Cours de mathématiques - Alternance Gea

Anne Fredet

12 octobre 2005

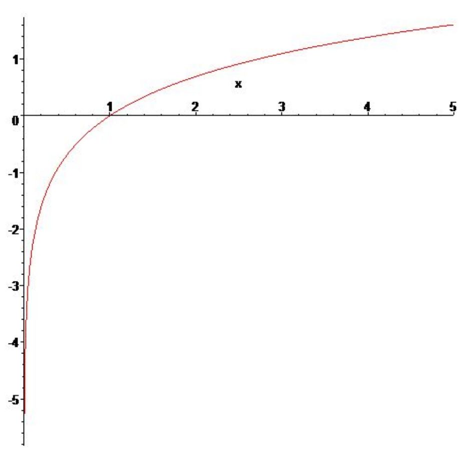
1 Logarithme

Définition 1.1 *Le* logarithme népérien *est la fonction notée* ln *et définie sur* $]0;+\infty[$ *comme étant la primitive de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *sur cet intervalle, qui s'annule en* $x = 1$*.*

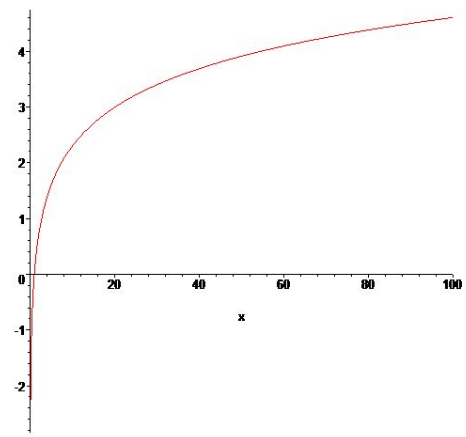
On a le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	‖	$+$	1	$+$	
ln	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

et la courbe de ln entre 0 et 5 est :



et entre 0 et 100 :



- De la stricte croissance et l'égalité $\ln 1 = 0$ on en déduit :
  - $\ln x > 0$ équivaut à $x \in\in]1; +\infty[$;
  - $\ln x < 0$ équivaut à $x \in\in]0; 1[$;
  - $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$;
  - $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.
    Autrement dit, deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs logarithmes.

Remarque : Ces résultats seront utiles pour résoudre des équations du type "$\ln(u(x)) = \ln(v(x))$" et des inéquations du type "$\ln(u(x)) \leq \ln((v(x)))$".

Proposition 1.1 *Si a et b sont deux réels* **strictement positifs** *et n est un entier alors :*

1. $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
3. $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
4. $ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln(a^n) = n \ln(a)$
6. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

La fonction réciproque du logarithme népérien est la fonction exponentielle.

2 Exercices

Exercice 2.1 Trouver x tel que $\ln(3x+1)=0$.

Exercice 2.2 Trouver x tel que $\ln(3x+1)\leq 0$.

Exercice 2.3 Trouver x tel que $\ln(3x+1)=\ln(2x-2)$

Exercice 2.4 Trouver x tel que $\ln(3x+1)<\ln(2x-2)$

Exercice 2.5 Trouver x tel que $\ln(3x+1)>\ln(2x-2)$

Exercice 2.6 Trouver x tel que $\ln(\frac{3x+1}{2x-2})=0$.

Exercice 2.7 Trouver x tel que $\ln(\frac{3x+1}{2x-2})\leq 0$.

Exercice 2.8 Trouver x tel que $3^{2x-1}=27$.

Exercice 2.9 Trouver x tel que $3^{2x}+3^{x}-2=0$

Exercice 2.10 Trouver x tel que $\ln(4x-3)=0$.

Exercice 2.11 Trouver x tel que $\ln(4x-3)\leq 0$.

Exercice 2.12 Trouver x tel que $\ln(4x-3)\geq 0$.

Exercice 2.13 Trouver x tel que $\ln(4x-3)=\ln(2x+5)$

Exercice 2.14 Trouver x tel que $\ln(4x-3)<\ln(2x+5)$

Exercice 2.15 Trouver x tel que $\ln(4x-3)>\ln(2x+5)$

Exercice 2.16 Trouver x tel que $\ln(\frac{4x-3}{2x+5})\leq 0$.

3 Solutions des exercices

Solution 2.1 On cherche x tel que $\ln(3x+1) = 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $3x+1 = 1$ ce qui nous donne $x = 0$.

Solution 2.2 On cherche x tel que $\ln(3x+1) \leq 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $3x+1 \leq 1$ ce qui nous donne $x \leq 0$. Mais en plus, on veut que $3x+1$ soit positif, donc que $3x+1 > 0$ c'est-à-dire $x > -\frac{1}{3}$. Cela nous amène à $-\frac{1}{3} < x \leq 0$, c'est-à-dire $x \in]-\frac{1}{3}, 0]$.

Solution 2.3 On cherche x tel que $\ln(3x+1) = \ln(2x-2)$. Il faut donc que $3x+1 = 2x-2$ ce qui nous donne $x = -3$. Or il faut que $3x+1$ soit positif pour que le logarithme soit défini donc cette équation **n'a pas de solution**.

Solution 2.4 On cherche x tel que $\ln(3x+1) < \ln(2x-2)$. Il faut donc que $3x+1 < 2x-2$ ce qui nous donne $x < -3$. Or il faut que $3x+1 > 0$ et $2x-2 > 0$, ce qui nous donne $x > -\frac{1}{3}$ et $x > 1$. C'est impossible que x soit plus petit que -3 et plus grand que 1 ! Cette inéquation n'a pas de solution.

Solution 2.5 On cherche x tel que $\ln(3x+1) > \ln(2x-2)$. Il faut donc que $3x+1 < 2x-2$ ce qui nous donne $x > -3$. Or il faut que $3x+1 > 0$ et $2x-2 > 0$, ce qui nous donne $x > -\frac{1}{3}$ et $x > 1$. Il suffit donc que $x > 1$.

Solution 2.6 On cherche x tel que $\ln(\frac{3x+1}{2x-2}) = 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $\frac{3x+1}{2x-2} = 1$, ce qui nous amène à $3x+1 = 2x-2$ et donc $x = -3$. Or cette fois $\frac{3\times(-3)+1}{2\times(-3)-2} = 1$ est bien positif et cette équation admet donc -3 comme solution.

Solution 2.7 On cherche x tel que $\ln(\frac{3x+1}{2x-2}) \leq 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $\frac{3x+1}{2x-2} \leq 1$. On a maintenant besoin de différencier plusieurs cas :

1. Si $2x-2 > 0$ alors $\frac{3x+1}{2x-2} \leq 1 \Leftrightarrow 3x+1 \leq 2x-2$.
   Il faut donc que $x > 1$ (car $2x-2 > 0$), $x > -\frac{1}{3}$ (car $3x+1 > 0$) et $x \leq -3$ (car $3x+1 \leq 2x-2$). C'est impossible.
2. Si $2x-2 < 0$ alors $\frac{3x+1}{2x-2} \leq 1 \Leftrightarrow 3x+1 \geq 2x-2$.
   Il faut donc que $x < -1$ (car $2x-2 < 0$), $x < -\frac{1}{3}$ (car $3x+1 < 0$) et $x \geq -3$ (car $3x+1 \geq 2x-2$). Il faut donc que $x \in [-3, -\frac{1}{3}[$.

Cette inéquation est vraie pour $x \in [-3, -1[$.

Solution 2.8 On cherche x tel que $3^{2x-1} = 27$ soit $\ln(3^{2x-1}) = \ln(27)$. Or $\ln(3^{2x-1}) = (2x-1)\ln(3)$. Donc on veut que $2x - 1 = \frac{\ln(27)}{\ln(3)} = \frac{\ln(3^3)}{\ln(3)} = \frac{3\ln(3)}{\ln(3)} = 3$. Cela nous amène à $2x = 3 + 1 = 4$ et donc $x = 2$.

Solution 2.9 On pose $y = 3^x$. On cherche donc à résoudre $y^2 + y - 2 = 0$. On trouve $y = 1$ ou $y = -2$. Comme $3^x > 0$, la seule possibilité est $3^x = 1$ et donc $x = 0$.

Solution 2.10 On cherche x tel que $\ln(4x-3) = 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $4x - 3 = 1$ ce qui nous donne $x = 1$.

Solution 2.11 On cherche x tel que $\ln(4x-3) \leq 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $4x - 3 \leq 1$ ce qui nous donne $x \leq 1$. Mais en plus, on veut que $4x - 3$ soit positif, donc que $4x-3 > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{3}{4}$. Cela nous amène à $\frac{3}{4} < x \leq 1$, c'est-à-dire $x \in]\frac{3}{4}, 1]$.

Solution 2.12 On cherche x tel que $\ln(4x-3) \geq 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $4x - 3 \geq 1$ ce qui nous donne $x \geq 1$. Mais en plus, on veut que $4x - 3$ soit positif, donc que $4x - 3 > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{3}{4}$. Cela nous amène à $x \geq 1$, c'est-à-dire $x \in [1, +\infty$.

Solution 2.13 On cherche x tel que $\ln(4x-3) = \ln(2x+5)$. Il faut donc que $4x - 3 = 2x + 5$ ce qui nous donne $x = 4$. On vérifie que dans ce cas, $4x - 3$ est positif.

Solution 2.14 On cherche x tel que $\ln(4x-3) < \ln(2x+5)$. Il faut donc que $4x - 3 < 2x + 5$ ce qui nous donne $x < 4$. Il faut également que $4x - 3 > 0$ et $2x + 5 > 0$, ce qui nous donne $x > \frac{3}{4}$ et $x > -\frac{5}{2}$. L'ensemble solution est donc $]\frac{3}{4}, 4[$.

Solution 2.15 On cherche x tel que $\ln(4x-3) > \ln(2x+5)$. Il faut donc que $4x - 3 > 2x + 5$ ce qui nous donne $x > 4$. Il faut également que $4x - 3 > 0$ et $2x + 5 > 0$, ce qui nous donne $x > \frac{3}{4}$ et $x > -\frac{5}{2}$. L'ensemble solution est donc $]4, +\infty[$.

Solution 2.16 On cherche x tel que $\ln(\frac{4x-3}{2x+5}) \leq 0 = \ln(1)$. Il faut donc que $\frac{4x-3}{2x+5} \leq 1$. On a maintenant besoin de différencier plusieurs cas :

1. Si $2x+5>0$ alors $\frac{4x-3}{2x+5} \leq 1 \Leftrightarrow 4x-3 \leq 2x+5$.
   Il faut donc que $x > -\frac{5}{2}$ (car $2x+5>0$), $x > \frac{3}{4}$ (car $4x-3>0$) et $x \leq 4$. Il faut donc que $x \in]\frac{3}{4}, 4[$.
2. Si $2x+5<0$ alors $\frac{4x-3}{2x+5} \leq 1 \Leftrightarrow 4x-3 \geq 2x+5$.
   Il faut donc que $x < -\frac{5}{2}$ (car $2x+5<0$), $x < \frac{3}{4}$ (car $4x-3<0$) et $x \geq 4$ (car $4x-3 \geq 2x+5$). C'est impossible.

Cette inéquation est vraie pour $x \in]\frac{3}{4}, 4[$.