Mathématiques - département MP, S2

11 mars 2006

Table des matières

1 Courbes paramétrées

On se placera toujours dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 1.0.1 *Soient f et g deux fonctions définies et continues respectivement sur les intervalles $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de $\mathbb{R}$. Soit t une variable réelle.*
Pour t appartenant à $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, l'ensemble des points M de coordonnées $(f(t), g(t))$ définit une courbe dont l'équation paramétrique *est* $\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right.$
La variable t est le paramètre*.*
L'ensemble $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ est l'ensemble de définition*.*

Exercice 1.0.1 Quel est l'ensemble de définition de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{t+1} \\ y = \sqrt{1-t} \end{array} \right.$.

Pour tracer la courbe, on cherche l'ensemble des valeurs du paramètre par lesquels on obtient toute la courbe :
- Si les fonctions f et g sont paires ou impaires, on peut restreindre l'ensemble de définition pour tracer la courbe, et utiliser ensuite une symétrie pour finir le tracé
- si les fonction f et g sont périodiques, on peut restreindre l'ensemble de définition pour tracer la courbe, et utiliser ensuite une symétrie pour finir le tracé

Cet ensemble s'appelle *l'ensemble d'étude*.

Exercice 1.0.2 Quel est l'ensemble d'étude de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{array} \right.$

Exercice 1.0.3 Quel est l'ensemble d'étude de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sin(4t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{array} \right.$

Exercice 1.0.4 Quel est l'ensemble d'étude de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t - \frac{1}{t} \end{array} \right.$

Exercice 1.0.5 Quel est l'ensemble d'étude de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = (\cos t)^3 \\ y(t) = (\sin t)^3 \end{array} \right.$

Exercice 1.0.6 Quel est l'ensemble d'étude de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{t}{2} + \sin t \end{array} \right.$

1.1 Équation cartésienne, équation paramétrique, équation polaire

Définition 1.1.1 *Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on appelle courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient cette équation*

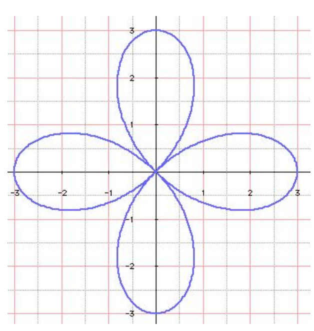
Exemple 1.1.1 *Le cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R admet $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ comme équation cartésienne.*

Remarque 1.1.1 *Une équation cartésienne n'est pas forcément de la forme $y = f(x)$.*

Une courbe dont on a la représentation paramètrée ne peut pas forcément s'écrire sous la forme d'une équation cartésienne $y = f(x)$ car à deux valeurs différentes du paramètre peuvent correspondre plusieurs points de même abscisse.
Néanmoins, en éliminant le paramètre t entre x et y, on peut obtenir une équation de la forme $f(x, y) = 0$.

Définition 1.1.2 *On peut également repérer un point M dans le plan en utilisant sa distance à l'origine O $\rho(\theta)$ et l'angle θ formé par les droites OM et Ox. Ses* coordonnées polaires *sont alors $(\theta, \rho(\theta))$.*

On peut facilement ramener une équation polaire à une équation paramètrée $x = \rho(\theta)\cos\theta$, $y = \rho(\theta)\sin\theta$.
Certaines courbes ont une équation simple en coordonnées polaires : par exemple, la courbe définie par $\rho(\theta) = 3\cos 2\theta$:



1.1.1 La droite

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un point A. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par A. À chaque valeur du paramètre t correspond un point unique de la droite. Réciproquement, à chaque point M de la droite correspond une valeur unique du paramètre t.
Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (α, β) et le point A a pour coordonnées (x_A, y_A) alors la droite est défini par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha t + x_A \\ y(t) = \beta t + y_A \end{array}\right.$
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas unique, ni le point A donc l'équation paramétrique d'une droite n'est pas unique.

Proposition 1.1.1 *Soit la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.*

1. *Si $a \neq 0$, on peut prendre $\left\{\begin{array}{l} x(t) = bt - \frac{c}{a} \\ y(t) = -at \end{array}\right.$ comme paramètrisation.*
2. *Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on peut prendre $\left\{\begin{array}{l} x(t) = bt \\ y(t) = -at - \frac{c}{b} \end{array}\right.$ comme paramètrisation.*

Exercice 1.1.1 Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite D passant par $A(1, -2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1, 2)$.

Exercice 1.1.2 Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite D passant par $A(-3, 4)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(0, 1)$.

Exercice 1.1.3 Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite D passant par $A(0, 1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-1, 1)$.

Exercice 1.1.4 Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite D passant par $A(2, -1)$ et ayant comme vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, 2)$.

Exercice 1.1.5 Soit D la droite d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 1 + 3t \\ y(t) = -1 + t \end{array}\right.$.
Donner une équation cartésienne de cette droite.

Exercice 1.1.6 Soit D la droite d'équation cartésienne $2x + 3y + 1 = 0$. Donner une équation paramétrique de cette droite.

1.1.2 Le cercle

Un cercle est une figure géométrique plane, constituée des points situés à égale distance d'un point nommé centre. La valeur de cette distance est le rayon du cercle. La surface délimitée par un cercle est un disque.

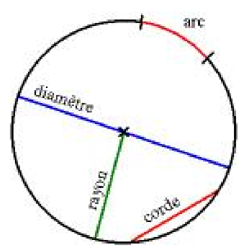
Proposition 1.1.2 *Soient a, b et R réels. Tout système d'équation paramétrique de la forme*

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

représente un cercle de centre (a, b) et de rayon R.
Une équation cartésienne du cercle de centre (a, b) et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

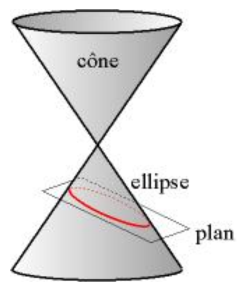
Exercice 1.1.7 Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne du cercle de rayon 2 et de centre $(1, 2)$.

Définition 1.1.3 *On appelle* corde *un segment de droite dont les extrémités se trouvent sur le cercle.*
Un arc *est une portion de cercle délimitée par deux points.*
On appelle rayon *un segment de droite joignant le centre du cercle à un point du cercle. La longueur d'un rayon est évidemment le rayon r du cercle.*
Un diamètre *est une corde passant par le centre ; c'est un segment de droite qui délimite le disque en deux parts de surfaces égales. Le diamètre est composé de deux rayons colinéaires ; sa longueur est $2r$.*

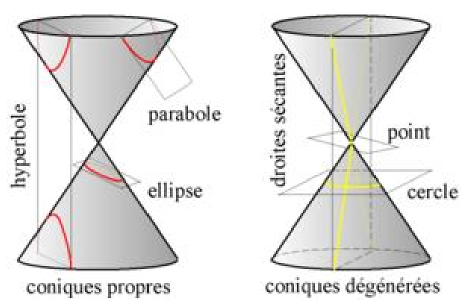


1.1.3 L'ellipse

L'ellipse est une courbe plane qui fait partie de la famille des coniques. Elle est obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône de révolution lorsque ce plan traverse de part en part le cône. Le cercle est alors un cas particulier de l'ellipse(plan de coupe perpendiculaire).



Les ellipses sont des coniques particulières. Les coniques forment une famille de courbes planes résultant de l'intersection d'un plan avec un cône de révolution :

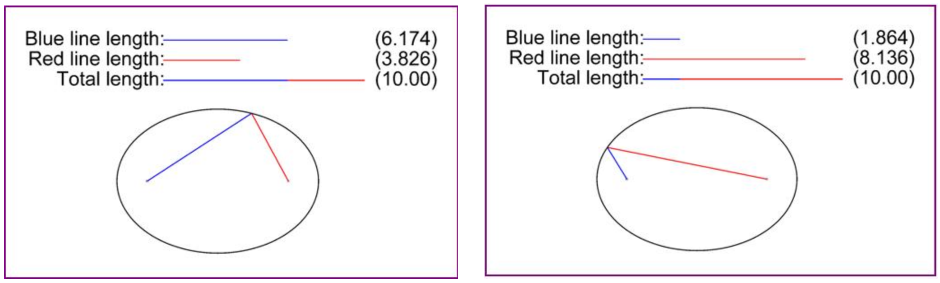


On peut définir les ellipse de plusieurs manières. Par exemple :

Définition 1.1.4 *Soient F et $F^{'}$ deux points distincts du plan. On appelle ellipse de foyers F et $F^{'}$, l'ensemble des points M du plan vérifiant la propriété suivante :*

$$d(M,F) + d(M,F^{'}) = 2a = 2\sqrt{c^2+b^2} \textit{ avec } a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}^{+*}$$

où 2a est la longueur du grand axe, $2c = d(F, F')$, *et 2b est la longueur du petit axe (perpendiculaire au grand axe).*



Proposition 1.1.3 *Soient a et b réels. Tout système d'équation paramètrique de la forme*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

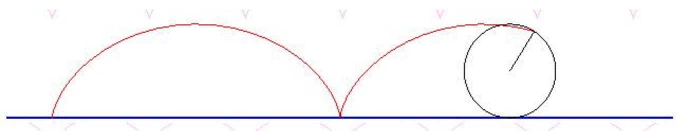
représente une ellipse de centre O, d'axes $(O, \overrightarrow{i})$ *et* $(O, \overrightarrow{j})$ *et de longueur de demi-axes respectives a et b.*
Une équation cartésienne $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

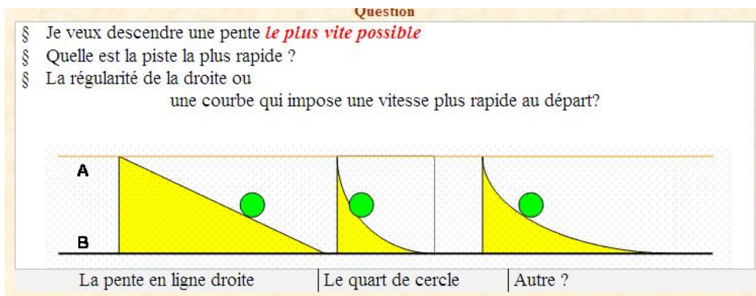
1.1.4 La cycloïde

Définition 1.1.5 *La courbe définie par* $\begin{cases} x(t) & = & R(t - \sin t) \\ y(t) & = & R(1 - \cos t) \end{cases}$ *est appelée* cycloïde.

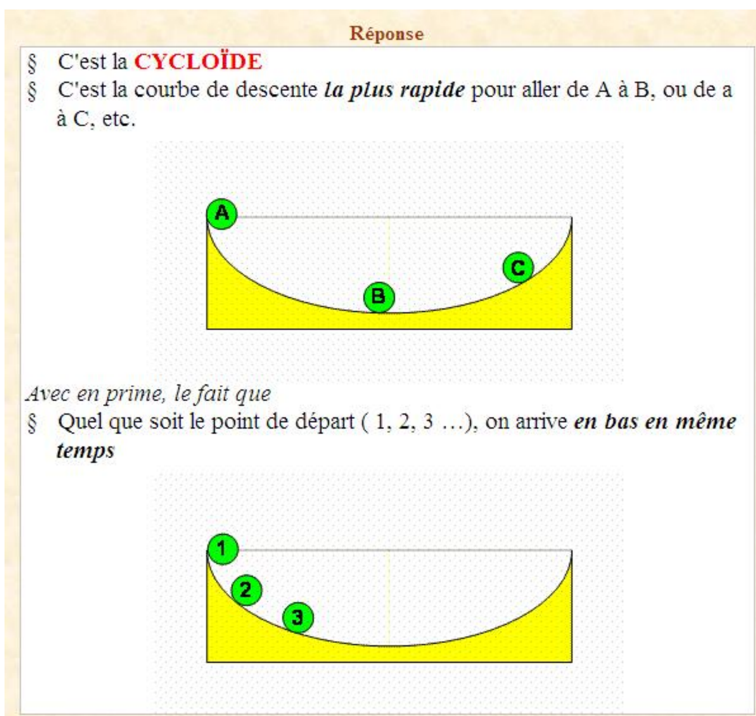
Imaginons qu'un cercle de rayon R roule sans glisser le long d'une droite d. La cycloïde est la courbe décrite par un point A de ce cercle au cours de ce roulement (par exemple la courbe décrite par la valve de la chambre à air de la roue d'une bicyclette).

Cette courbe est très importante dans l'étude des trajectoires :





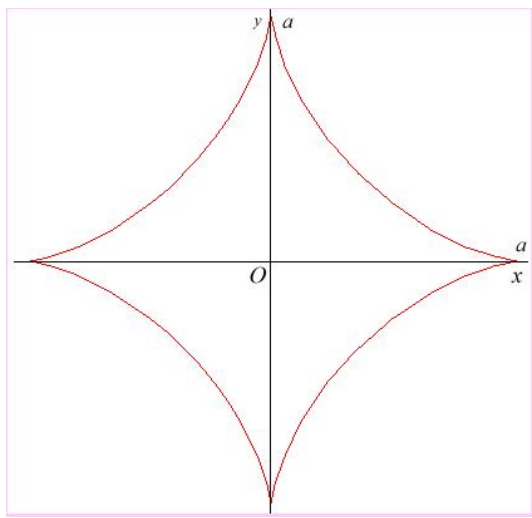
et aussi étonnant que cela puisse paraître :



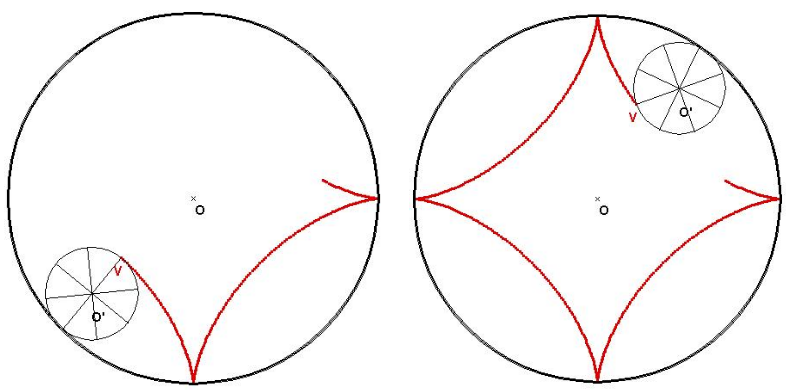
On peut également considérer le déplacement d'un point à l'intérieur du cercle mais les équations sont plus complexes.

1.1.5 L'astroïde

Définition 1.1.6 *Soit a un réel positif. La courbe d'équation paramétrique* $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{cases}$ *est appelée* astroïde.



Cette courbe est engendrée par un point M d'un cercle de rayon r roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon $3r$:

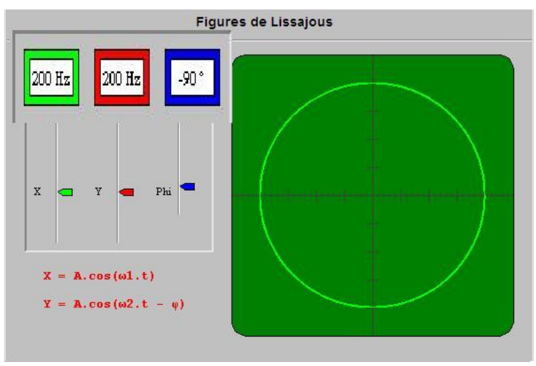


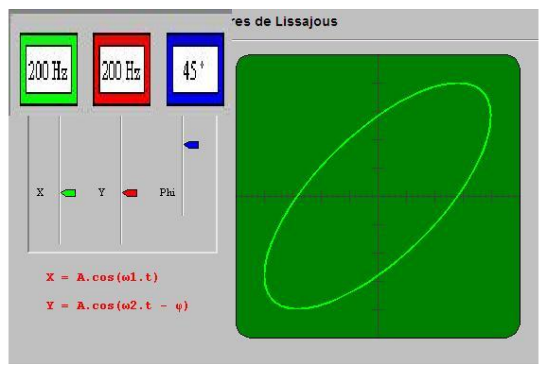
Elle admet pour équation cartésienne $|x|^{2/3}+|y|^{2/3} = a^{2/3}$ ou $(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2 = 0$.

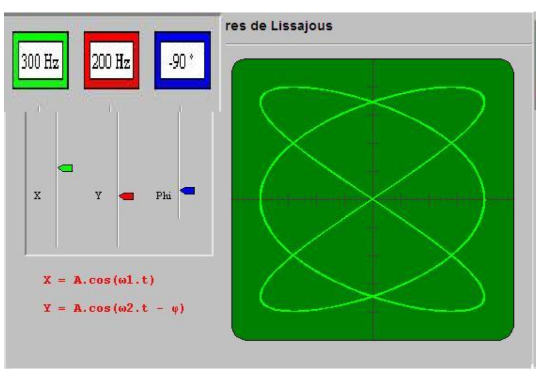
1.1.6 Courbes de Lissajous

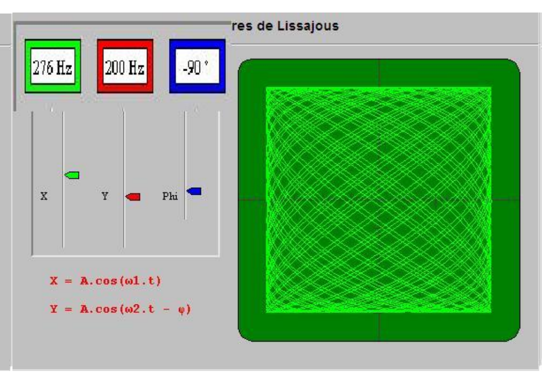
Définition 1.1.7 *Soient a, b et m, n des réels positifs. Les courbes d'équation paramètrique* $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a\sin(mt) \\ y(t) & = & b\cos(nt) \end{array}\right.$ *sont appelées* courbe de Lissajous.

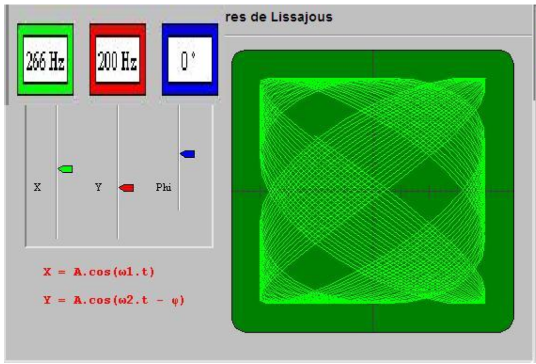
Ces courbes sont notamment obtenues sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X(t) = A\cos(w_x t)$ et sur l'entrée Y la tension $Y(t) = B\cos(w_y t - j)$. La courbe résultante est une courbe de Lissajous.
L'allure de ces courbes change suivant les valeurs de m et n. Elles sont toujours inscrites dans un rectangle car $-a \leq x \leq a$ et $-b \leq y \leq b$.
Si le quotient $\frac{m}{n}$ est rationnel, la coube se ferme car les périodes $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ ont un *multiple* commun (la courbe est alors périodique).

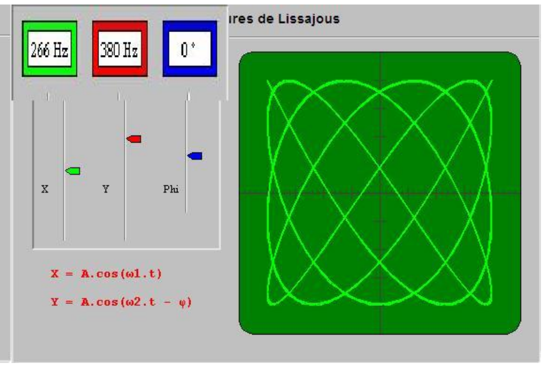


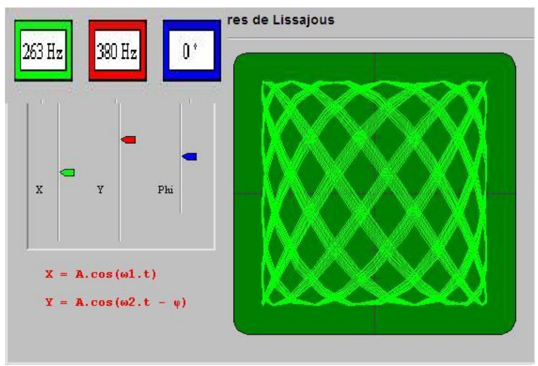












1.2 Tangente et Points stationnaires

Définition 1.2.1 *Soit $M_0(t_0) \in \mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ admet* une tangente en *M_0 si et seulement si la droite (M_0M) avec $M = M(t)$ a une limite quand $M \to M_0$, c'est-à-dire quand $t \to t_0$.*
Cette droite est alors la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0.
On parlera de demi-tangente s'il existe une limite à droite et une limite à gauche.
Cela revient à dire que si les fonctions f et g sont dérivables en t_0 telles que $(f'(t_0), g'(t_0)) \neq (0,0)$ alors le vecteur $(f'(t_0), g'(t_0))$ est le vecteur directeur de la tangente en $M_0(t_0)$ à la courbe $\mathcal{C}$.Dans ce cas, le point $M(t_0)$ est un point ordinaire. *Une représentation de la tangente est alors donnée par*

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

Définition 1.2.2 *Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par* $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right.$ *. Soit t_0 tel que $f^{'}(t_0) = g^{'}(t_0) = 0$. Le point $M(t_0)$ est dit* stationnaire *ou* singulier*.*

Exercice 1.2.1 Étudier les points stationnaires de la courbe paramétrée par
$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{array}\right.$$

Exercice 1.2.2 Étudier les points stationnaires de la courbe paramétrée par
$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = (1+\cos t)\sin 2t \\ y(t) = \cos 2t \end{array}\right.$$

Exercice 1.2.3 Étudier les points stationnaires de la courbe de Lissajous suivante : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos(6t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{array}\right.$

Exercice 1.2.4 On considère une courbe de Lissajous donnée par $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(3t) \\ y(t) & = & \sin(2t) \end{array}\right.$. Quelles sont ces tangentes aux points $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{\pi}{3}$?

Si t_0 est un point singulier, le vecteur $(f^{'}(t_0), g^{'}(t_0))$ est nul. Il faut donc trouver un autre vecteur pour définir la tangente :

Définition 1.2.3 *Soit p tel que $(x^{'}(t_0), y^{'}(t_0)) = (x^{''}(t_0), y^{''}(t_0)) = \cdots = (x^{(p-1)}(t_0), y^{(p-1)}(t_0)) = (0,0)$, et $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0,0)$. La tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ et qui a comme vecteur directeur $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$.*

Exercice 1.2.5 On considère une cycloïde de rayon 1. Quelles sont les tangentes à la courbe aux points $t = \pi$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = 0$?

Exercice 1.2.6 On considère une astroïde. Quelles sont les tangentes à la courbe aux points $t = \pi$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = 0$?

Position de la courbe par rapport à la tangente, nature des points stationnaires

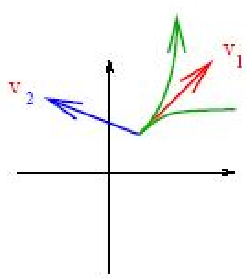
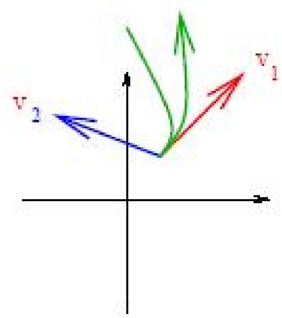
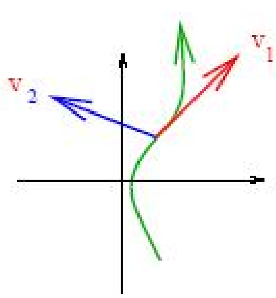
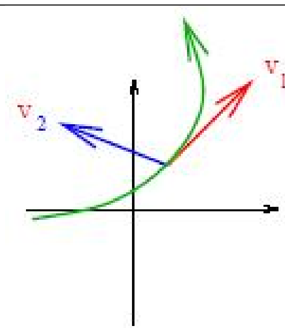
On peut étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente : on définit
$$p = \min\{p \in \mathbb{N}^* / (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0,0)\}$$

et

$q = \min\{q \in \mathbb{N}^*_{>p} / (x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0))$ et $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ ne sont pas colinéaires$\}$

On a plusieurs cas possibles :

1. Si p est pair et q impair, la courbe $\mathcal{C}$ traverse la tangente en $M(t_0)$. C'est *un point de rebroussement de première espèce.*
2. Si p est pair et q pair, la courbe $\mathcal{C}$ ne traverse pas la tangente en $M(t_0)$. C'est *un point de rebroussement de deuxième espèce.*
3. Si p est impair et q impair, la courbe $\mathcal{C}$ traverse la tangente en $M(t_0)$. C'est *un point d'inflexion.*
4. Si p est impair et q pair, la courbe $\mathcal{C}$ touche la tangente en $M(t_0)$. C'est *un méplat* ou un point ordinaire.

p pair et q impair point de rebroussement de 1ère espèce	p pair et q pair point de rebroussement de 2ème espèce
	
p impair et q impair point d'inflexion	p impair et q pair point ordinaire
	

Exercice 1.2.7 Quels sont les points singuliers de la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x=-t^3+t^4 \\ y=t^3 \end{array}\right.$?
Vous préciserez leur nature et l'équation de la tangente en ces points.

Exercice 1.2.8 Quels sont les points singuliers de la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=t^2+t^3 \end{array}\right.$?
Vous préciserez leur nature et l'équation de la tangente en ces points.

Exercice 1.2.9 Quels sont les points singuliers de la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x=t^3 \\ y=t^3+t^5 \end{array}\right.$?
Vous préciserez leur nature et l'équation de la tangente en ces points.

1.3 Points multiples

Il existe d'autres points remarquables dans une courbe :

Définition 1.3.1 *S'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$, on dit que $M(t_1)$ est* un point multiple

Exercice 1.3.1 Quels sont les points multiples de la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos(3t) \\ y(t)=\sin(2t) \end{array}\right.$ pour $t \in [0, 2\pi]$?

Exercice 1.3.2 Quels sont les points multiples de la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t^2+\frac{2}{t} \\ y(t)=t^2+\frac{1}{t^2} \end{array}\right.$

Exercice 1.3.3 Quels sont les points multiples de la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin(3t) \end{array}\right.$ pour $t \in [0, 2\pi]$?

1.4 Branches infinies

Définition 1.4.1 *La courbe $\mathcal{C}$ présente une branche infinie si au moins une de ses coordonnées tend vers l'infini quand t tend vers $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

On a plusieurs cas possibles :

1. $\lim_{t \to t_0} x(t) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$:
   $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = l$ comme asymptote verticale.
2. $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = l \in \mathbb{R}$:
   $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = l$ comme asymptote horizontale.
3. $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$:
   on étudie $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$:
   (a) Si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction Oy.
   (b) Si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction Ox.
   (c) Si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0$, on étudie la fonction $y - ax$:
      i. Si $\lim_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette droite dépend du signe de $y - ax - b$ (on peut utiliser un développement limité pour le trouver).
      ii. Si $\lim_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.
      iii. Si $y(t) - ax(t)$ n'admet pas de limite en t_0, on ne sait pas conclure.
   (d) Si $\frac{y(t)}{x(t)}$ n'admet pas de limite en t_0, on ne peut pas conclure sur la nature de l'arc infini.

Exercice 1.4.1 Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée par
$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{2t^2} \end{cases}$$

Exercice 1.4.2 Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée par
$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{2t^3}{t-1} \end{cases}$$

1.5 Tableau de variation

Lorsque l'on a déterminé la nature des points singuliers et des branches infinies, il reste à étudier les variations des fonctions $f(t)$ et $g(t)$. Cela permet de placer les points remarquables (les point singuliers et les points où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.). Il faut donc un double tableau de variation, prenant en compte les variations de $x(t)$ et de $y(t)$:

Exemple 1.5.1 *L'équation paramétrique d'une cycloïde de rayon 1 est* $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$. *Son domaine d'étude est* $[0, 2\pi]$ *(on complète ensuite par translation). On a* $x^{'}(t) = 1 - \cos t$ *et* $y^{'}(t) = \sin t$*. D'où le tableau de variation suivant :*

t	0		π		2π
$x^{'}(t)$	0	$+$	2	$+$	0
$y^{'}(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	π	$\nearrow$	2π
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

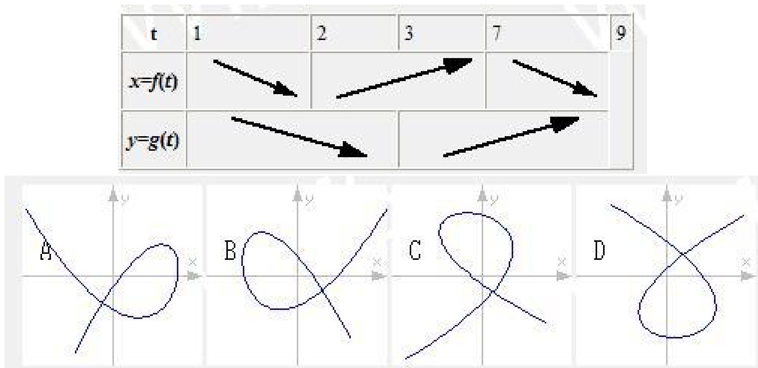
On complète la courbe par symétrie, il faut faire attention à l'effet des symétries sur les croissances des fonctions $x(t)$ et $y(t)$: par une symétrie d'axe Ox, la croissance de $x(t)$ est inversée, et par une symétrie d'axe Oy c'est la croissance de $y(t)$ qui est inversée.

Exercice 1.5.1 Quel est le tableau de variation d'une astroïde ?

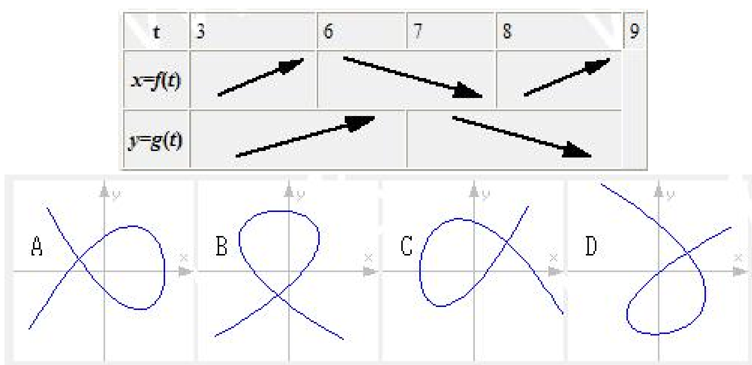
Exercice 1.5.2 On considère une courbe de Lissajous donnée par $\begin{cases} x(t) & = & \cos(3t) \\ y(t) & = & \sin(2t) \end{cases}$. Quel est son tableau de variation ?

Chaque courbe est orientée suivant le sens croissant de t. Deux courbes identiques peuvent avoir deux équations paramétriques différentes, et deux tableaux de variations différents. Il faut pouvoir retrouver l'orientation d'une courbe.

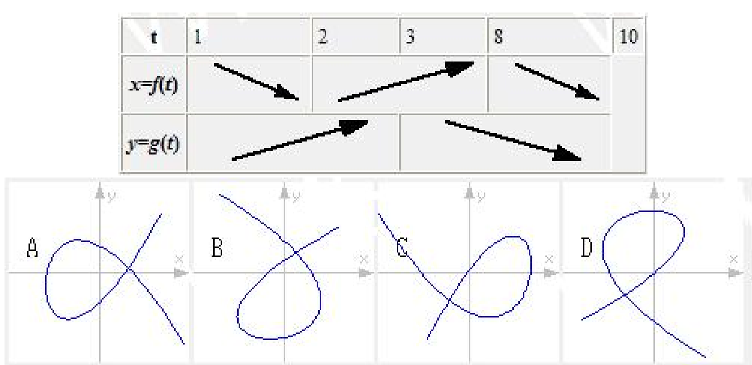
Exercice 1.5.3 Nous avons une courbe paramétrée P, donnée par $(x, y) = (f(t), g(t))$, pour $t \in [1, 9]$. Voici les tableaux de variation des deux fonctions. Parmi les courbes suivantes, laquelle correspond à P ?



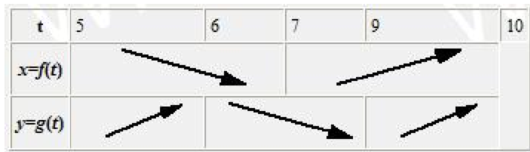
Exercice 1.5.4 Nous avons une courbe paramétrée P, donnée par $(x, y) = (f(t), g(t))$, pour $t \in [3, 9]$. Voici les tableaux de variation des deux fonctions. Parmi les courbes suivantes, laquelle correspond à P ?



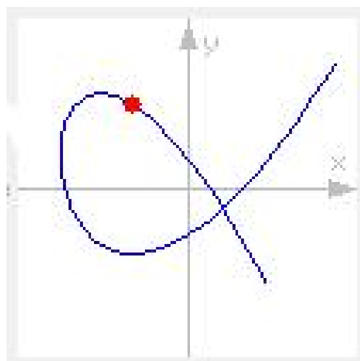
Exercice 1.5.5 Nous avons une courbe paramétrée P, donnée par $(x, y) = (f(t), g(t))$, pour $t \in [1, 10]$. Voici les tableaux de variation des deux fonctions. Parmi les courbes suivantes, laquelle correspond à P ?



Exercice 1.5.6 Nous avons une courbe paramétrée P, donnée par $(x, y) = (f(t), g(t))$, pour $t \in [1, 10]$. Voici les tableaux de variation des deux fonctions.



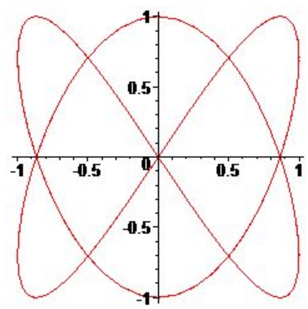
Dans ce dessin de la courbe, le point rouge correspond à une valeur $t = t_0$. À quel intervalle appartient t_0 : [5,6], [6,7], [7,9] ou [9,10] ?



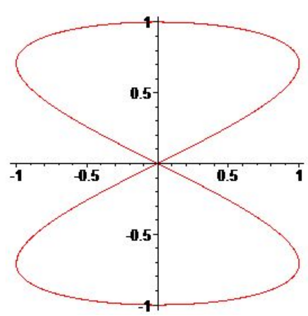
2 Solutions

Solution 1.0.1 Si on pose $f(t) = \sqrt{t+1}$ et $g(t) = \sqrt{1-t}$, on a $\mathcal{D}_f = [-1, +\infty[$ et $\mathcal{D}_g =]-\infty, 1]$ d'où $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = [-1, 1]$.

Solution 1.0.2 La fonction f est périodique de période π et la fonction g est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$ alors la période de la courbe est de 2π. De plus, $x(t+\pi) = x(t)$ et $y(t+\pi) = -y(t)$ donc la portion de la courbe $[\pi, 2\pi]$ s'obtient à partir de cella paramétrée par $[0, \pi]$ par une symétrie par rapport à l'axe Ox. L'ensemble détude est $[0, \pi[$.



Solution 1.0.3 La fonction f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et la fonction g est périodique de période π alors la période de la courbe est de π. De plus $x(t+\frac{\pi}{4}) = -x(t)$ et $y(t+\frac{\pi}{2}) = -y(t)$ et l'ensemble détude est $[0, \frac{\pi}{2}[$.



Solution 1.0.4 On a $x(t) = x(\frac{1}{t})$ et $y(t) = -y(\frac{1}{t})$ donc on peut se restreindre à l'ensemble $[-1,1]\backslash\{0\}$. De plus, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc on peut se restreindre à l'ensemble $]0,1]$.

Solution 1.0.5 Les fonctions sont périodiques, de période 2π donc on peut réduire l'intervalle à $[0,2\pi]$ ou $[-\pi,\pi]$.
La fonction $x(t)$ est paire, et la fonction $y(t)$ est impaire, donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$ ou $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Une symétrie d'axe Ox nous permettra de compléter la courbe.
On a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ donc on peut réduire l'intervalle à $[0,\frac{\pi}{2}]$. Une symétrie d'axe Oy nous permettra de compléter la courbe.
On a $x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$ donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0,\frac{\pi}{4}]$. Une symétrie d'axe $x = y$ nous permettra de compléter la courbe.

Solution 1.0.6 On a $x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t) + \pi$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π et on complètera la courbe par une translation de vecteur $k\pi\overrightarrow{j}$, $k \in \mathbb{Z}$.
On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$

Solution 1.1.1 Une équation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t+1 \\ y(t) = 2t-2 \end{array}\right.$.
En éliminant le t, on obtient une équation cartésienne : $y = 2(x-1) - 2 = 2x - 4$.

Solution 1.1.2 Une équation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -3 \\ y(t) = t+4 \end{array}\right.$.
On obtient une équation cartésienne : $x = -3$.

Solution 1.1.3 Une équation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -t \\ y(t) = t+1 \end{array}\right.$.
En éliminant le t, on obtient une équation cartésienne : $y = -x + 1$.

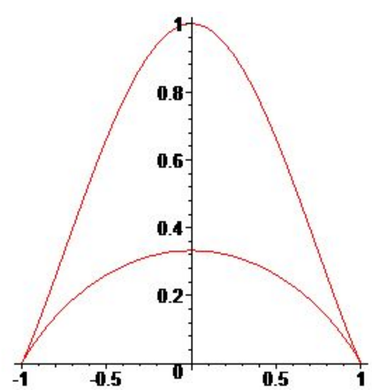
Solution 1.1.4 Un vecteur perpendiculaire au vecteur normal sera un vecteur directeur de cette courbe. Soit $\overrightarrow{u} = (2,-3)$ ce vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{n}$.
Une équation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t+2 \\ y(t) = -3t-1 \end{array}\right.$.
En éliminant le t, on obtient une équation cartésienne : $y = -3(\frac{x-2}{2}) - 1 = \frac{-3}{2}x + 2$.

Solution 1.1.5 On a $y = -1 + (\frac{x-1}{3}) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

Solution 1.1.6 On a $y = \frac{-2x-1}{3} = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$. En posant $x(t) = 3t$ et on a $y(t) = -2t - \frac{1}{3}$.

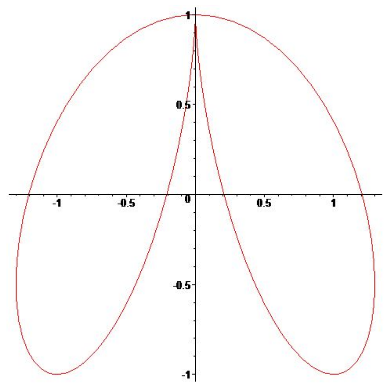
Solution 1.1.7 Une équation cartésienne est $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.
Une équation paramètrique est $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = 2 + 2\sin t \end{array} \right.$

Solution 1.2.1 Ces fonctions sont périodiques, de période 2π. On fait donc l'étude sur $[0, 2\pi[$.
On a $\left\{ \begin{array}{l} x^{'}(t) = \cos t \\ y^{'}(t) = \frac{\cos(t)\sin(t)(-4+\cos(t))}{(-2+\cos(x))^2} \end{array} \right.$
$x^{'}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En ces points $y^{'}(t) = 0$, cela correspond donc aux points singuliers. Il y en a deux sur l'intervalle $[0, 2\pi]$: $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$. Cela correspond aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ qui sont donc les points singuliers.
Voici la courbe de cette fonction :



Solution 1.2.2 Ces fonctions sont périodiques, de période 2π. On fait donc l'étude sur $[0, 2\pi[$.
On a $\left\{ \begin{array}{l} x^{'}(t) = -\sin(t)^2 + \cos(t) + \cos(t)^2 \\ y^{'}(t) = -2\sin(2t) \end{array} \right.$
$y^{'}(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Il y a 4 points dans $[0, 2\pi[$:

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Il n'y a qu'en π que $x^{'}(t) = 0$, cela correspond donc au seul point singulier qui est $(0, 1)$.
Voici la courbe de cette fonction :



Solution 1.2.3 Ces fonctions sont périodiques, de période 2π. On fait donc l'étude sur $[0, 2\pi[$.
On a $\begin{cases} x^{'}(t) = -6\sin(6t) \\ y^{'}(t) = 3\cos(3t) \end{cases}$
$x^{'}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ et $y^{'}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Il y a trois valeurs de t qui correspondent : $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{5\pi}{6}$. Cela correpond aux points $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Solution 1.2.4 On a $x^{'}(t) = -3\sin 3t$ et $y^{'}(t) = 2\cos(2t)$.
En $t = 0$, on a $x^{'}(0) = 0$ et $y^{'}(0) = 2$ donc une tangente parallèle à l'axe Oy. Comme $x(0) = 1$, c'est la droite d'équation $x = 1$.
En $t = \frac{\pi}{4}$, on a $x^{'}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $y^{'}(\frac{\pi}{4}) = 0$ donc une tangente parallèle à l'axe Ox. Comme $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, c'est la droite d'équation $y = 1$.
En $t = \frac{\pi}{3}$, on a $x^{'}(\frac{\pi}{3}) = 0$ et $y^{'}(\frac{\pi}{3}) = -1$ donc une tangente parallèle à l'axe Oy. Comme $x(\frac{\pi}{3}) = -1$, c'est la droite d'équation $x = -1$.

Solution 1.2.5 On a $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$.
Donc, $x^{'}(t) = 1 - \cos t, y^{'}(t) = \sin t$.
En π, on a $x^{'}(\pi) = 2, y^{'}(\pi) = 0$. Le vecteur directeur de la tangente est donc

$(2, 0)$, c'est la droite parallèle à l'axe Ox. On a $y(\pi) = 2$, c'est donc la droite d'équation $y = 2$.
En $\frac{\pi}{2}$, on a $x^{'}(\frac{\pi}{2}) = 1, y^{'}(\frac{\pi}{2}) = 1$. Le vecteur directeur de la tangente est donc $(1, 1)$. Comme $x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 1$. C'est la droite d'équation $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$.
En 0, on a $x^{'}(0) = 0, y^{'}(0) = 0$. Il faut calculer les dérivées secondes : $x^{''}(t) = \sin t, y^{''}(t) = \cos t$, donc $x^{''}(0) = 0, y^{''}(0) = 1$. C'est donc une droite de vecteur de vecteur directeur $(0, 1)$, c'est-à-dire une droite parallle à l'axe Oy. Comme $x(0) = 0$, c'est l'axe Oy.

Solution 1.2.6 On a $\begin{cases} x(t) & = & a\cos^3 t \\ y(t) & = & a\sin^3 t \end{cases}$.
Donc, $x^{'}(t) = -3a\cos^2 t \sin t, y^{'}(t) = 3a\sin^2 t \cos t$.
En $t = \pi$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = 0$, on a $x^{'}(t) = y^{'}(t) = 0$. Il faut donc considérer les dérivées secondes. On a $x^{''}(t) = 6a\cos(t)\sin(t)^2 - 3a\cos(t)^3$ et $y^{''}(t) = -3a\sin(t)^3 + 6a\cos(t)^2\sin(t)$ En π, on a $x^{''}(\pi) = 3a, y^{''}(\pi) = 0$. Le vecteur directeur de la tangente est donc $(3a, 0)$, c'est une droite parallèle à l'axe Ox. On a $y(\pi) = 0$, c'est donc la droite d'équation $y = 0$.
En $\frac{\pi}{2}$, on a $x^{''}(\frac{\pi}{2}) = 0, y^{''}(\frac{\pi}{2}) = -3a$. Le vecteur directeur de la tangente est donc $(0, -3a)$, c'est une droite parallèle à l'axe Oy. On a $x(\pi) = 0$, c'est donc la droite d'équation $x = 0$.
En 0, on a $x^{''}(0) = -3a, y^{''}(0) = 0$. Le vecteur directeur de la tangente est donc $(3a, 0)$, c'est une droite parallèle à l'axe Ox. On a $y(\pi) = 0$, c'est donc la droite d'équation $y = 0$.

Solution 1.2.7 Le seul point singulier correspond au paramètre $t = 0$. On a

$$\begin{aligned}
&x^{'}(t) = -3t^2 + 4t^3 \text{ et } y^{'}(t) = 3t^2 \\
&x^{'}(0) = 0 \text{ et } y^{'}(0) = 0 \\
&x^{''}(t) = -6t + 12t^2 \text{ et } y^{''}(t) = 6t \\
&x^{''}(0) = 0 \text{ et } y^{''}(0) = 0 \\
&x^{'''}(t) = -6 + 24t \text{ et } y^{'}(t) = 6 \\
&x^{'''}(0) = -6 \text{ et } y^{'''}(0) = 6 \\
&x^{(4)}(t) = 24 \text{ et } y^{(4)}(t) = 0 \\
&x^{(4)}(0) = 24 \text{ et } y^{(4)}(0) = 0
\end{aligned}$$

On a donc $p = 3$ et $q = 4$, c'est un point ordinaire.
Le vecteur directeur de la tangente est $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et elle passe par le point $(0,0)$. C'est donc la droite d'équation $y = -x$.

Solution 1.2.8 Le seul point singulier correspond au paramètre $t = 0$. On a

$$\begin{aligned}
&x^{'}(t) = 2t \text{ et } y^{'}(t) = 2t + 3t^2 \\
&x^{'}(0) = 0 \text{ et } y^{'}(0) = 0 \\
&x^{''}(t) = 2 \text{ et } y^{''}(t) = 2 + 6t \\
&x^{''}(0) = 2 \text{ et } y^{''}(0) = 2 \\
&x^{'''}(t) = 0 \text{ et } y^{'''}(t) = 6 \\
&x^{'''}(0) = 0 \text{ et } y^{'''}(0) = 6
\end{aligned}$$

On a donc $p = 2$ et $q = 3$, c'est un point de rebroussement de première espèce.
Le vecteur directeur de la tangente est $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et elle passe par le point $(0,0)$. C'est donc la droite d'équation $y = x$.

Solution 1.2.9 Le seul point singulier correspond au paramètre $t = 0$. On a

$$\begin{aligned}
&x^{'}(t) = 3t^2 \text{ et } y^{'}(t) = 3t^2 + 5t^4 \\
&x^{'}(0) = 0 \text{ et } y^{'}(0) = 0 \\
&x^{''}(t) = 6t \text{ et } y^{''}(t) = 6t + 20t^3 \\
&x^{''}(0) = 0 \text{ et } y^{''}(0) = 0 \\
&x^{'''}(t) = 6 \text{ et } y^{'''}(t) = 6 + 60t^2 \\
&x^{'''}(0) = 6 \text{ et } y^{'''}(0) = 6 \\
&x^{(4)}(t) = 0 \text{ et } y^{'''}(t) = 120t \\
&x^{(4)}(0) = 0 \text{ et } y^{(4)}(0) = 0 \\
&x^{(5)}(t) = 0 \text{ et } y^{(5)}(t) = 120 \\
&x^{(5)}(0) = 0 \text{ et } y^{(5)}(0) = 120
\end{aligned}$$

On a donc $p = 3$ et $q = 5$, c'est un point d'inflexion.
Le vecteur directeur de la tangente est $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et elle passe par le point $(0, 0)$.
C'est donc la droite d'équation $y = x$.

Solution 1.3.1 On cherche t_1, t_2 tels que $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, $t_1 \neq t_2$ et

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \cos(3t_1) = \cos(3t_2) \\ \sin(2t_1) = \sin(2t_2) \end{array}\right. & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3t_1 = 3t_2 + 2k_1\pi \text{ ou } 3t_1 = -3t_2 + 2k_1\pi \\ 2t_1 = 2t_2 + 2k_2\pi \text{ ou } 2t_1 = \pi - 2t_2 + 2k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1 = t_2 + \frac{2k_1\pi}{3} \text{ ou } t_1 = -t_2 + \frac{2k_1\pi}{3} \\ t_1 = t_2 + k_2\pi \text{ ou } t_1 = \frac{\pi}{2} - t_2 + k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1 - t_2 = \frac{2k_1\pi}{3} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{2k_1\pi}{3} \\ t_1 - t_2 = k_2\pi \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

On cherche donc les solutions des quatre systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 - t_2 = \frac{2k_1\pi}{3} \\ t_1 - t_2 = k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 - t_2 = \frac{2k_1\pi}{3} \\ t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 + t_2 = \frac{2k_1\pi}{3} \\ t_1 - t_2 = k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 + t_2 = \frac{2k_1\pi}{3} \\ t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Comme on cherche des solutions dans $[0, 2\pi]$, l'écart entre t_1 et t_2 ne peut pas dépasser 2π et leur somme ne peut pas dépasser 4π.
Pour résoudre (1), on cherche $0 \leq k_1 \leq 2$ et $0 \leq k_2 \leq 1$ tels que $\frac{2k_1\pi}{3} = \frac{k_2\pi}{2}$).
Il n'y a pas de solution.
Pour (2), plusieurs couples (k_1, k_2) peuvent correspondre. Il faut que $0 \leq k_1 \leq 3$ et $0 \leq k_2 \leq 3$. On considère donc les couples $(k_1, k_2) = (0, 1)$ ou $(0, 2)$ ou $(0, 3)$ ou $(1, 0)$ ou $(1, 1)$ ou $(1, 2)$ ou $(1, 3)$ ou $(2, 0)$ ou $(2, 1)$ ou $(2, 2)$ ou $(2, 3)$ ou $(3, 0)$ ou $(3, 1)$ ou $(3, 2)$. Parmi ceux-çi, seuls ceux qui nous donnent $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ avec $t_1 \neq t_2$ nous intéresse. Cela nous donne les solutions suivantes :

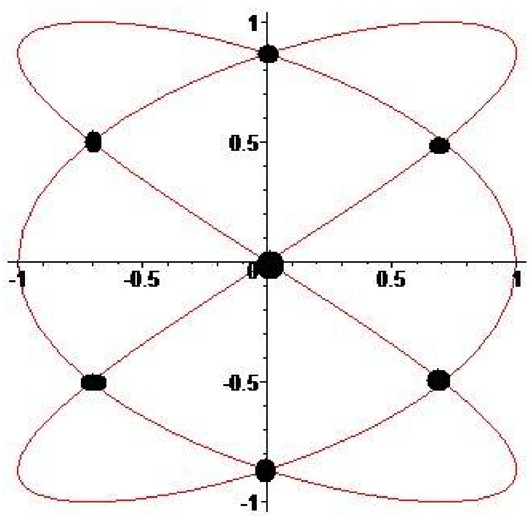
1. $(t_1, t_2) = (\frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ avec $(k_1, k_2) = (1, 1)$
2. $(t_1, t_2) = (\frac{19\pi}{12}, \frac{11\pi}{12})$ avec $(k_1, k_2) = (1, 2)$

3. $(t_1, t_2) = (\frac{17\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$ avec $(k_1, k_2) = (2, 1)$.
4. $(t_1, t_2) = (\frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ avec $(k_1, k_2) = (2, 2)$.

Pour (3), plusieurs couples (k_1, k_2) peuvent correspondre. Il faut que $0 \leq k_1 \leq 5$ et $0 \leq k_2 \leq 1$. On considère donc les couples $(k_1, k_2) = (0, 1)$ ou $(1, 0)$ ou $(1, 1)$ ou $(2, 0)$ ou $(2, 1)$ ou $(3, 0)$ ou $(3, 1)$ ou $(4, 0)$ ou $(4, 1)$ ou $(5, 0)$ ou $(5, 1)$. Parmi ceux-çi, seuls ceux qui nous donnent $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ avec $t_1 \neq t_2$ nous intéresse. Cela nous donne les solutions suivantes :

1. $(t_1, t_2) = (\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ avec $(k_1, k_2) = (2, 1)$
2. $(t_1, t_2) = (\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ avec $(k_1, k_2) = (3, 1)$
3. $(t_1, t_2) = (\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ avec $(k_1, k_2) = (4, 1)$

(4) ne nous donne pas de solution.
Les points multiples correspondent donc aux couples (t_1, t_2) suivant : $(\frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$, $(\frac{19\pi}{12}, \frac{11\pi}{12})$, $(\frac{17\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$, $(\frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$, $(\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$. Les points multiples sont donc $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 0)$, $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.
On retrouve bien les 7 points de la figure :



Solution 1.3.2 On cherche $t_1 \neq t_2$ tels que

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} t_1^2 + \frac{2}{t_1} = t_2^2 + \frac{2}{t_2} \\ t_1^2 + \frac{2}{t_1^2} = t_2^2 + \frac{2}{t_2^2} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} t_2^2 - t_2^2 = \frac{2}{t_1} - \frac{2}{t_2} = 2\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} \\ t_2^2 - t_1^2 = \frac{2}{t_1^2} - \frac{2}{t_2^2} = 2\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_1^2 t_2^2} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 = \frac{2}{t_1 t_2} \\ 1 = \frac{1}{t_1^2 t_2^2} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} t_1 t_2 = 1 \\ t_1 + t_2 = 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} t_1 t_2 = -1 \\ t_1 + t_2 = -2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} t_2 = \frac{1}{t_1} \\ t_1^2 - 2t_1 + 1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} t_2 = -\frac{1}{t_1} \\ t_1^2 + 2t_1 - 1 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On résoud $t_1^2 - 2t_1 + 1 = 0$ et $t_1 + 2t_1 - 1 = 0$. La première equation nous donne $t_1 = 1$, ce qui nous donnerait aussi $t_2 = 1$, c'est donc impossible. La deuxième équation nous donne $t_1 = -1 + \sqrt{2}$ et donc $t_2 = -1 - \sqrt{2}$. Le point double est donc $M(t_1) = (5, 6)$.

Solution 1.3.3 On cherche t_1, t_2 tels que $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, $t_1 \neq t_2$ et

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \cos(t_1) = \cos(t_2) \\ \sin(3t_1) = \sin(3t_2) \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_2 + 2k_1\pi \text{ ou } t_1 = -t_2 + 2k_1\pi \\ 3t_1 = 3t_2 + 2k_2\pi \text{ ou } 3t_1 = \pi - 3t_2 + 2k_2\pi \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_2 + 2k_1\pi \text{ ou } t_1 = -t_2 + 2k_1\pi \\ t_1 = t_2 + \frac{2k_2\pi}{3} \text{ ou } t_1 = \frac{\pi}{3} - t_2 + \frac{2k_2\pi}{3} \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 - t_2 = 2k_1\pi \text{ ou } t_1 + t_2 = 2k_1\pi \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k_2\pi}{3} \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On cherche donc les solutions des quatre systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 - t_2 = 2k_1\pi \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 - t_2 = 2k_1\pi \\ t_1 + t_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k_2\pi}{3} \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2k_1\pi \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2k_1\pi \\ t_1 + t_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k_2\pi}{3} \end{array} \right. \text{pour } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

En procédant comme dans l'exemple (1.3.1), on trouve que les points multiples sont $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Solution 1.4.1 $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $\pm\infty$ si $t \to \pm\infty$ ou $t \to 0$. On étudie ces deux cas :

1. On a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$. On étudie donc le rapport : $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$. On a donc une direction asymptotique de pente 1. On étudie alors $y(t) - x(t)$: $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) - x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} = 0$ et donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote.
   En étudiant le signe de $y(t) - x(t)$ quand $t \to \pm\infty$, on remarque que c'est positif lorsque $t \to -\infty$ et négatif lorsque $t \to +\infty$ ($\frac{1}{2t^2}$ est négligeable devant $-\frac{1}{t}$). La courbe est donc au dessous de l'asymptote lorsque $t \to +\infty$ et que dessus lorsque $t \to -\infty$).
2. On a $\lim\limits_{t\to 0^\pm} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to O^\pm} y(t) = +\infty$. On étudie donc le rapport : $\lim\limits_{t\to 0^\pm} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$. La courbe admet donc une branche parabolique dans la direction Oy.

Solution 1.4.2 $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $\pm\infty$ si $t \to \pm\infty$, ou $t \to 1$ ou $t \to -1$. On étudie ces trois cas :

1. $\frac{y(t)}{x(t)} = t + 1$ donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$. La courbe admet une branche parabolique dans la direction Oy.
2. $\lim\limits_{t\to 1^\pm} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^\pm} y(t) = 1$. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = 1$. De plus, la fonction y est décroissante au voisinage de -1 ($y^{'}(t) < 0$ au voisinage de $t = -1$) donc la branche infinie est au dessus de l'asymptote lorsque $t \to 1^-$ et en dessous de l'asymptote lorsque $t \to t^+$.
3. On a $\frac{y(t)}{x(t)} = t + 1$ donc $\lim\limits_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 2$. On a $y(t) - 2x(t) = \frac{2t^3(t+1-2)}{t^2-1} = \frac{2t^3}{t+1}$. D'où $\lim\limits_{t\to 1} y(t) - 2x(t) = 1$ et la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 1$ lorsque $t \to 1$. Le signe de $y(t) - 2x(t) - 1$ est celui de $\frac{2t^3}{t^2-1} - 1$. Cette fonction est croissante au voisinage de 1 donc la branche infinie est en dessous de l'asymptote lorsque $t \to 1^-$ et en dessus lorsque $t \to 1^+$.

Solution 1.5.1 L'équation paramétrique d'une astro"ıde est $\begin{cases} x(t) & = & a\cos^3 t \\ y(t) & = & a\sin^3 t \end{cases}$
Son domaine d'étude est $[0, \pi]$ (on complète ensuite par symétrie). On a $x^{'}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ et $y^{'}(t) = 3a\sin^2 t \cos t$. D'où le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x^{'}(t)$	0	$-$	0	$-$	0
$y^{'}(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$
$y(t)$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

En complètant le tableau, on obtient

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x^{'}(t)$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$y^{'}(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	a
$y(t)$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0

Solution 1.5.2 Son domaine d'étude est $[0, \frac{\pi}{2}]$ (on complète ensuite par symétrie). On a $x^{'}(t) = -3\sin(3t)$ et $y^{'}(t) = 2\cos(2t)$. D'où le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x^{'}(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	3
$y^{'}(t)$	2	$+$	0	$-$		$-$	-2
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

En complètant le tableau, on obtient

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x^{'}(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	3	$+$	0	$-$		$-$	0
$y^{'}(t)$	2	$+$	0	$-$		$-$	-2	$-$		$-$	0	$+$	2
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

et

t	π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$x^{'}(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$		$+$	0
$y^{'}(t)$	2	$+$	0	$-$		$-$	-2	$-$		$-$	0	$+$	2
$x(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Solution 1.5.3 la fonction $x(t)$ varie trois fois, cela élimine rapidement les courbes A et B pour lesquelles $x(t)$ ne change qu'une fois de croissance.
Il faut maintenant départager les courbes C et D.
Sur la courbe C, le premier brin en bas à gauche correspond a $x(t)$ croissante et $y(t)$ croissante, et le deuxième brin (en bas à droite correspond à $x(t)$ décroissante et $y(t)$ croissante. Aucune de ces possibilités ne concorde avec le tableau proposé.
Sur la courbe D, le premier brin en haut à gauche correspond à $x(t)$ croissante et $y(t)$ décroissante, cela ne convient pas non plus. Par contre le deuxième brin correspond à $x(t)$ décroissante et $y(t)$ décroissante. Si l'on poursuit la courbe dans ce sens là, on constate qu'elle correpond au tableau de variation. La bonne réponse est donc D.

Solution 1.5.4 La bonne réponse est B.

Solution 1.5.5 La bonne réponse est D.

Solution 1.5.6 La bonne réponse est [5,6].