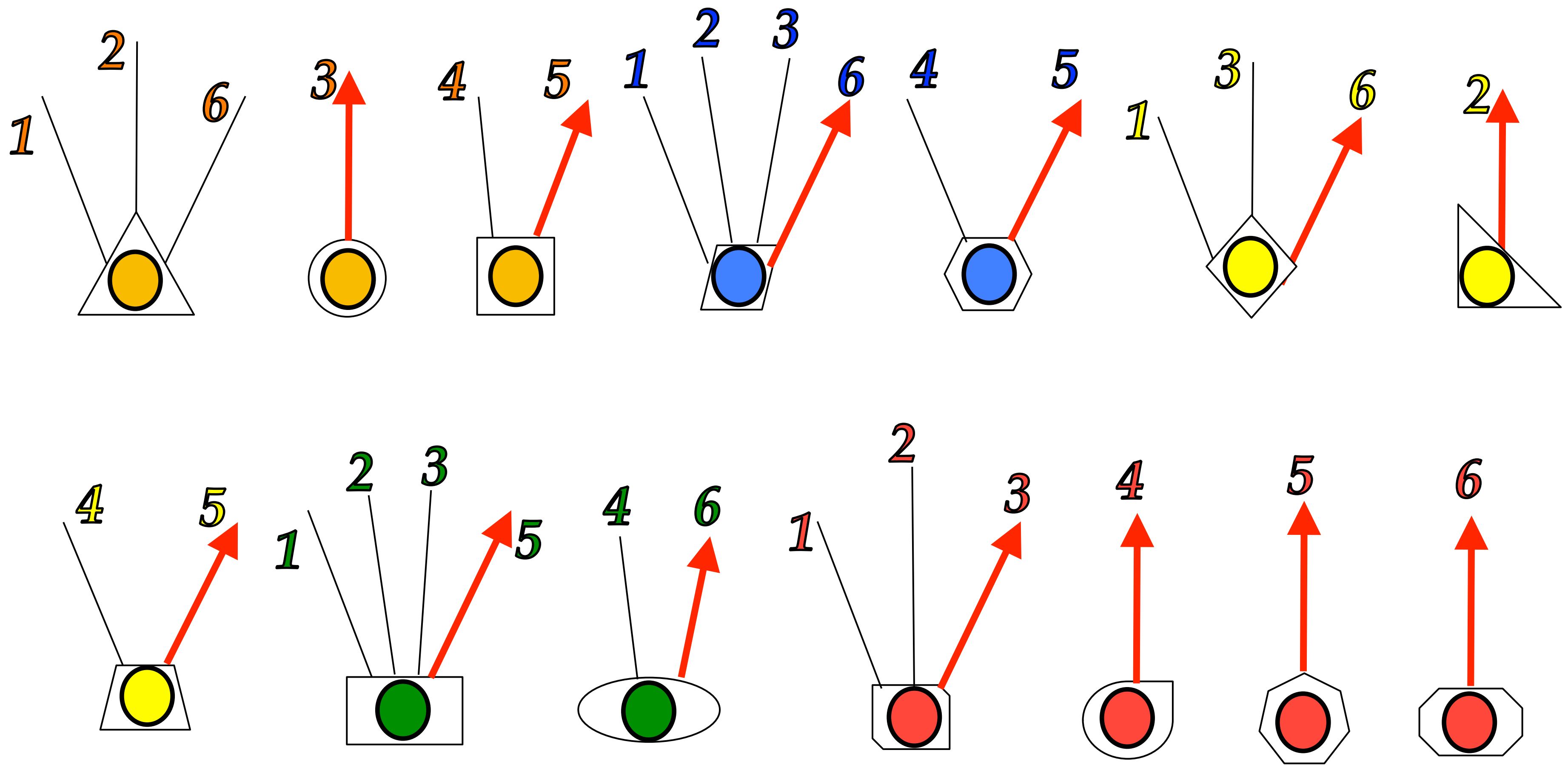
Bijection

- Seconde étape : « réunir » les indices d'arrêtes appartenant à chaque bloc de partition



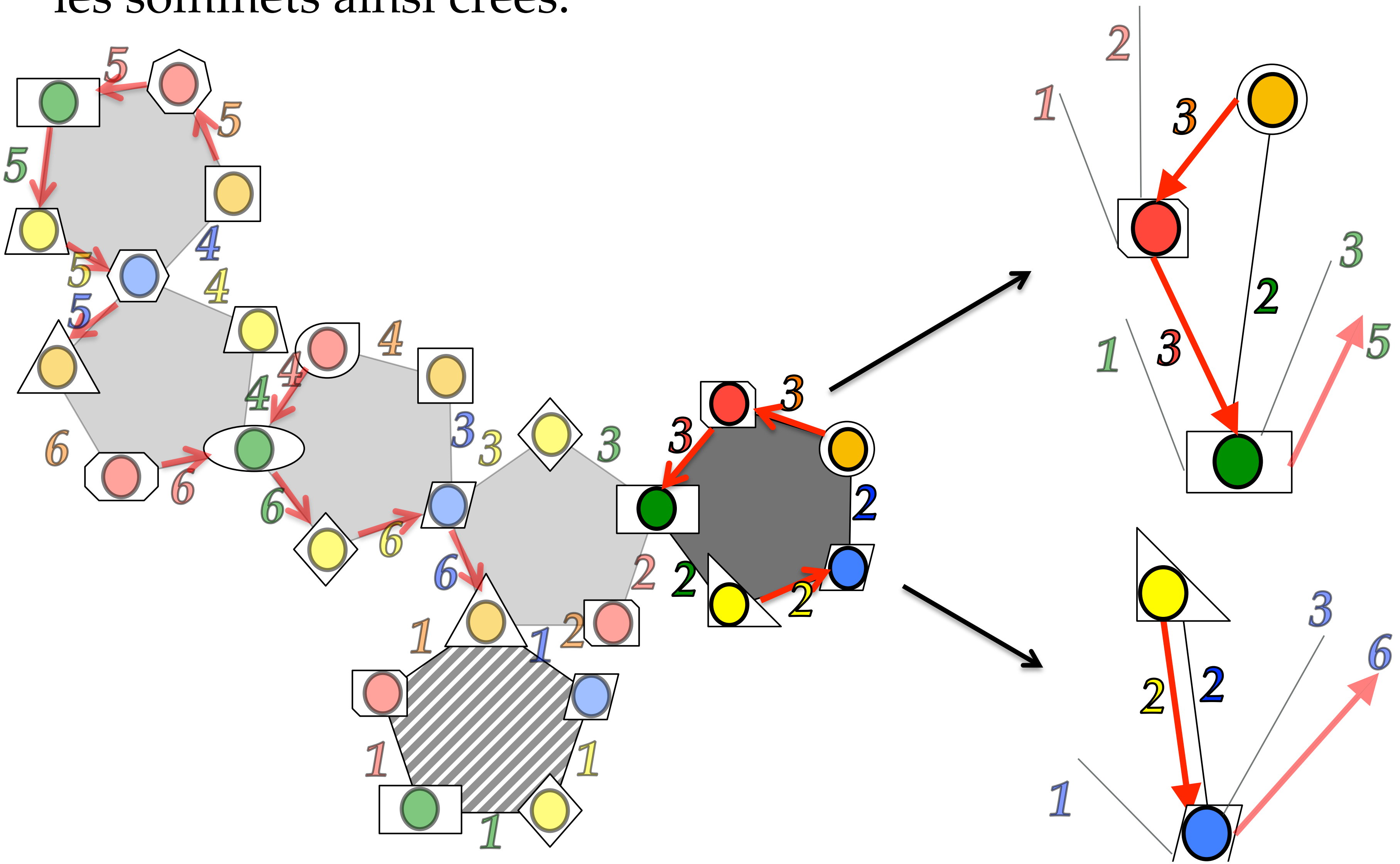
Bijection

- Troisième étape : utiliser les derniers départs pour connecter les sommets ainsi créés.



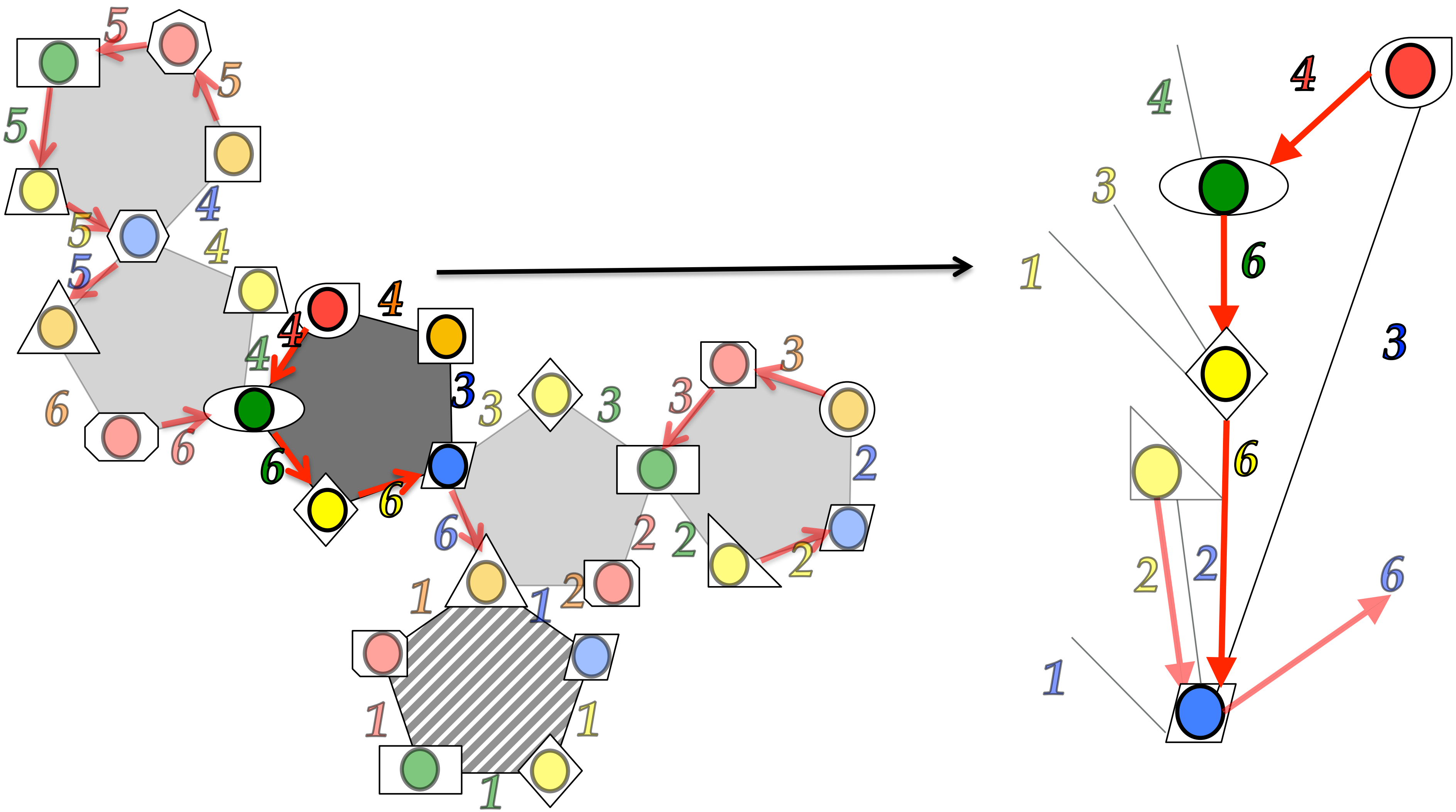
Bijection

- Troisième étape : utiliser les derniers départs pour connecter les sommets ainsi créés.



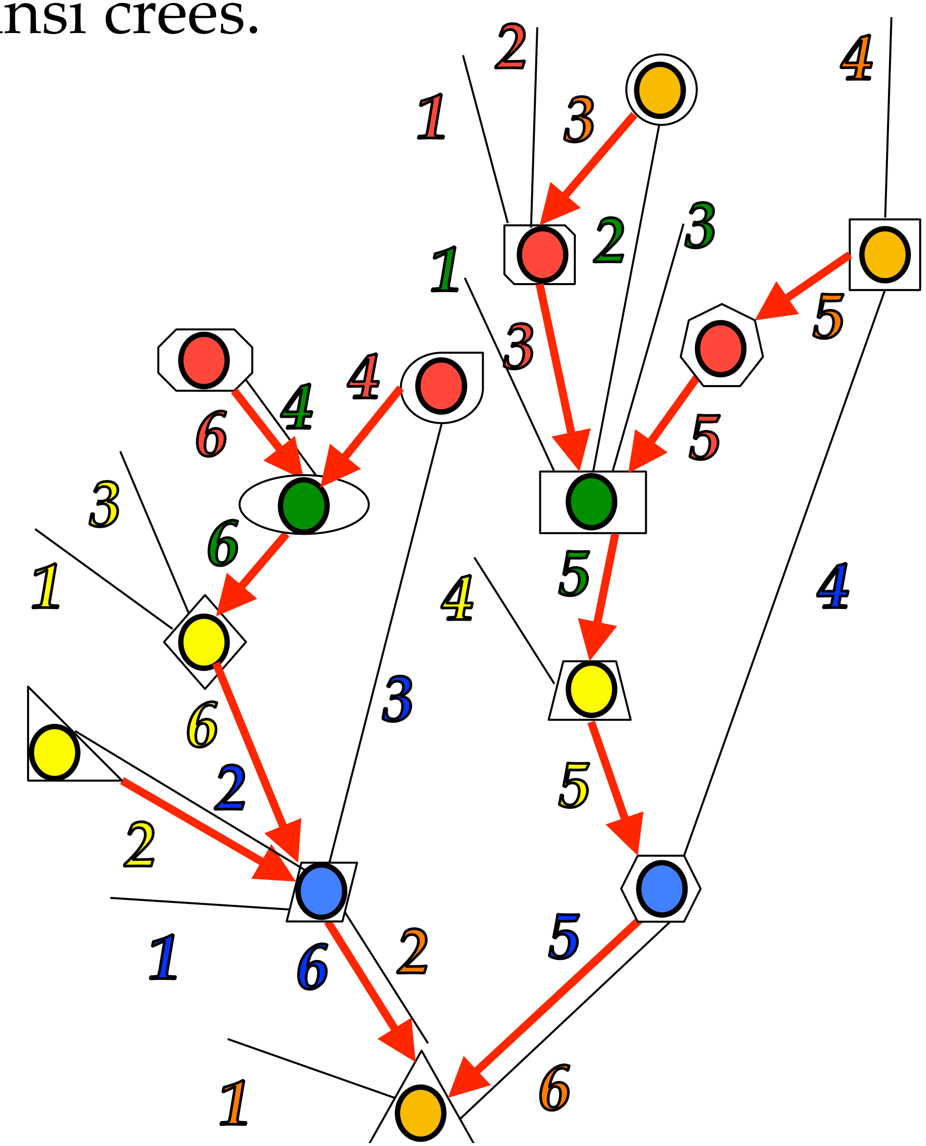
Bijection

- Troisième étape : utiliser les derniers départs pour connecter les sommets ainsi créés.



Bijection

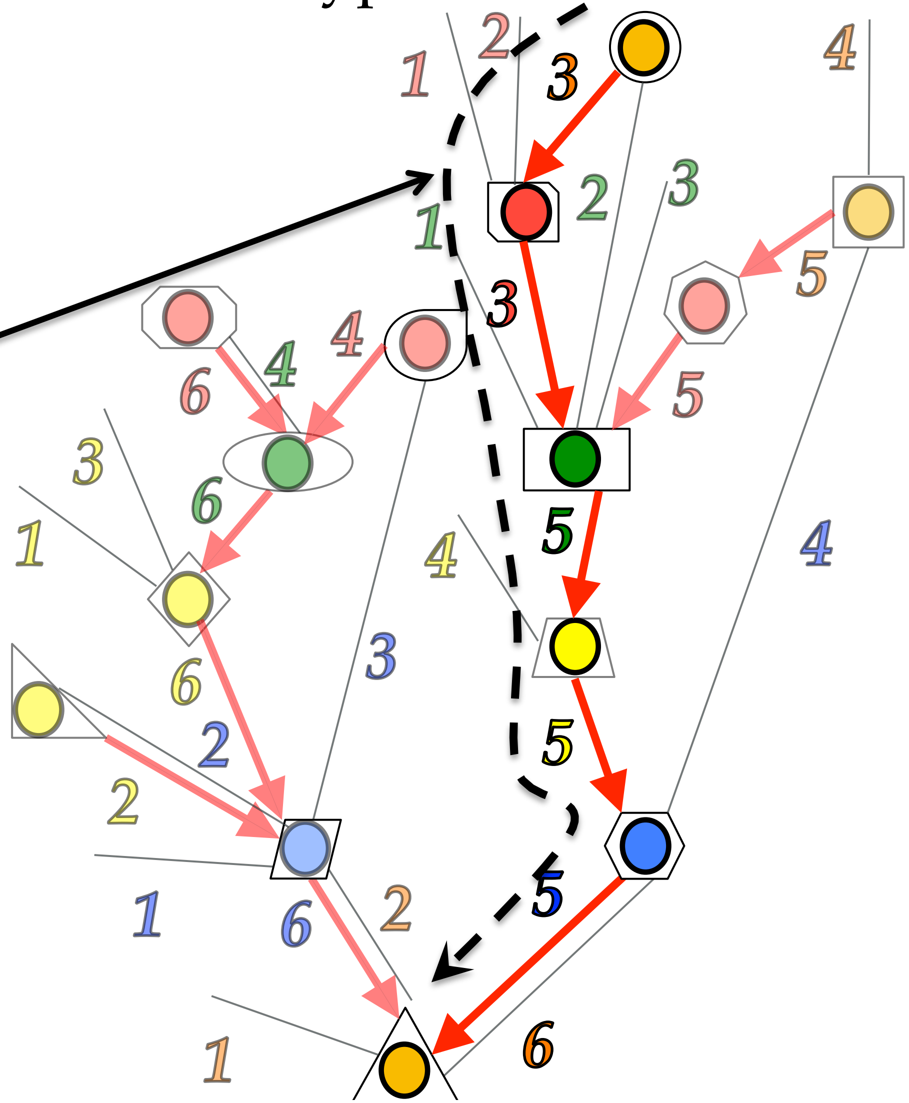
- Troisième étape : utiliser les derniers départs pour connecter les sommets ainsi créés.



Bijection

- **<u>Propriété :</u>** Le graphe ainsi créé est une structure arborescente enracinée dans le bloc de type *1* contenant l'élément *1* nommée **arbre cactus.**

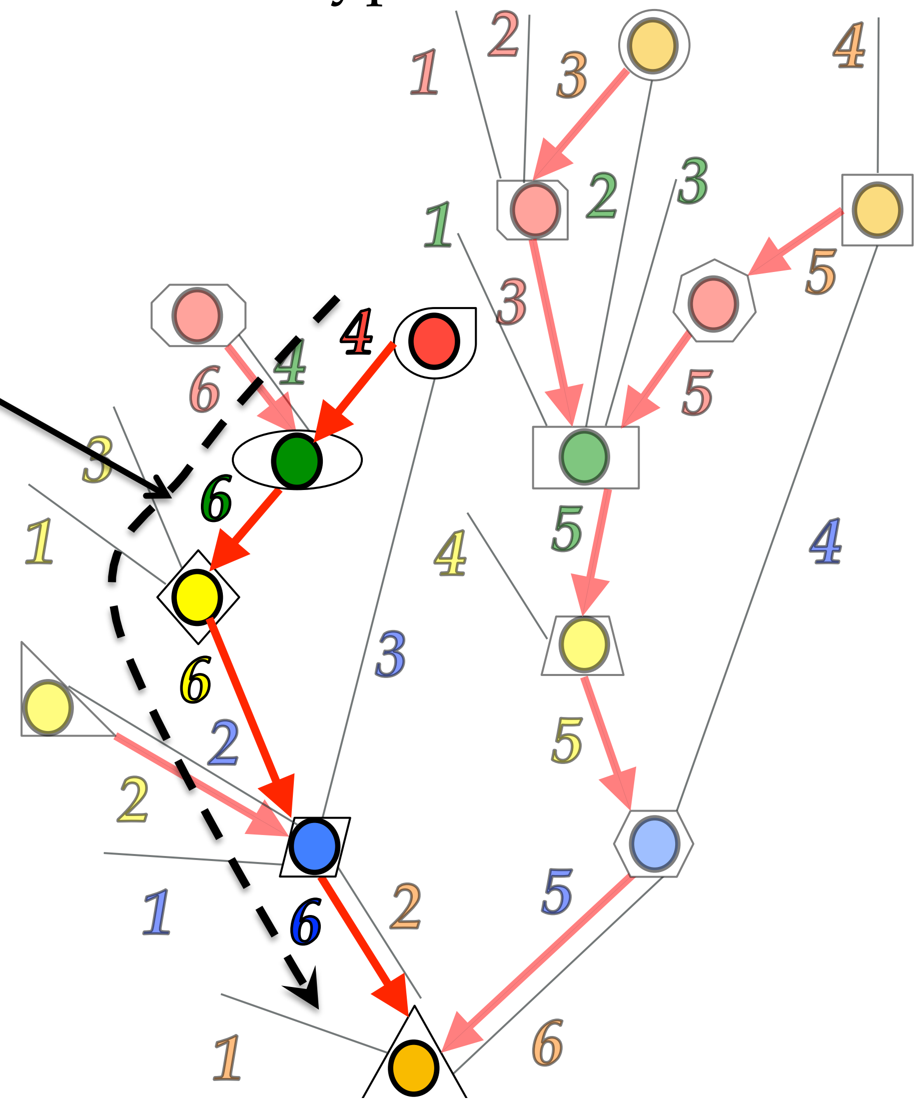
Les indices des arrêtes maximales progressent faiblement d'une couleur à l'autre et strictement lors du prochain passage par une même couleur



Bijection

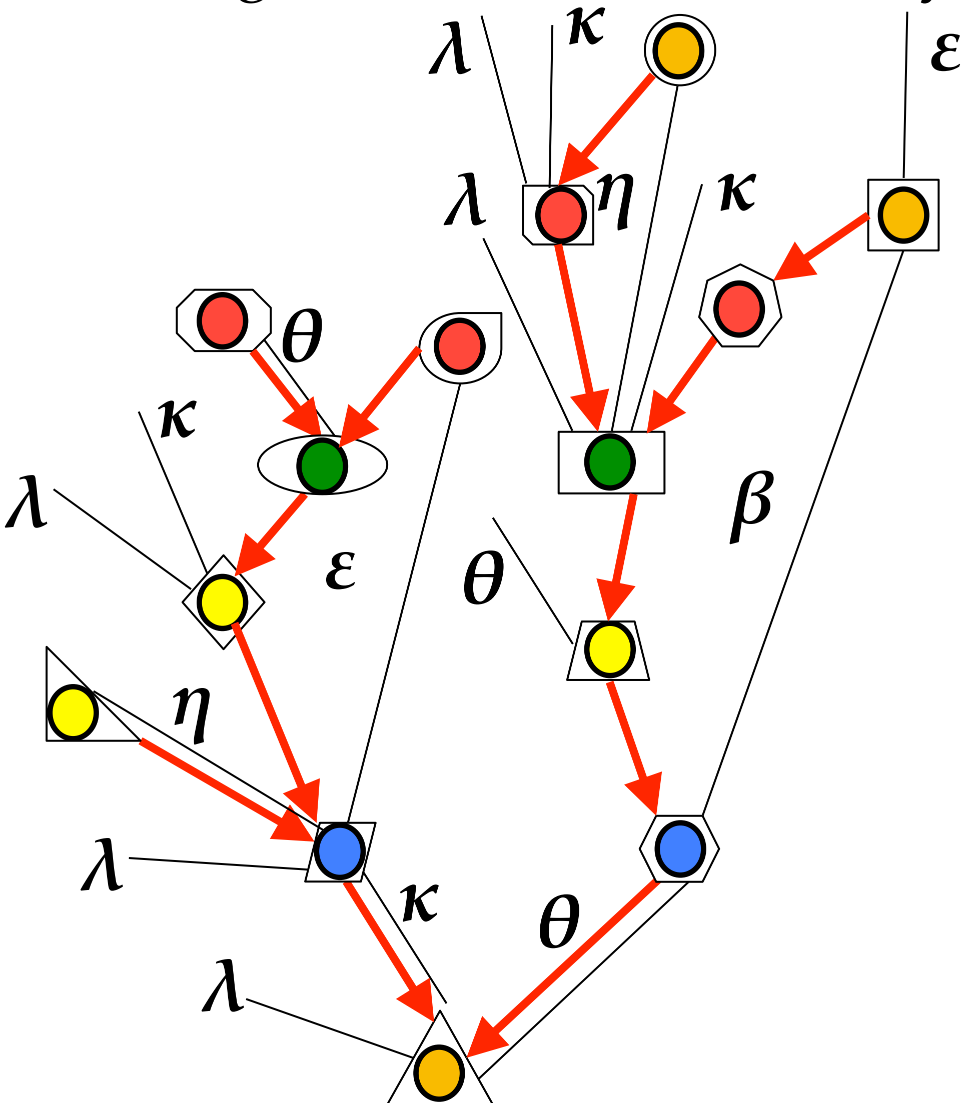
- **<u>Propriété :</u>** Le graphe ainsi créé est une structure arborescente enracinée dans le bloc de type *1* contenant l'élément *1* nommée **arbre cactus.**

Les indices des arrêtes maximales progressent faiblement d'une couleur à l'autre et strictement lors du prochain passage par une même couleur



Bijection

- Quatrième étape : « reconnecter » les polygones appartenant à la même hyper-arrête grâce à une indexation symbolique

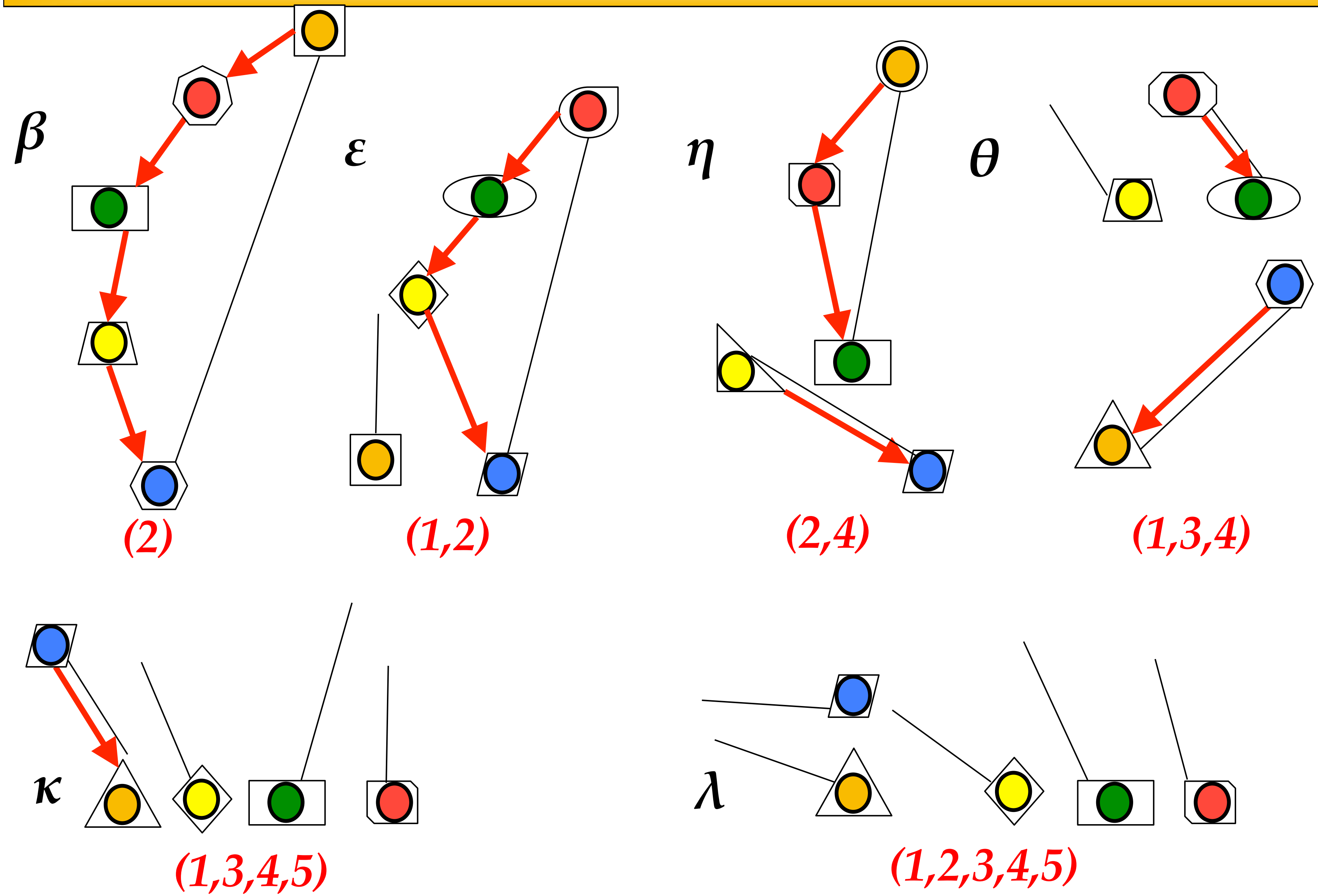


Bijection

- **Définition**: Pour $t = (i_1, i_2, \dots, i_u)$ sous-séquence de $1\dots$r, l'ensemble des polygones de l'arbre cactus associée au même indice symbolique est dit de type t si les racines de polygones en question sont de type i_1, i_2, … et i_u. Soit $\boldsymbol{a}=(a_t)$, ou a_t est le nombre d'ensembles de polygones de type t. On note $T(\boldsymbol{a})$ le nombre d'arbres cactus ayant a_t ensembles de polygones de type t.

- **Propriété**: Pour chaque hyper-arrête de type t dans le cactus partitionné, l'arbre cactus construit contient une suite de polygones de type t.

Bijection



Résultats

- **Théorème** : La construction décrite précédemment est une bijection. Par conséquence :

$$\boxed{\mid C(\mathbf{a}) \mid = \mid T(\mathbf{a}) \mid}$$

- **Propriété** : On peut montrer grâce à la formule de Lagrange :

$$\boxed{\mid T(\mathbf{a}) \mid = \frac{(n-1)!^{r-1}}{\prod_{1 \leq i \leq r} p_i!} \Delta_r(\mathbf{a}) \binom{n}{\mathbf{a}}}$$

Où Δ_r est le déterminant d'une matrice dépendant de ***a*.**

Résultats

- **Théorème** : En conséquence nous avons le théorème suivant :

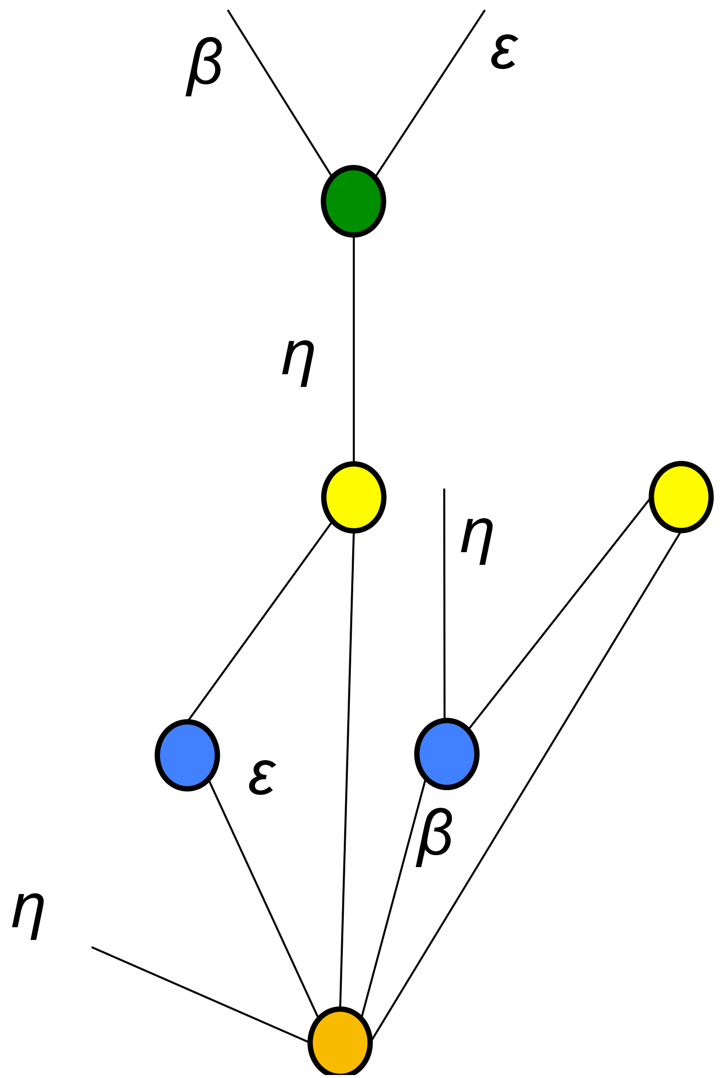
$$\frac{1}{(n-1)!^{r-1}} \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} k^n_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \prod_{1\le i\le r} x_i^{p_i} = \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \sum_{\mathbf{a}} \Delta_r(\mathbf{a}) \binom{n}{\mathbf{a}} \prod_{1\le i\le r} \binom{x_i}{p_i}$$

- **Corollaire** : On peut également montrer :

$$\frac{1}{(n-1)!^{r-1}} \sum_{\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^r \vdash n} k^n_{\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^r} \prod_{1\le i\le r} m_{\lambda^i}(\mathbf{x}^i) = \sum_{\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^r \vdash n} \frac{\sum_{\mathbf{a}} \Delta_r(\mathbf{a}) \binom{n}{\mathbf{a}}}{\prod_i \binom{n-1}{\ell(\lambda_i)-1}} \prod_{1\le i\le r} p_{\lambda^i}(\mathbf{x}^i)$$

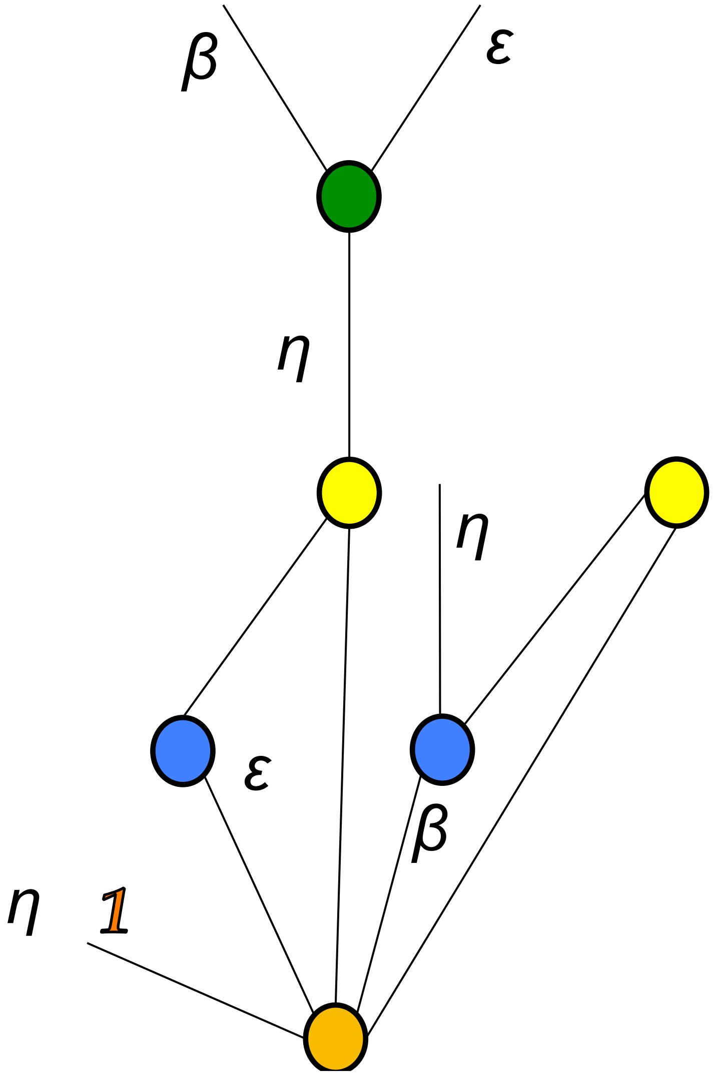
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>On part d'un arbre cactus</u>** :



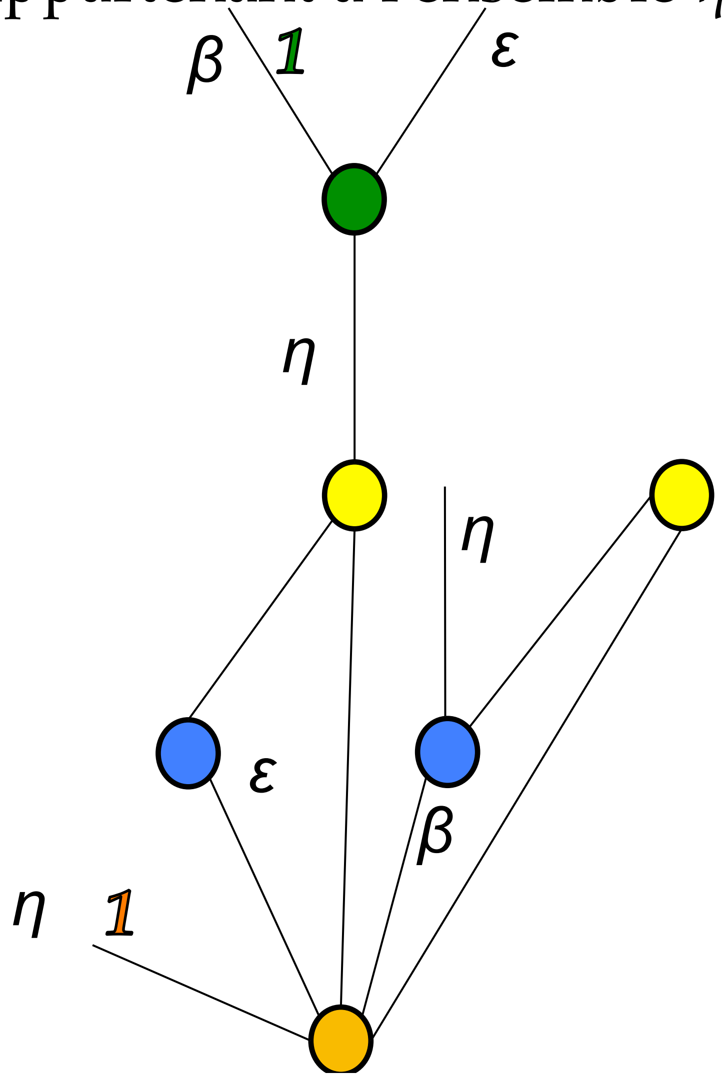
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Initialisation :</u>** l'indice 1 de type 1 est tout à gauche de la racine.



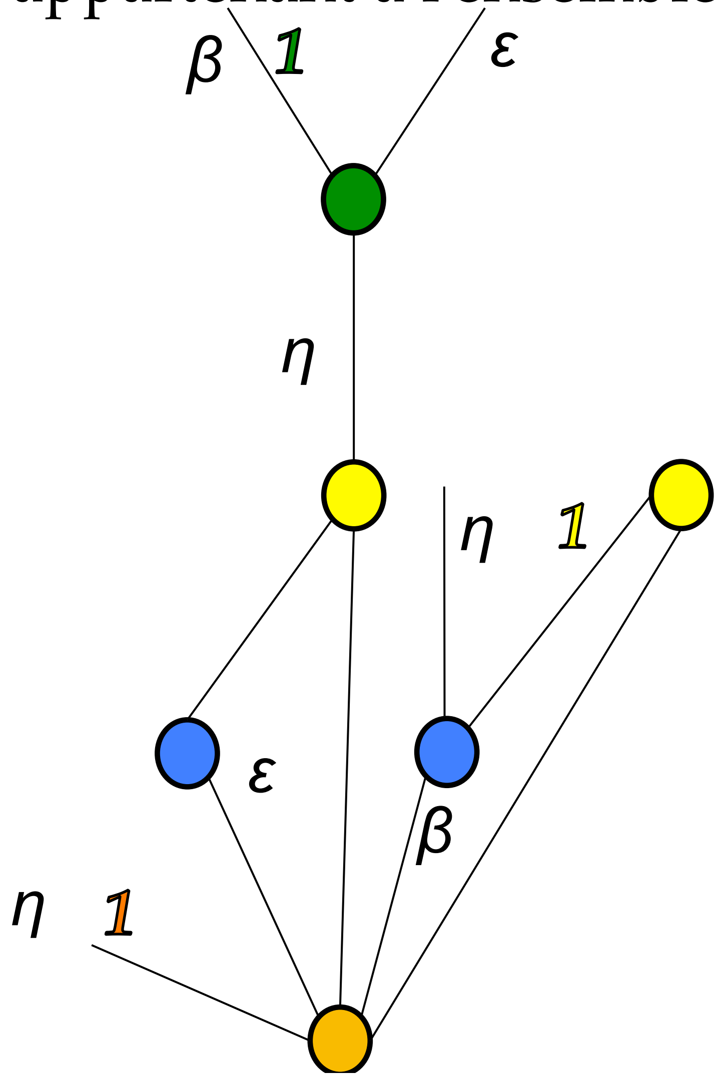
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Deuxième étape :</u>** l'indice 1 de type 4 est tout à gauche du sommet vert appartenant à l'ensemble η.



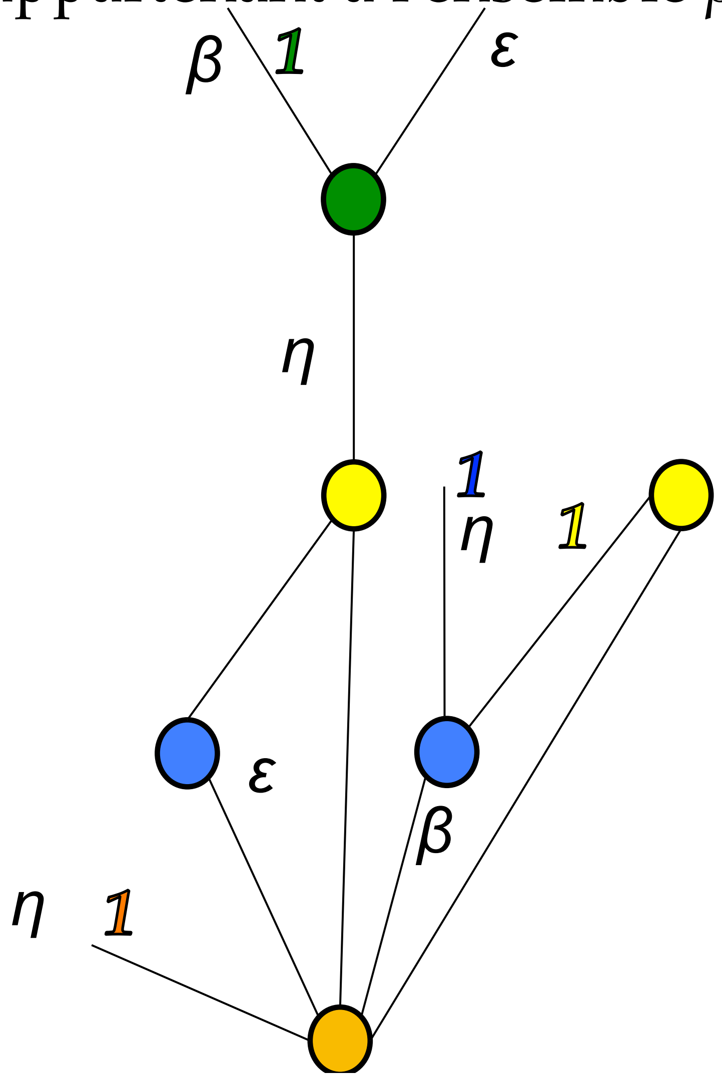
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Troisième étape :</u>** l'indice 1 de type 3 est tout à gauche du sommet jaune appartenant à l'ensemble β.



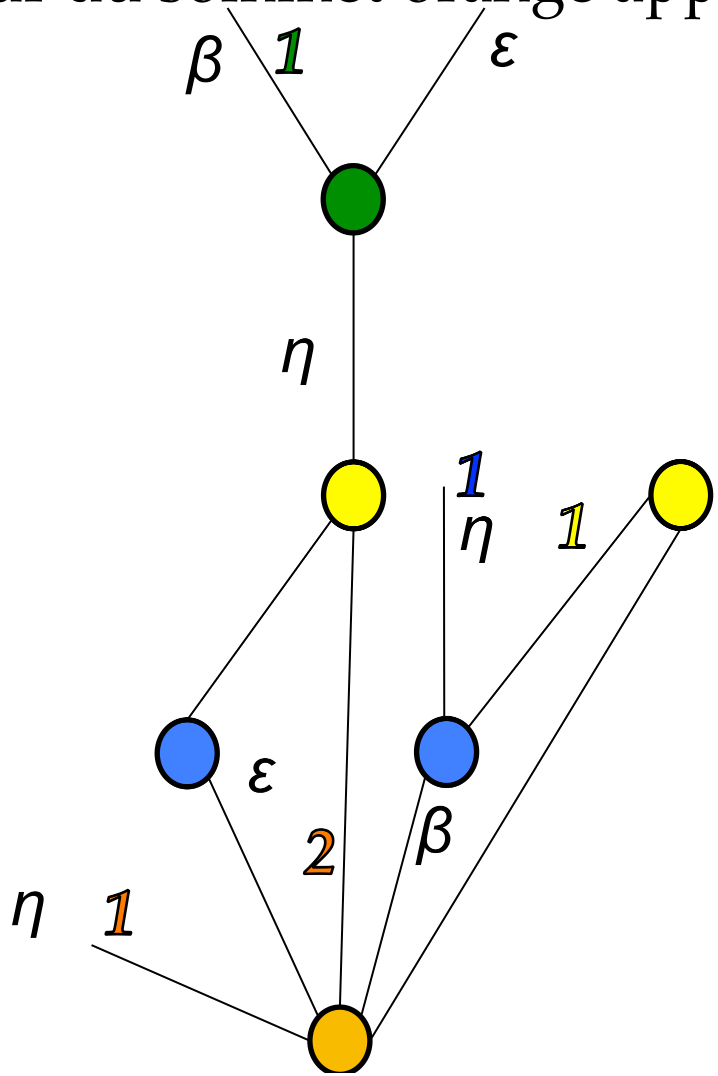
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Quatrième étape :</u>** l'indice 1 de type 2 est tout à gauche du sommet bleu appartenant à l'ensemble β.



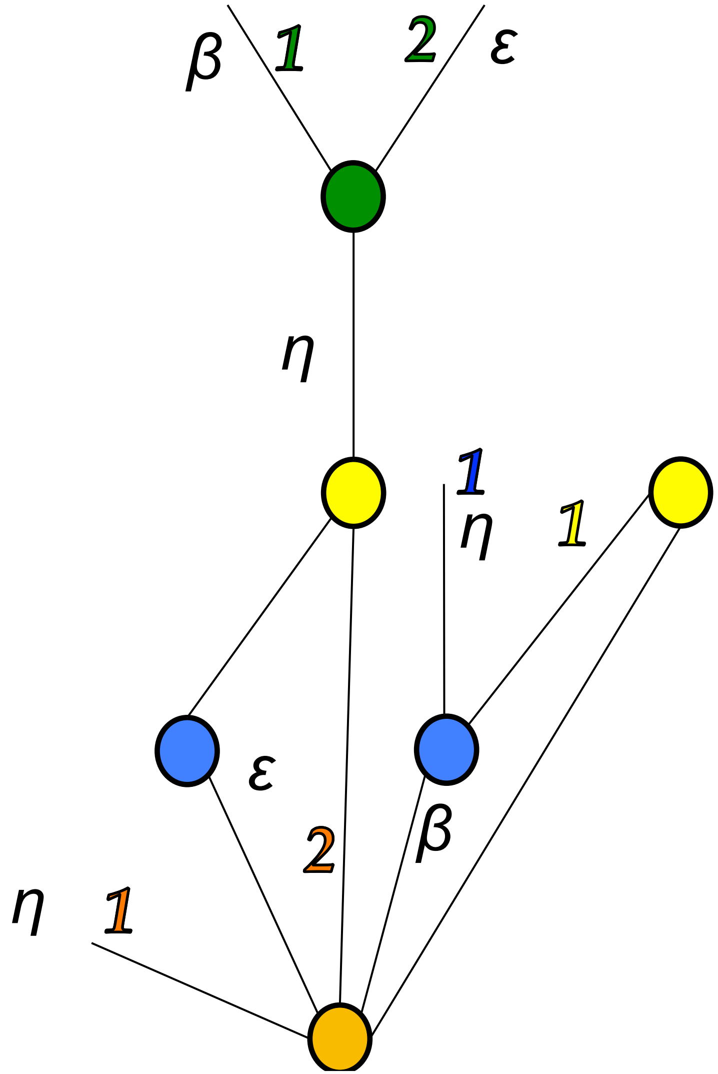
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Cinquième étape :</u>** l'indice 2 de type 1 est le premier non retrouvé autour du sommet orange appartenant au groupe η.



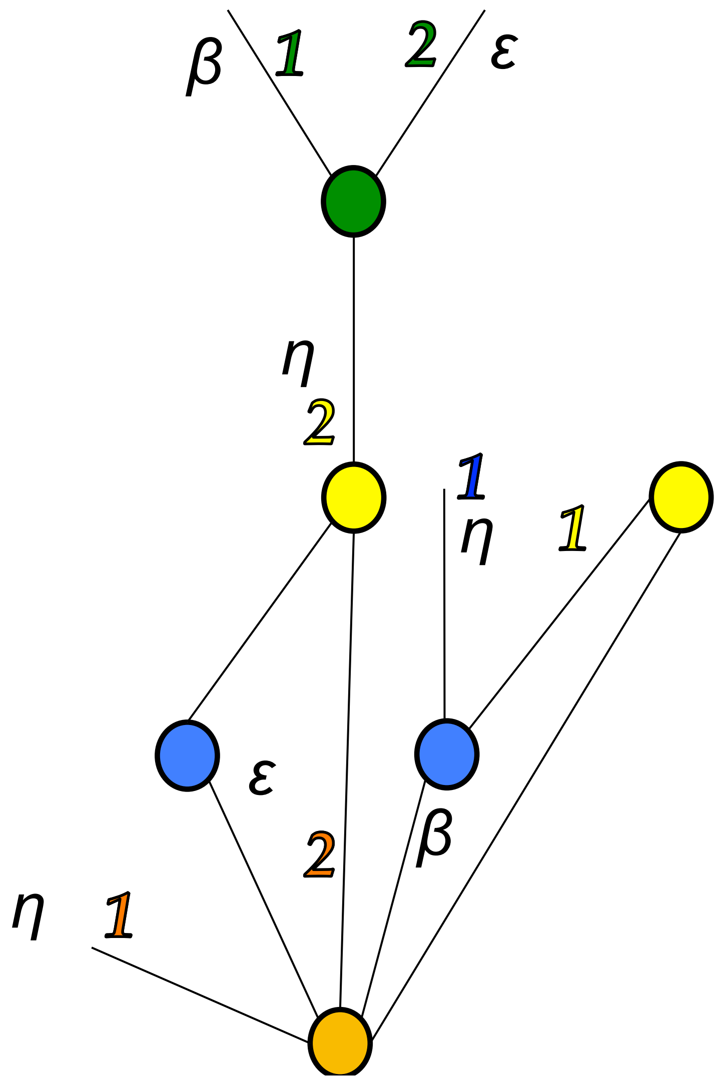
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Et ainsi de suite…</u>**



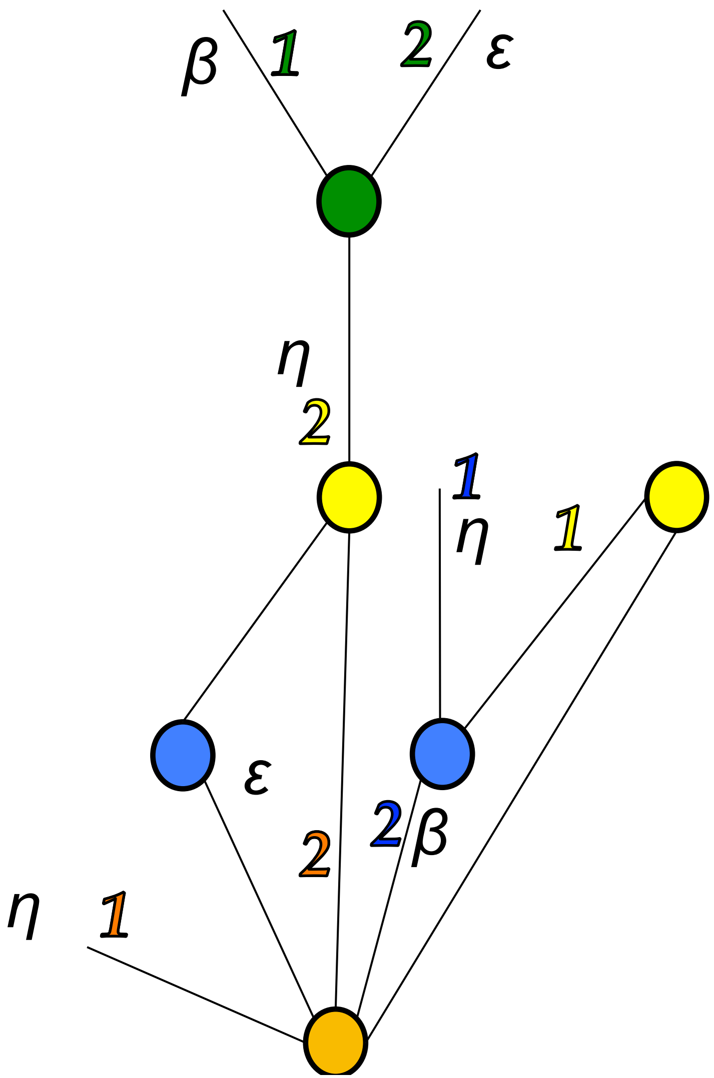
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **Et ainsi de suite…**



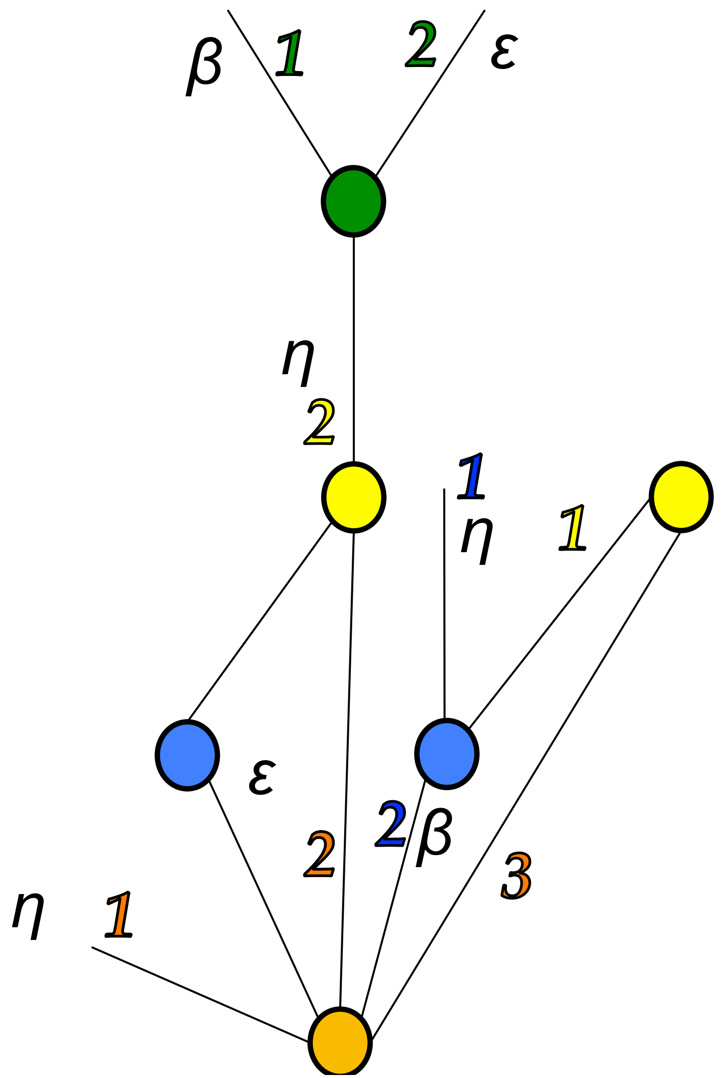
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **Et ainsi de suite…**



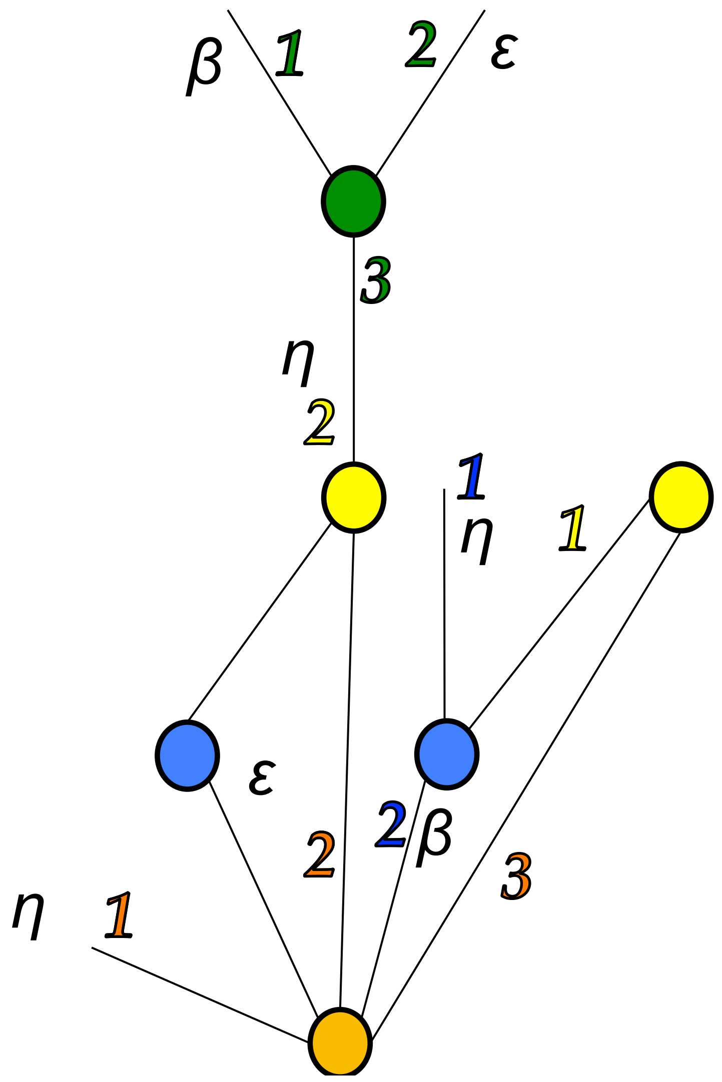
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Et ainsi de suite…</u>**



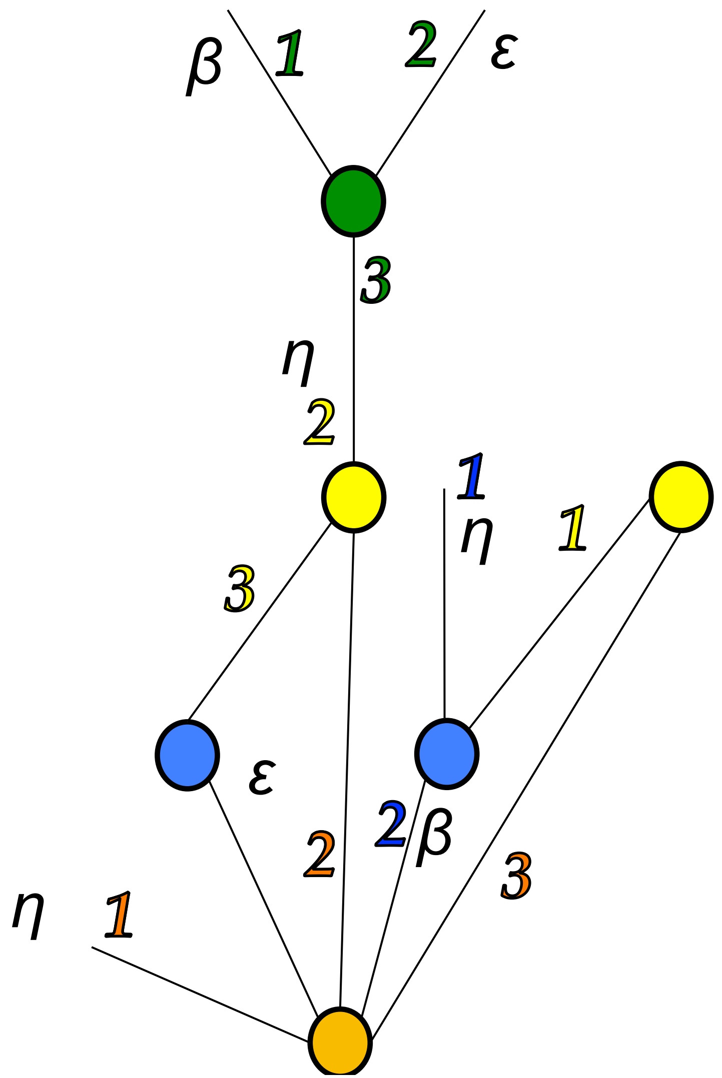
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Et ainsi de suite…</u>**



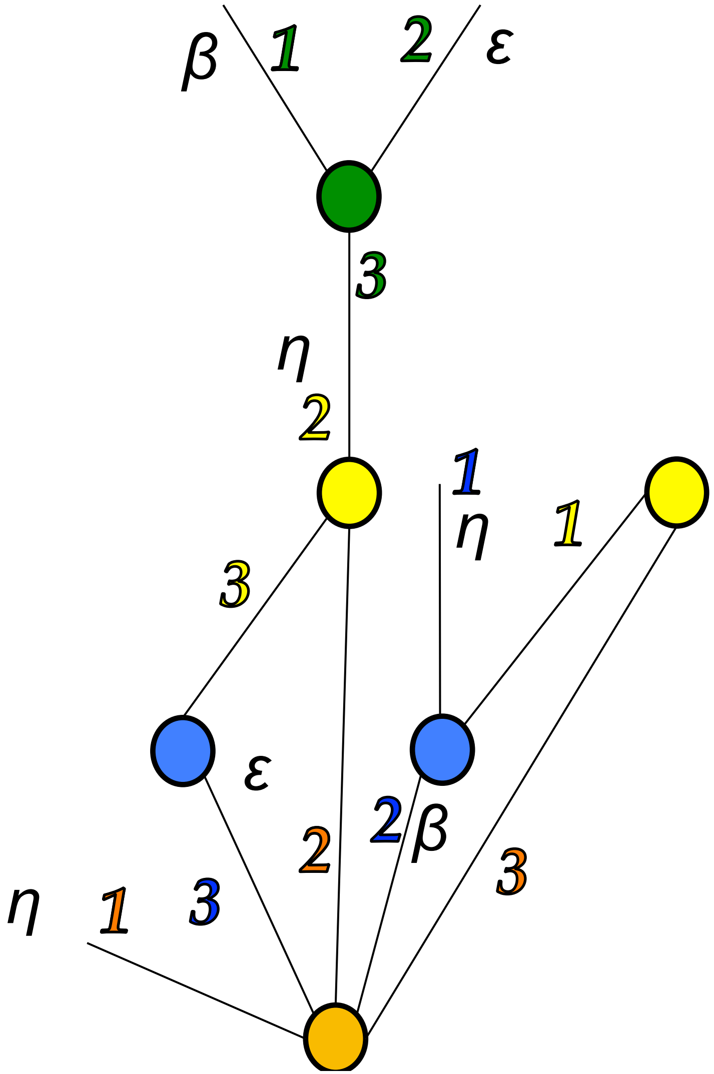
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **<u>Et ainsi de suite…</u>**



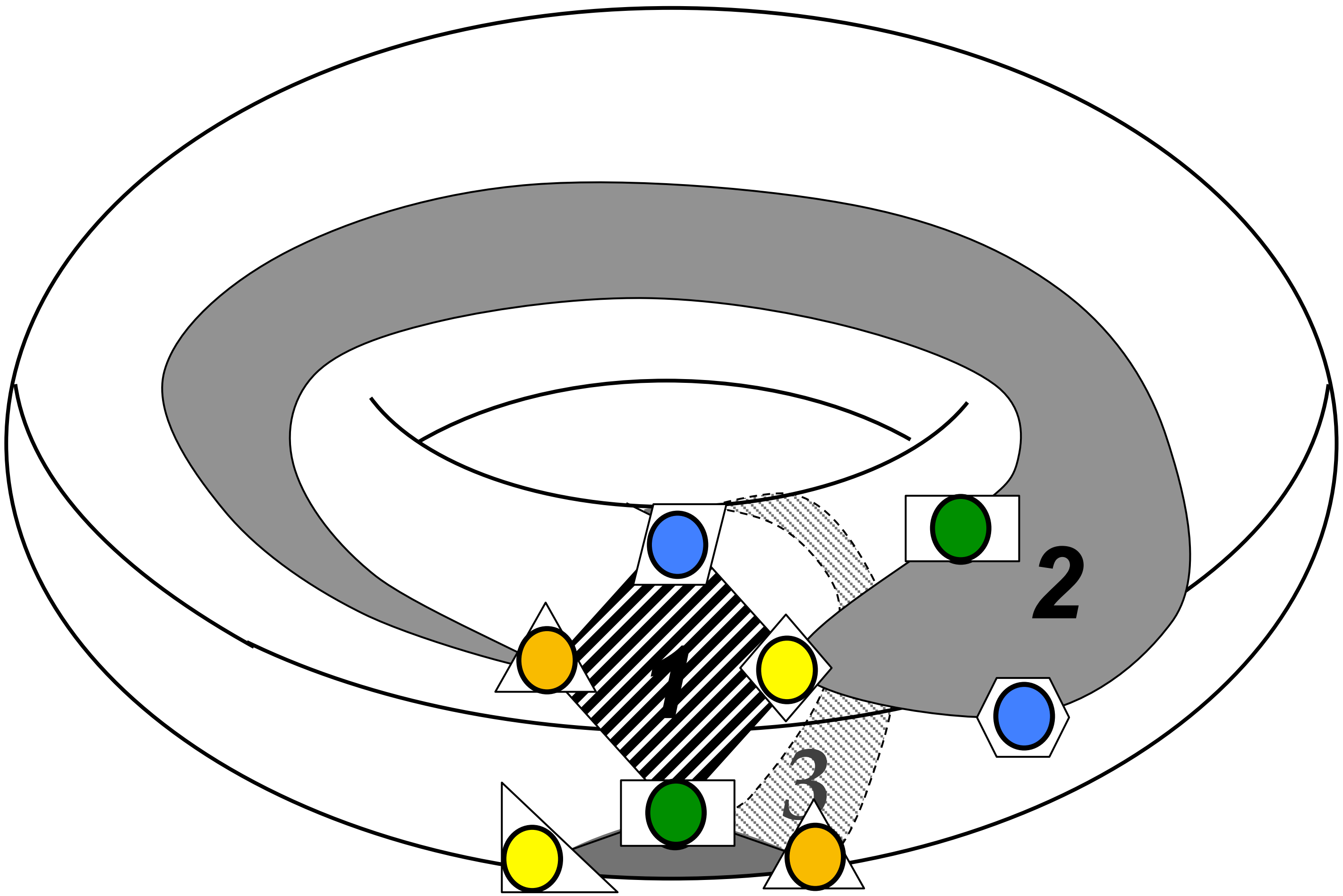
Preuve de la bijection/Reconstruction

- **Et ainsi de suite…**



Preuve de la bijection/Reconstruction

- La constellation partitionnée est reconstruite!



Formule de Jackson

- La formule de Jackson peut se réécrire :

$$\frac{1}{(n!)^{r-1}} \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} k^n_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \prod_{1\le i\le r} x_i^{p_i} = \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_r} \sum_{\mathbf{a}} \binom{n-1}{\mathbf{a}} \prod_{1\le i\le r} \binom{x_i}{p_i}$$

avec : $\sum_t a_t = n-1$

$\sum_{t;i\notin t} a_t = p_i - 1$

Formule de Jackson

- Nous avons donc

$$\sum_{\substack{\sum_t a_t = n \\ \sum_{t; i \notin t} a_t = p_i - \delta_{1i}}} \Delta_r(\mathbf{a}) \binom{n}{\mathbf{a}} = \sum_{\substack{\sum_t a_t = n-1 \\ \sum_{t; i \notin t} a_t = p_i - 1}} n^{r-1} \binom{n-1}{\mathbf{a}}$$

Formule de Jackson

- Ce qui s'écrit pour *r=2* :

$$p_2 \binom{n}{p_1 - 1, p_2} = n \binom{n-1}{p_1 - 1, p_2 - 1}$$

Formule de Jackson

- Ce qui s'écrit pour *r=3* :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a_1,a_2,a_3} (p_2p_3 - a_3(p_3 - a_1))\binom{n}{a_1, a_2, a_3, p_1 - 1 - a_2 - a_3, p_2 - a_3 - a_1, p_3 - a_1 - a_2} \\
&= n^2 \sum_{a_1,a_2,a_3} \binom{n-1}{a_1, a_2, a_3, p_1 - 1 - a_2 - a_3, p_2 - 1 - a_3 - a_1, p_3 - 1 - a_1 - a_2}
\end{aligned}
$$

Merci!