Notice sur titres et travaux

Michel Fliess

Laboratoire STIX
École polytechnique
91128 Palaiseau

Courriel : michel.fliess@stix.polytechnique.fr
Tél. : 06-61-19-12-06

1 Introduction

1.1 Présentation générale

L'essentiel de mon activité scientifique pourrait se résumer par le développement de méthodes algébriques dans des domaines des sciences de l'ingénieur, où elles étaient peu courantes. Jusqu'au début des années quatre-vingt dix, mes travaux, quoiqu'ils m'aient valu quelques distinctions comme, en 1987, le prix Michel Montpetit de l'Académie des Sciences, ou, en 1991, la médaille d'argent du CNRS, n'avaient pas permis d'amples applications. Aussi ce texte se concentrera-t-il plus particulièrement sur les douze dernières années, qui ont produit des bouleversements méthodologiques majeurs, accompagnées de maintes réalisations concrètes, y compris industrielles.

1.2 Succès du point de vue algébrique

1.2.1 L'automatique

Peu avant ma thèse d'état en informatique théorique, soutenue en 1972 et préparée sous la direction de M.P. SCHÜTZENBERGER et M. NIVAT, je rencontrai R.E. KALMAN, fondateur de l'*automatique* « moderne », qui m'invita à plusieurs reprises aux États-Unis. Ces séjours me firent découvrir cette discipline, appelée aussi, par les mathématiciens, *contrôle*, que je vais très brièvement analyser[1]. L'objet de l'automatique est la commande de machines. On y manie des équations différentielles, ou aux différences. La présence des commandes apporte une « liberté » nouvelle, que l'on peut comprendre ainsi. Dans les utilisations physiques traditionnelles des équations différentielles ordinaires, la mécanique céleste par exemple, la connaissance des conditions, dites initiales, en un instant donné, détermine le futur et, également, le passé. Il n'en va plus de même avec l'automatique. Des concepts nouveaux, comme la *commandabilité*, ont été inventés pour traduire la possibilité de faire évoluer le système d'une certaine façon. C'est pourquoi, des systèmes apparemment aussi élémentaires que ceux modélisés par des équations différentielles, ou aux différences, ordinaires, linéaires et à coefficients constants, font encore l'objet de travaux théoriques actifs, alors que, du point de vue habituel des mathématiques pures, l'affaire est entendue depuis longtemps.

1.2.2 Les systèmes plats

À la fin des années quatre-vingt, j'avais obtenu une interprétation en terme de théorie algébrique des modules de la commandabilité des systèmes linéaires. Une collaboration extrêmement fructueuse avec J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON, de l'École des Mines de Paris, a permis en 1991 d'en déduire une classe de systèmes non linéaires, que nous avons appelés *(différentiellement) plats*. Grâce à leurs propriétés mathématiques, on peut imposer simplement à

[1]On y reviendra au paragraphe 4.1.

ces systèmes un comportement désiré, sans avoir besoin d'intégrer d'équations différentielles. L'intérêt des systèmes plats est double :

- Bien des systèmes rencontrés en pratique sont plats.
- En plus d'appareillages déjà nombreux de laboratoire, la platitude a conduit à la mise au point de plusieurs dispositifs techniques, aujourd'hui commercialisés, dans des domaines aussi divers que l'automobile, les génies chimique ou électrique.

La platitude remet en cause une partie notable de la « philosophie » sous-jacente de l'automatique théorique et pratique, comme, par exemple, la prééminence absolue accordée à la représentation d'état et aux boucles de rétroaction (*feedback loops* en américain). Il convient d'ajouter qu'elle n'est pas une justification mathématique *a posteriori* d'une pratique d'ingénieurs, déjà existante et fructueuse. C'est une découverte de chercheurs, qui a permis d'avancer dans des questions technologiques, restées pendantes.

1.2.3 La platitude en dimension infinie

Cette réussite en dimension finie, pour des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires, m'a conduit à m'intéresser, à partir du milieu des années quatre-vingt dix, à la dimension infinie, c'est-à-dire à des équations différentielles ordinaires contenant des retards, ou à certaines classes restreintes d'équations aux dérivées partielles. Le point de vue algébrique, évoqué plus haut, a permis, avec l'aide de H. Mounier (Université Paris-Sud) , P. Rouchon, J. Rudolph (Université technique de Dresde, Allemagne), d'y généraliser la notion de platitude. Ici, encore, grâce à I. Kref (Total), N. Petit (École des Mines de Paris), P. Rouchon, J. Rudolph, des applications industrielles confirment le bien fondé de cette démarche.

1.2.4 Identification et estimation

Il faut une bonne modélisation pour réguler une machine. L'*identification*, qui consiste à déterminer des paramètres inconnus dans les équations régissant un système, est donc un autre chapitre fondamental de l'automatique. Je viens d'obtenir, en collaboration avec H. Sira-Ramírez (CINVESTAV, Mexico), une méthode d'identification entièrement originale, de nature algébrique. Son mérite est de fonctionner en boucle fermée : on peut identifier et commander en même temps, question demeurée largement ouverte, même dans les cas les plus élémentaires. Ces techniques d'*estimation* sont en cours d'extension dans des domaines comme le traitement du signal et la détection de pannes. De premières illustrations de laboratoire sont tout à fait encourageantes.

1.3 Création d'un laboratoire

À l'exception de quelques thèmes en informatique et communication[2], l'algèbre « avancée » est, en France comme à l'étranger, à peu près totalement absente de la culture du mathématicien appliqué. J'ai souffert de cette situation ! Avec mon ami Marc Giusti, directeur de recherche au CNRS, et quelques autres collègues, je m'efforce, avec le nouveau laboratoire STIX (*Sciences et Techniques de l'Information à l'X*) à l'École polytechnique, d'édifier une structure de recherche pour y remédier.

[2]Mentionnons la théorie des automates et des langages, le calcul formel, les codes correcteurs d'erreur, la cryptographie.

2 Quelques éléments biographiques

- né le 26 octobre 1945 à Valence (Drôme),
- bac math-élem à Valence (1963),
- ancien élève de l'École polytechnique (1965–1967),
- thèse 3^e cycle (Faculté des Sciences de Paris, 1969),
- thèse d'état (Université Paris VII, 1972),
- professeur à l'Université Paris VIII de 1973 à 1983,
- directeur de recherche au CNRS depuis 1983 (d'abord, jusqu'en 1998, au Laboratoire des Signaux et Systèmes, à Supélec, puis, de 1998 à 2002, au Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, à l'ENS-Cachan, enfin au Laboratoire STIX, à Polytechnique).

3 Informatique théorique

À la fin des années soixante, après une vingtaine d'années de développement, la théorie des automates et des langages étaient au centre de l'informatique théorique, avec M.P. SCHÜTZENBERGER comme un des acteurs principaux au niveau mondial. Qu'il suffise de rappeler ici l'école (M. NIVAT, D. PERRIN, et beaucoup d'autres), toujours bien vivante, qu'il a fondée en France, et ses collaborations avec le célèbre linguiste N. CHOMSKY et le mathématicien bien connu S. EILENBERG[3]. Parmi ses nombreuses contributions, je me suis intéressé avant tout, dans mes thèses de troisième cycle et d'état, aux séries en plusieurs indéterminées non commutatives. Les variables non commutatives doivent être vues comme des symboles, les mots d'un langage par exemple ; leur concaténation symbolise alors les phrases. À un automate correspond un langage, qui peut être compris comme une série formelle à coefficients *booléens* 1 ou 0 selon que la phrase appartient ou non au langage. L'extension à des corps[4] arbitraires reflète l'intérêt des automates dits pondérés, naturels dans certaines questions de nature combinatoire. M.P. SCHÜTZENBERGER dans une série d'articles remarquables, publiés vers 1961-65, a fait les découvertes suivantes :

- Les deux classes les plus importantes de langages, à savoir celles produites par les automates finis et les automates à piles[5], correspondent à une extension non commutative des concepts familiers de fonctions rationnelles et algébriques[6]. C'est pourquoi l'école française a appelé ces langages respectivement *rationnels* et *algébriques*.
- Par comparaison avec les fonctions habituelles en plusieurs variables commutatives, les séries rationnelles et algébriques non commutatives fournissent à bien des égards une meilleure généralisation de certaines propriétés des fonctions rationnelles et algébriques en une seule variable. Signalons la récurrence linéaire à coefficients constants à laquelle obeissent les coefficients d'une série rationnelle à une variable, remplacée en non-commutatif par une représentation matricielle.

Voici une liste de quelques-uns de mes résultats :

- Je suis, peut-être, le premier à avoir travaillé sur le produit de *mélange* (*shuffle product* en américain). Ce produit, qui est l'extension non commutative de la transformation dite de Laplace-Borel, classique en théorie des fonctions d'une variable complexe, possède une interprétation naturelle dans le cadre des algèbres de Hopf. Il joue un rôle en combinatoire. Le mélange d'une série rationnelle avec une série rationnelle (resp. algébrique) est rationnel (resp. algébrique).
- J'ai simplifié et généralisé certains résults de H. FURSTENBERG sur les

[3] S. EILENBERG, l'un des fondateurs de l'algèbre homologique, a ensuite beaucoup travaillé sur divers aspects mathématiques de l'informatique.

[4] Rappelons qu'un corps est un ensemble muni, comme les nombres rationnels, réels, ou complexes, des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, et de division.

[5] En américain *pushdown automata*. Rappelons que ces automates et les langages *context-free* associés, ont joué un rôle certain dans la compréhension des langages de programmation.

[6] Les *grammaires formelles* associées à ces automates sont, dans cet ordre, les analogues des systèmes d'équations dont ces fonctions sont solutions.

fonctions algébriques.

- J'ai généralisé au non-commutatif le critère de rationalité reposant sur les matrices infinies de Hankel. Ce travail, vieux de plus de trente ans, est encore souvent cité.
- J'ai répondu à une conjecture de S. Eilenberg et M.P. Schützenberger sur les séries rationnelles à coefficients positifs.

4 Mon passage à l'automatique

C'est, comme je l'ai écrit plus haut, lors de mon premier séjour, en 1973, aux États-Unis, à l'invitation de R.E. Kalman, que j'ai découvert l'automatique.

4.1 Qu'est-ce que l'automatique ?

4.1.1 Généralités

L'automatique a pour tâche la commande des machines. Il peut être utile de reproduire ici le schéma bien connu de la figure 1. La boîte 1 y symbolise la

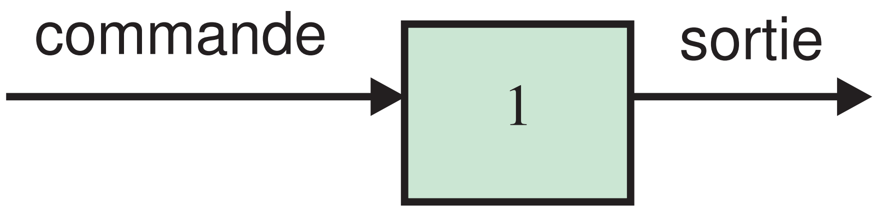

Fig. 1 – Système entrée-sortie

structure interne, le plus souvent modélisée par des équations différentielles, ou aux différences. On rajoute pour atteindre des objectifs donnés une *boucle de rétroaction*[7]. Le but de la boîte 2, modélisée par des équations de même nature,

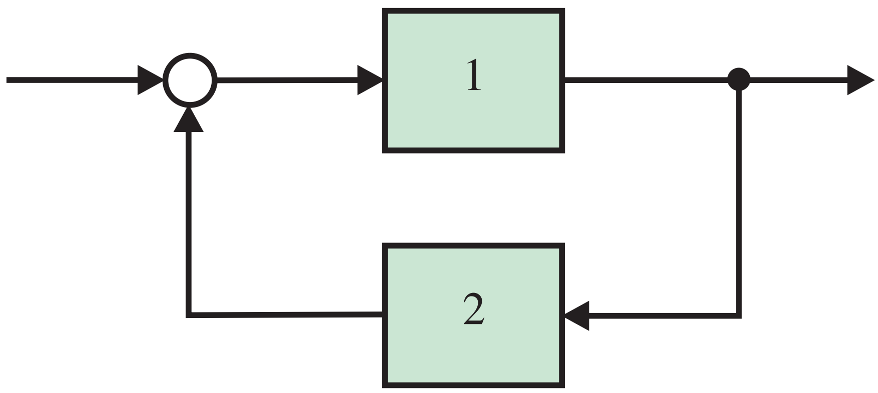

Fig. 2 – Système avec boucle de rétroaction

est double :

- elle assure la stabilité du système autour d'un *point de fonctionnement*;
- elle atténue les *perturbations*, dues à une modélisation simplifiée, qui ne peut ni ne doit prendre en compte tous les facteurs possibles.

[7] C'est peut-être, sous sa dénomination américaine de *feedback loop*, le seul concept issu de l'automatique, qui se soit vulgarisé.

Une conséquence des boucles de rétroaction est la possibilité de commander correctement des systèmes « complexes » grâce à des modélisations mathématiques, qui sont élémentaires si on les compare aux besoins du calcul scientifique pour les simulations numériques. Cette vérité, bien connue des ingénieurs automaticiens, ne l'est guère par ailleurs[8].

4.1.2 L'apport de R.E. Kalman

L'automatique « moderne », c'est-à-dire actuelle, est née vers 1960 grâce, surtout, aux travaux de R.E. Kalman, aux États-Unis[9]. Il a écrit les systèmes linéaires sous la forme

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Les vecteurs $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ sont, respectivement, la *commande*, la *sortie* et l'*état*, dont les composantes sont fonctions du temps. Il faut comprendre $\mathbf{x}$ comme donnant l'état interne de la boîte 1 dans la figure 1. Les matrices A, B, C, à coefficients réels constants, sont de dimensions appropriées. La *représentation d'état* (1) a permis à Kalman de fournir des solutions mathématiques à la fois élégantes et manipulables à des problèmes classiques

- de *commande linéaire-quadratique*, c'est-à-dire à dynamique linéaire et critère d'optimisation quadratique,
- d'estimation, où, le système étant bruité[10], on cherche à mesurer l'état. C'est le fameux *filtre de Kalman*, dont l'usage a dépassé les frontières traditionnelles de l'automatique pour s'imposer aussi en traitement du signal, voire en économétrie.

Ce point de vue, fort original, s'est rapidement imposé sur la scène mondiale, d'autant plus que la NASA l'a dès le début utilisé pour ses vols spatiaux. En moins de dix ans, bien des manuels d'enseignement, même élémentaires, l'ont popularisé parmi les étudiants, de sorte qu'aujourd'hui il apparaît à beaucoup comme une vérité immanente.

[8] Que l'on ne se méprenne pas ! Les exigences du calcul scientifique et de la commande ne sont pas de même nature. Il est regrettable, par contre, qu'une meilleure connaissance des méthodes de l'automatique soit à peu près totalement absente de la culture technico-scientifique actuelle.

[9] Il convient de citer également les recherches contemporaines en *commande optimale* de R. Bellman, aux États-Unis, de L. Pontriaguine et ses collaborateurs, en Union Soviétique. Les conséquences sur la pratique des ingénieurs ont été comparativement faibles jusqu'à présent.

[10] Les *bruits*, ou *perturbations*, doivent être entendus comme marquant la différence entre le modèle mathématique idéalisé et le monde réel.

4.1.3 La notion de commandabilité

Kalman définit la *commandabilité*, ou *contrôlabilité*, pour un système linéaire, de forme (1), comme la possibilité de trouver une commande pour passer d'un état initial à un état final arbitraires. Il en a donné un élégant critère matriciel :

$$\mathrm{rg}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$$

Il existe, alors, une boucle de rétroaction

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

où K est une matrice réelle, constante, de dimension appropriée, de sorte que, dans le système résultant

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = (A - BK) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

on puisse assigner arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A - BK$. On peut, en d'autres termes, *stabiliser* un système commandable, puisqu'on peut choisir K telle que les parties réelles des valeurs propres soient strictement négatives.

En non-linéaire, on a considéré des systèmes de forme

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

où les f_i sont des fonctions suffisamment régulières. À partir de la fin des années soixante, divers travaux, dont, en France, ceux de C. LOBRY, ont montré la pertinence des outils de géométrie différentielle, comme des variantes élaborées du théorème d'intégrabilité de Frobenius. En dépit de publications, nombreuses, surtout pendant les années 70 et 80, signées parfois par des plumes prestigieuses, aucun panorama significatif ne s'est dégagé. La seule exception est, à mon avis, la découverte, en 1972, de l'*accessibilité forte*[11] par H.J. SUSSMANN et V. JURDJEVIC.

Pour les systèmes de dimension infinie, qu'ils soient à retards ou régis par des équations aux dérivées partielles, de multiples définitions concurrentes existent, dépendants des outils mathématiques et des buts poursuivis.

Remarque. Des considérations plus ou moins analogues auraient pu être développées pour l'*observabilité*, autre concept clé dû à KALMAN.

[11] Cette notion avait, alors, été définie avec une « débauche » de crochets de Lie de champs de vecteurs. Ce n'est qu'une quinzaine d'années après que l'on a compris que l'accessibilité forte était équivalente à la commandabilité du système linéaire *variationnel*, ou *tangent*, autour d'une trajectoire. Les coefficients d'un tel système dépendent, en général, du temps. Ainsi, dans la représentation (1), les coefficients des matrices A, B, C ne sont plus nécessairement des constantes. Grâce aux *difflétés*, dont il sera question au paragraphe 6.2.2, j'ai pu montrer [42] que l'accessibilité forte était aussi équivalente à l'absence d'intégrales premières. Commandabilité et physique se rejoignent !

4.2 Ma contribution de 1973 à 1985

À mon arrivée, en 1973, chez R.E. KALMAN, était en vogue la classe particulière de systèmes non linéaires, dits *bilinéaires*,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} &= \left(A + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i\right) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

où A, B_1, ..., B_m, C sont des matrices constantes, à coefficients réels, de dimensions appropriées. Les non-linéarités proviennent des produits bilinéaires $u_i x_j$ dans les équations de la dynamique. La formule classique, dite de Peano-Baker, de résolution en série d'une équation linéaire matricielle, m'a permis de « coder » (3) par les séries rationnelles non commutatives, introduites par M.P. SCHÜTZENBERGER, qui étaient, comme rappelé plus haut, un axe fondamental de mes travaux en informatique. Voici quelques-une des conséquences :

- Plusieurs des questions structurelles débattues alors, notamment autour de la représentation d'état, reçoivent une réponse immédiate comme corollaires de propriétés déjà établies pour les séries rationnelles non commutatives. Il en résulte que le lien, recherché à partir des années 60 par bien des auteurs, R.E. KALMAN, S. EILENBERG, et d'autres, entre informatique (automates et langages) et automatique, trouve sa réponse définitive avec les systèmes bilinéaires.
- J'ai démontré que les systèmes bilinéaires possèdent une propriété d'approximation à la Weierstraß-Stone des comportements entrée-sortie non linéaires[12]. Cette propriété a été exploitée par D. NORMAND-CYROT, dans sa thèse de 3^e cycle préparée sous ma direction, en collaboration avec EDF, pour produire des simulateurs simples de chaudières, classiques ou nucléaires[13]. Aujourd'hui encore, plusieurs équipes utilisent cette voie pour des modélisations bio-médicales approchées.

Les indéterminées non commutatives doivent être comprises comme une possible extension au non-linéaire du calcul opérationnel, justifié en général par la transformation de Laplace. Ainsi, le produit qui associe à deux fonctions du temps le produit de leurs valeurs est « codé » par le mélange, évoqué au paragraphe 3. Fort de ces constatations, j'ai donné pour un système de type (2) un développement fonctionnel, qui est une généralisation des *séries de Lie* de W. GRÖBNER, valables pour les équations différentielles ordinaires non commandées. Ces séries *génératrices*, connus aujourd'hui sous le nom de *séries de Fliess*[14], ont eu

[12] Résultat obtenu indépendamment et simultanément par H.J. SUSSMANN. Nous l'avons présenté dans nos deux communications à un même congrès !

[13] On disposait d'un « modèle de connaissance », c'est-à-dire d'un système complexe d'équations non linéaires, difficile à exploiter pour connaître l'effet d'une commande.

[14] On trouve aussi les dénominations de séries de *Chen-Fliess*, ou *Fliess-Chen*. En effet, j'ai utilisé des intégrales itérées, introduites par K.T. CHEN en topologie algébrique.

les conséquences suivantes :

- Les *séries de Volterra*, qui étaient l'autre grand type de développement fonctionnel utilisé par les ingénieurs, ont enfin pu être calculées de façon efficace grâce aux manipulations algébriques des indéterminées non commutatives (thèse d'état de F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, sous ma direction).
- L'alliance entre structure des séries génératrices et *algèbres de Lie filtrées, transitives*[15] m'a permis de donner des conditions locales de représentation sous forme (2). Ces résultats, qui n'exigeaient pas, comme dans des publications précédentes, des conditions plus ou moins artificielles de globalité, ont eu un impact certain, puisqu'ils ont été repris et approfondis par divers auteurs.
- J'ai montré que les séries génératrices étaient un développement de Taylor par rapport à une dérivation *causale*, alors que les séries de Volterra sont fondées sur la dérivation de Fréchet-Gâteaux, qui ne prend pas en compte l'écoulement du temps.

Vers 1985, l'approche des systèmes non linéaires par les séries génératrices, à laquelle il convient de rajouter le traitement du temps discret (thèses de 3^e cycle et d'état de D. NORMAND-CYROT, sous ma direction) et certaines questions de synthèse par boucle de rétroaction, comme le *découplage* et le *rejet de perturbations* (thèses de 3^e cycle et d'état de D. CLAUDE, sous ma direction), était devenu un axe important à côté de celui issu de la géométrie différentielle, représenté par les écoles de R.W. BROCKETT (Harvard) et A. ISIDORI (Rome). Les deux points de vue étaient complémentaires, le mien étant plus algébrique.

Voulant tirer parti d'une invitation à faire, en 1985, un cours d'un semestre à l'université d'Illinois à Urbana-Champaign, j'envisageais d'écrire un livre sur le non-linéaire.

[15] Ces algèbres de Lie ont été étudiées, notamment par V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, pour formaliser certains aspects des travaux d'ÉLIE CARTAN sur les pseudo-groupes de Lie.

5 Une nouvelle algèbre

Une question fondamentale du non-linéaire restait ouverte, quelle que soit l'approche choisie, celle de l'inversion entrée-sortie. L'inversion à gauche, par exemple, consiste à déterminer la commande à partir de la connaissance de la sortie (voir figure 1). À la veille de me rendre aux États-Unis en 1985, pour l'invitation évoquée quelques lignes plus haut, je trouvais une solution, claire et élégante, basée sur l'algèbre différentielle, qui, dans les mois suivants, me conduisit à abandonner le livre prévu, car basé sur une vision devenue obsolète, comme ce qui suit le démontre.

5.1 Algèbre différentielle et automatique non linéaire

L'*algèbre différentielle*, création des mathématiciens new-yorkais J.F. RITT et E.R. KOLCHIN, est la généralisation aux équations différentielles des outils de l'algèbre commutative pour les équations algébriques. Ces dernières étant des équations différentielles d'ordre zéro, on comprend que l'algèbre différentielle est beaucoup plus difficile et, donc, moins avancée.

Suivant certains chemins de la géométrie algébrique[16], je compris alors qu'il était commode de représenter un système non linéaire par un corps différentiel ordinaire, c'est-à-dire par un corps[17] commutatif, muni d'une seule dérivation. En voici quelques conséquences :

- L'inversibilité entrée-sortie se lit immédiatement sur des degrés de transcendance différentielle d'extensions de corps différentiels (c'est une généralisation facile des degrés de transcendance pour les corps commutatifs).
- La représentation d'état devient

$$F_i(\frac{dx_i}{dt}, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, \ldots, \frac{d^{\alpha_1} u_1}{dt^{\alpha_1}}, \ldots, u_m, \ldots, \ldots, \frac{d^{\alpha_m} u_1}{dt^{\alpha_m}}) = 0 \quad (4)$$

  où $i = 1, \ldots, m$. On remarque la présence de dérivées de la commande et le caractère implicite par rapport à $\frac{dx_i}{dt}$. Ces phénomènes ne sont pas des artefacts mathématiques. Le caractère implicite se retrouve dans des circuits électriques non linéaires ; il est à la base des *points d'impasse*, où $\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} = 0$, qui jouent un rôle important, quoiqu'encore mal compris, dans le comportement qualitatif. Quant aux dérivées de la commande, on en trouve dans certains exemples pratiques.
- La notion d'*observabilité* prend un caractère très simple, qui vaut aussi pour celle d'*identifiabilité*, c'est-à-dire pour la possibilité de calculer un paramètre inconnu grâce à la connaissance de la commande et de la sortie (travail commun avec S. DIOP, LSS-Supélec). Ajoutons que cette définition algébrique de l'identifiabilité joue aujourd'hui un rôle essentiel en

[16] Voir, par exemple, les réflexions du mathématicien allemand E. KÄHLER.

[17] Cela suppose, évidemment, que l'*idéal différentiel* engendré par les équations du système soit premier. On peut montrer que c'est presque toujours vrai en pratique. On fait, sinon, appel à la généralisation différentielle du théorème de décomposition de Lasker-Noether, due à RITT et RAUDENBUSH.

modélisation bio-mathématique (travaux de F. OLLIVIER (Polytechnique) et de nombreux auteurs en France et à l'étranger).
- Les notions algébriques de *filtrations* et *graduations* permettent de définir des boucles de rétroaction dynamiques, ne nécessitant pas l'intégration d'équations différentielles. Ce sont les bouclages *quasi-statiques* étudiés par E. DELALEAU dans sa thèse, sous ma direction, qui suffisent à résoudre la plupart des problèmes de synthèse.
- Le caractère algorithmique de l'algèbre différentielle permet de proposer des procédures de calcul formel pour de nombreuses questions (thèse de S. DIOP, sous ma direction, travaux de F. OLLIVIER, de F. BOULIER, à Lille, de S.T. GLAD, en Suède, etc)

Remarque. Pour les systèmes non linéaires en temps discret, c'est-à-dire décrits par des équations aux différences, on obtient des résultats analogues grâce à l'*algèbre aux différences*[18], qui est le pendant de l'algèbre différentielle. J'ai démontré, en outre, que toute dynamique causale peut se représenter par une équation réversible, c'est-à-dire vérifiant une propriété analogue à celle des groupes à un paramètre du continu[19].

5.2 Modules et systèmes linéaires[20]

Si l'on revient aux systèmes linéaires, il serait évidemment maladroit d'utiliser les corps différentiels. Dans la seconde moitié des années 80, j'ai introduit les *modules*[21] pour les systèmes linéaires, d'une manière totalement différente de celle de R.E. KALMAN en 1965. Ce dernier associait un module très particulier à la représentation d'état (1). Dorénavant le module embrasse toutes les équations, quelle que soit leur forme, et, donc, toute les variables du système. Les conséquences quant à la compréhension des propriétés structurelles du linéaire sont, pourquoi ne pas l'écrire, miraculeuses !

5.2.1 La commandabilité revisitée

Je me contenterai, ici, de détailler[22] la commandabilité, déjà évoquée au paragraphe 4.1.3. Il y a commandabilité si, et seulement si, le module est *libre*. En voici une traduction dans un langage moins abstrait. Il existe un ensemble fini de variables $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ tel que :

[18] Crée encore par J.F. RITT, et un autre mathématicien new-yorkais, R.M. COHN.

[19] Ce résultat pourrait se comprendre, d'un point de vue « philosophique », comme l'équivalence entre causalité et déterminisme !

[20] Une connaissance, certes superficielle, du courant de pensée de M. SATO, et de son école d'analyse algébrique, m'a beaucoup influencé pour ce qui suit et le contenu du paragraphe 6.3.

[21] Rappelons que les espaces vectoriels expriment une « structure linéaire » sur un corps. On obtient un *module* lorsqu'on remplace le corps par un *anneau*, où un élément non nul n'a pas nécessairement d'inverse.

[22] On aurait pu parler de la représentation d'état (1) de KALMAN. Certains auteurs la prennent comme définition même des systèmes linéaires, alors que d'autres ont essayé de la généraliser. L'approche des modules permet de démontrer que ces extensions sont artificielles et que l'on peut toujours se ramener à (1).

– toute variable du système est combinaison linéaire des composantes de $\mathbf{z}$ et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini ;
– toute composante de $\mathbf{z}$ est combinaison linéaire des variables du système et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini ;
– les composantes de $\mathbf{z}$ et leurs dérivées de tous ordres sont linéairement indépendantes.

On constate que la possibilité de passer d'un point à un autre de l'espace d'état n'est plus la pierre angulaire. Les difficultés liées à cette vision avaient été déjà discutées à propos de l'exemple élémentaire $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$, qui n'est pas, soulignons-le, de forme (1). Comme $x(t) = u(t) + \text{const.}$, on peut toujours trouver une commande pour joindre $x(t_0)$ et $x(t_1)$, $t_0 < t_1$. Or, le module correspondant n'est pas libre, car $x(t) - u(t) = \text{const.}$ est un élément de *torsion*[23] : on ne peut modifier la différence $x(t) - u(t)$.

Dans cette vision renouvelée de la commandabilité, toutes les variables du système sont sur le même plan et, par conséquent, la représentation d'état devient sans objet. C'est une rupture totale avec les idées prédominantes.

[23]Un élément χ du module est de *torsion* si, et seulement si, il existe un scalaire $a \neq 0$ dans l'anneau tel que $a\chi = 0$. Notons qqu'une telle propreté est sans objet dans l'algèbre linéaire classique des espaces vectoriels car elle implique $\chi = 0$.

6 La platitude[24]

6.1 Un exemple de grue

Cet exemple de grue est très en vogue dans les laboratoires de robotique et d'automatique, depuis plus d'une quinzaine d'années. Il s'agit de transporter

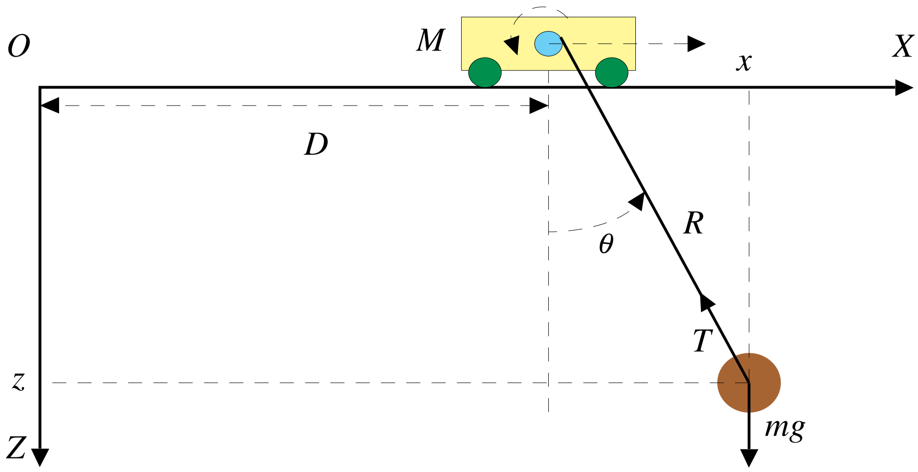

Fig. 3 – La grue

la charge m, tout en esquivant, si nécessaire, des obstacles, en jouant sur le déplacement D du chariot sur le rail OX et la longueur R du filin. La tâche est difficile si l'on veut aller vite à cause des oscillations de m, aux effets redoutables.

La loi de Newton et la géométrie du modèle permettent d'écrire les équations du mouvement[25] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & -T\sin\theta \\ m\ddot{z} & = & -T\cos\theta + mg \\ x & = & R\sin\theta + D \\ z & = & R\cos\theta \end{array}\right. \tag{5}$$

où

- (x,z) (les coordonnées de la charge m), T (la tension du filin) et θ (l'angle du filin avec l'axe verticale OZ) sont les inconnues ;
- D et R sont les commandes.

[24]Le livre suivant, à paraître très prochainement,
H. Sira-Ramírez, S. Agrawal, *Differential Flatness*, Marcel Dekker, New York, 2003, fournit un excellent panorama pour ingénieurs, illustré par une foule d'exemples concrets. Il résulte de cours donnés aux États-Unis, au Mexique, au Vénézuela, en France, et ailleurs. Que l'on me permette de souligner que son écriture a bénéficié non seulement du soutien d'organismes étatiques américains et mexicains, mais aussi allemands.

[25]Comme les mécaniciens, les automaticiens emploient la notation des fluxions, où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $x^{(\nu)} = \frac{d^\nu x}{dt^\nu}$.

Un calcul immédiat démontre que $\sin\theta$, T, D et R sont fonctions de (x, z) et d'un nombre fini de leurs dérivées :

$$\begin{array}{rcl} \sin\theta & = & \frac{x-D}{R} \\ T & = & \frac{mR(g-\ddot{z})}{z}, \\ (\ddot{z}-g)(x-D) & = & \ddot{x}z, \\ (x-D)^2+z^2 & = & R^2 \end{array}$$

donc,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D & = & x - \frac{\ddot{x}z}{\ddot{z}-g} \\ R & = & \sqrt{z^2 + \left(\frac{\ddot{x}z}{\ddot{z}-g}\right)^2} \end{array} \right.$$

Donnons-nous une loi horaire $(x(t), z(t))$ pour la charge m, satisfaisant les objectifs mentionnés plus haut, à savoir contourner les obstacles, sans engendrer d'oscillations. Les autres variables du système, notamment les commandes D et R, s'obtiennent sans intégrer d'équations différentielles, comme fonctions de x, z et d'un nombre fini de leurs dérivées. La grue est un système non linéaire, appelé *(différentiellement) plat*, et le couple (x, z) est appelé *sortie plate*, ou *linéarisante*. On trouvera ci-dessous des simulations numériques[26]. Les figures 4 et 5 démontrent l'absence d'oscillations[27]. Les deux suivantes décrivent la regulation du chariot et du filin, la figure 8 illustre les efforts correspondants, qui sont les « vraies » commandes.

Ce contrôle, dit en *boucle ouverte*, *open loop* en américain, doit, pour atténuer des perturbations d'origines diverses, comme, par exemple, des imperfections de modélisation, être accompagnée d'une boucle de rétroaction, facile à déterminer car (5) est équivalent au système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{(\alpha)} & = & u \\ z^{(\beta)} & = & v \end{array} \right. \tag{6}$$

où $\alpha, \beta \geq 1$, et où u et v sont les *nouvelles* variables de commande[28]. Renvoyons à [31] pour plus de détails.

[26]La loi horaire $(x(t), z(t))$ choisie est une fonction polynômiale du temps. L'absence d'oscillations découle du choix de polynômes, dont les dérivées jusqu'à un certain ordre s'annulent aux temps intial et final. Pour cet exemple donc, comme pour tous ceux de même nature, les calculs numériques n'exigent jamais la discrétisation des équations différentielles.

[27]On « voit » sur la figure 4 que cela est dû à une accélération au début de la trajectoire *planifiée* de m, suivie d'une décélération en fin de course. Une telle propriété était difficile, sinon impossible, à obtenir si l'on avait voulu commencer par déterminer directement les commandes $D(t)$ et $R(t)$, ainsi qu'il est courant dans la littérature actuelle.

[28]Le bouclage en question stabilise (6). Ce peut être, par exemple, un bouclage *statique d'état* qui permet de placer les *pôles* de (6) dans le plan complexe.

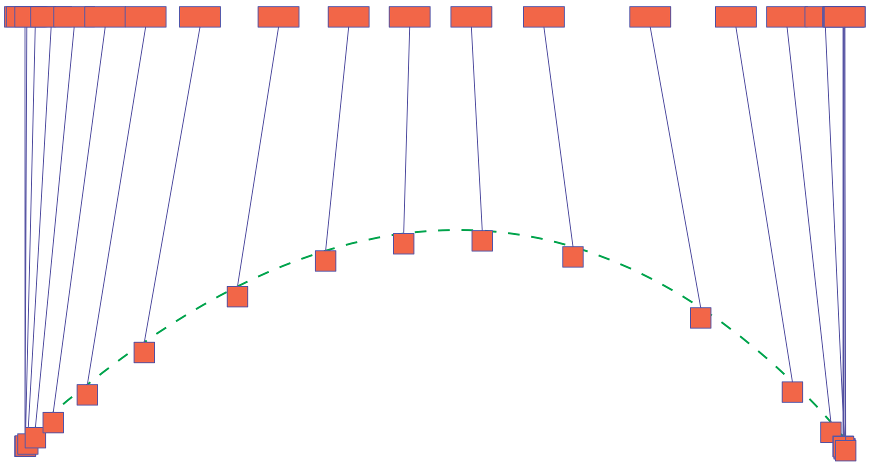

FIG. 4 – Non-oscillation de la charge

6.2 Systèmes non linéaires différentielleement plats

6.2.1 La platitude comme généralisation de la commandabilité linéaire

Un système non linéaire est *(différentiellement) plat* s'il existe un ensemble fini $\mathbf{z}$, appelé *sortie plate*, ou *linéarisante*, tel que :

- toute variable du système est fonction des composantes de $\mathbf{z}$ et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini ;
- toute composante de $\mathbf{z}$ est fonction des variables du système et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini ;
- les composantes de $\mathbf{z}$ et leurs dérivées sont fonctionnellement indépendantes.

C'est, à l'évidence, une généralisation immédiate de la commandabilité linéaire, telle qu'elle a été revue par les modules[29] au paragraphe 5.2.1. Il est facile d'en donner une définition précise avec les corps différentiels et d'en déduire nombre de propriétés. Contentons-nous ici de mentionner l'*équivalence* d'un système plat avec un système linéaire commandable[30].

6.2.2 Une nouvelle géométrie différentielle

Donner des caractérisations de la platitude, c'est-à-dire des méthodes pour voir si un système est plat, est un problème ouvert, en dépit de travaux menés non seulement en France, mais aussi aux États-Unis, en Russie, en Pologne, au Brésil, et ailleurs. Il est clair, cependant, que cette question a un « parfum » d'*intégrabilité*, au sens que possède ce mot en théorie formelle des équations

[29]Si cette perspective avait été adoptée plus tôt, il est clair, compte tenu de l'importance pratique de la platitude, que tout le développement du non-linéaire aurait été bouleversé.
[30]Cette équivalence, dans l'exemple de la grue, se lit avec les équations (6).

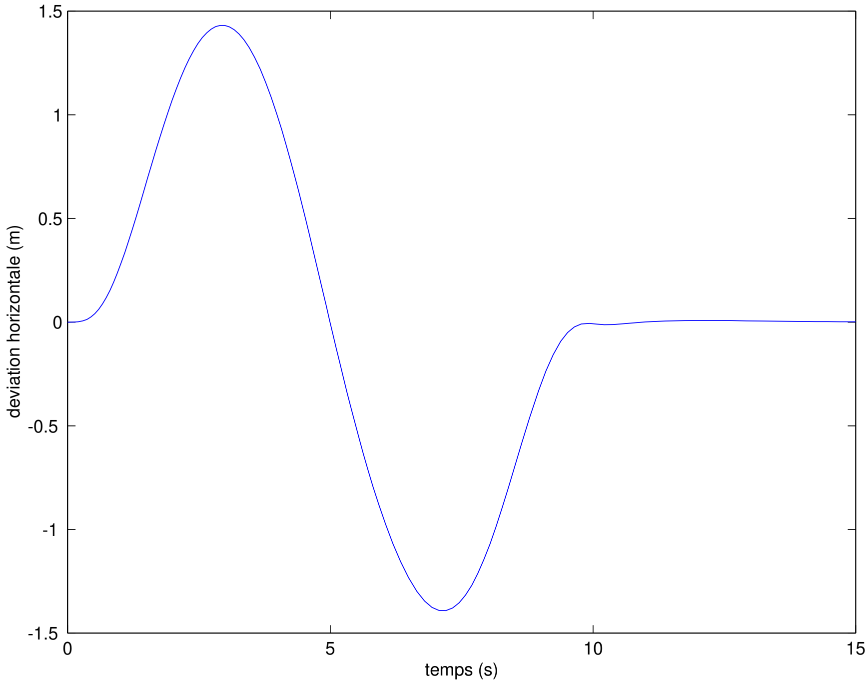

FIG. 5 – Déviation horizontale

aux dérivées partielles[31][32]. C'est pourquoi, nous avons recherché un langage de géométrie différentielle adapté. Celui, classique en contrôle non linéaire et brièvement évoqué au paragraphe 4.1.3, ne pouvait convenir car trop lié à la représentation d'état. Pour tenir compte de la nécessité d'utiliser des dérivées d'ordre arbitraire, nous avons choisi les *diffiétés*[33] de l'école fondée, il y a une trentaine d'années à Moscou, par A.M. VINOGRADOV. Il convient d'ajouter que ces outils mathématiques délicats n'ont pas jusqu'à présent permis des progrès décisifs.

6.2.3 Intérêt de la platitude

En imposant une trajectoire « désirée » à la sortie plate, on obtient les trajectoires de toutes les autres variables du système, et, en particulier, des variables de commande, sans intégrer d'équations différentielles[34]. Un choix judicieux de

[31] Ce point, qui nous était présent dès l'origine, explique la dénomination *platitude*, inspirée des coordonnées *plates* du théorème de Frobenius.

[32] D. HILBERT et É. CARTAN étaient déjà, dans les années 1910, tombés sur des question d'intégrabilité analogues à celles posées par la platitude.

[33] J.-B. POMET, de l'INRIA à Sophia-Antipolis, est, indépendamment, arrivé à une conclusion voisine. Aux États-Unis, R.M. MURRAY, du Caltech, et d'autres ont, par la suite, préféré le langage des *formes extérieures* d'É. CARTAN.

[34] D. HILBERT, dans le travail mentionné plus haut, écrivait *integrallos*.

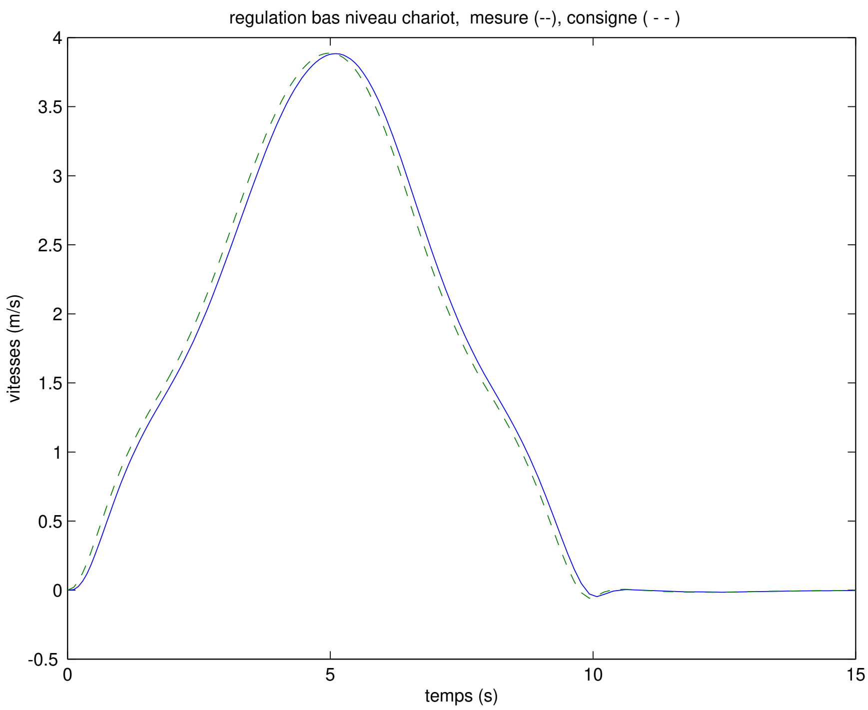

FIG. 6 – Régulation du chariot. Mesure (–), consigne (- -)

la trajectoire désirée de la sortie plate et de la loi horaire permet de respecter de manière commode la plupart des contraintes usuelles, telles l'évitement d'obstacles ou le non-dépassement de certaines vitesses, qui étaient souvent, jusqu'alors, une gageure. Si la platitude est mathématiquement « rare[35]», il n'en va pas ainsi en pratique où la modélisation de beaucoup de systèmes, sinon de la majorité, est plate, avec, autre fait remarquable, une sortie plate à l'interprétation physique claire. Ainsi, la voiture, qui, roulant sans glisser, obeit aux équations de la mécanique non holonome, est, avec ses deux commandes, le moteur et le volant, un système plat. Les coordonnées du milieu de l'essieu arrière constituent une sortie plate[36].

Cette commande en boucle ouverte[37], c'est-à-dire sans boucle de rétroaction,

[35]On peut, évidemment, en donner un sens précis.

[36]Voilà pourquoi, lors de manœuvres délicates, comme se garer, on recule, en regardant par le milieu de la lunette arrière !

[37]Ce type de commande, au nom américain de *feedforward*, était restée peu présent non seulement dans les enseignements et la recherche universitaires, mais aussi dans la pratique des ingénieurs. L'utilisation quasi-exclusive des boucles de rétroaction rend délicate, voire impossible, la maîtrise des régimes transitoires. Une exception notable à cette tendance est fournie par la commande *prédictive*, dont l'un des initiateurs est l'ingénieur français J. RICHALET. Cette approche souffre, cependant, en pratique comme en théorie, de l'utilisation de techniques d'optimisation assez lourdes, qui freinent son développement.

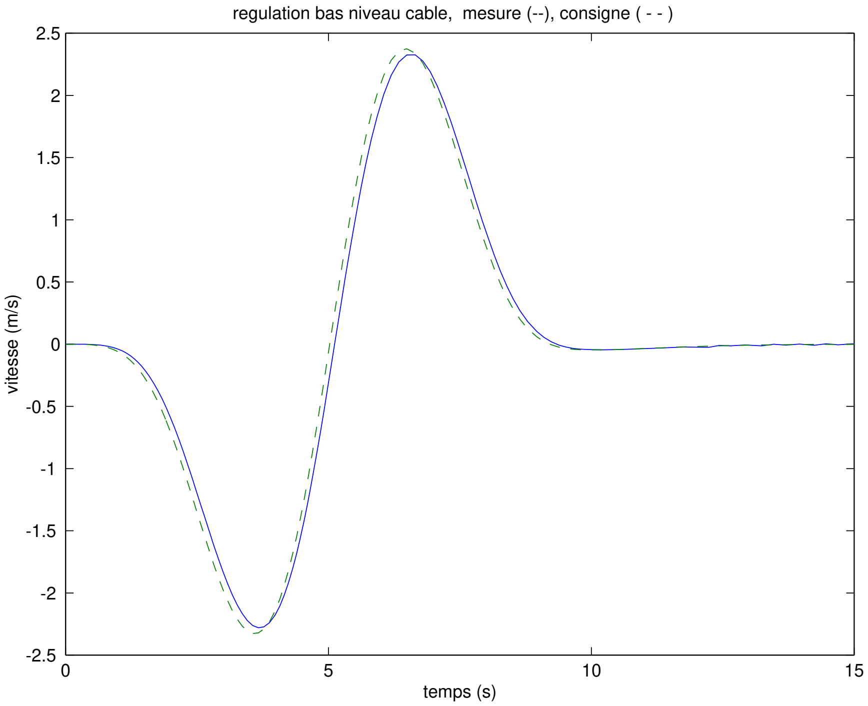

FIG. 7 – Régulation du filin. Mesure (–), consigne (- -)

est complétée, grâce à l'équivalence avec un système linéaire, comme en (6), par une boucle de rétroaction qui assure la stabilisation au voisinage de la trajectoire de référence.

Ces méthodes, qui apportent une solution claire et facile à mettre en œuvre à une multitude de problèmes pratiques, ont aussi fait progresser diverses questions d'ordre plus théorique. Contentons-nous, ici, d'évoquer les deux points suivants :

– La stabilisation de véhicules non holonomes et de certains moteurs. À l'équilibre, on sait, depuis un résultat d'obstruction, dû à R.W. BROCKETT (Harvard), qu'on ne peut y parvenir, comme en linéaire, par une boucle de rétroaction, fonction du seul état. Plusieurs chercheurs, notamment, en France, J.-M. CORON (Université Paris-Sud) et J.-B. POMET (INRIA Sophia-Antipolis), ont démontré que l'on peut obtenir une stabilisation asymptotique avec une boucle dépendant explicitement du temps. Ces résultats remarquables ne sont pas utilisables en pratique car non constructifs et, surtout, exigeant, de tourner indéfiniment autour de la cible en s'en rapprochant. Le choix de l'abscisse curviligne comme « nouveau temps » sur une trajectoire rejoignant la cible, permet de supprimer la singularité et d'obtenir avec une boucle élémentaire une stabilisation approchée, non asymptotique, qui a, en France et à l'étranger (au Caltech, par exemple),

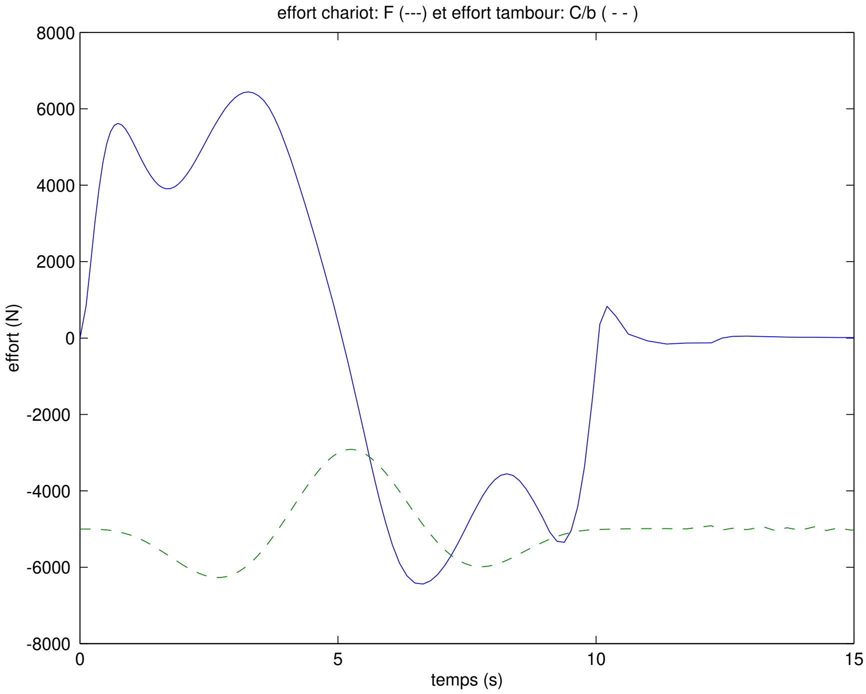

FIG. 8 – Forces correspondantes. Chariot (–), tambour (- -)

été implantée avec fruit.

– Pour les systèmes à *déphasage non minimal*, c'est-à-dire dont l'inverse à gauche est instable, il est délicat d'imposer un comportement donné à la sortie, car tout écart sur la commande pévue à cet effet produit une déviation tendant vers l'infini. Cette question, qui, en raison de son intérêt pratique, a suscité une littérature considérable, devient sans objet avec la platitude, puisque la dynamique inverse associée à la sortie plate est triviale.

6.2.4 Applications

Il y a eu, en peu d'années, un grand nombre d'illustrations concrètes, dans les domaines les plus variés (robotique, aéronautique, moteurs électriques, paliers magnétiques, suspensions actives, embrayages et balais d'essuie-glace pour automobiles, divers types de réacteurs en génie chimique, etc.). Beaucoup ont été testées avec succès en laboratoire. Certaines sont exploitées industriellement (génie chimique, moteurs électriques, balais d'essuie-glace, etc).

6.2.5 Un mot sur les systèmes non plats

Bien entendu, des systèmes concrets non plats existent. Nous avons proposé pour certains, de type pendulaire, une commande *vibrante*, dont l'origine remonte à des physiciens, comme KAPITSA. Après moyennisation, on se ramène à la platitude. Les recherches actuelles sur le sujet emploient presque toutes des outils d'algèbre différentielle, dont je suis à l'origine.

6.3 Dimension infinie

6.3.1 Systèmes à retards

Théorie. Il est aisé d'étendre aux systèmes linéaires à retards, qui sont la classe la plus simple en dimension infinie, le formalisme des modules du paragraphe 5.2. L'anneau de base est désormais un anneau de polynômes en plusieurs indéterminées, où, en plus de la dérivation, on a les opérateurs de translation associés aux retards indépendants. J'ai suggéré cette démarche à H. MOUNIER dans sa thèse, soutenue en 1995. L'examen de nombreux exemples pratiques montrent que la liberté du module serait trop contraignante pour définir la commandabilité ; on utilise plutôt la propriété plus faible d'être *sans torsion*[38]. Illustrons cela par le système à un seul retard, dit, parfois, de Broïda, et *a priori* élémentaire,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t-1)$$

qui joue un rôle certain dans les applications[39]. On lui associe un module sur l'anneau $\mathbf{R}[\frac{d}{dt}, \sigma]$ des polynômes en deux indéterminées, où σ désigne l'opérateur de retard, $\sigma f(t) = f(t-1)$. Il découle du théorème de Quillen-Suslin, résolvant une conjecture fameuse de J.-P. SERRE, que ce module n'est pas libre, mais sans torsion. On parvient à un module libre, en introduisant l'avance σ^{-1}, c'est-à-dire en prenant le module *localisé* sur l'anneau $\mathbf{R}[\frac{d}{dt}, \sigma, \sigma^{-1}]$, qui est libre de base x, car

$$u(t) = \dot{x}(t+1) - x(t+1) \tag{7}$$

Voici un rapide résumé des acquis de cette approche :

- On « récupère » la liberté, indispensable à la mise en œuvre de la platitude, en inversant un polynôme dont les seules indéterminées sont des opérateurs de retard[40].

[38] Un module est dit *sans torsion* si 0 est le seul élément de torsion. Un module libre est évidemment sans torsion. La réciproque n'est pas vraie avec un anneau de polynômes en plusieurs variables.

[39] Il permet de modéliser, au moins *localement*, des systèmes fort complexes. La justification mathématique de cette propriété, aussi surprenante que remarquable, bien connue des ingénieurs en génie chimique, reste à découvrir.

[40] C'est une manifestation de la technique de *localisation*, classique en algèbre commutative, et fort utile dans ces travaux sur les systèmes. Ici, comme le montre (7), elle nécessite des avances. La liberté servant, en pratique, à déterminer une trajectoire désirée, cela n'est pas un handicap.

- La littérature sur les systèmes à retards propose une grande diversité de définitions de la commandabilité, données selon les techniques mathématiques utilisées. On les a, pour la première fois, comparées et classifiées[41].
- On a « isolé » une classe particulière de systèmes à retards, dits *quasi-finis*, très fréquente en pratique. On a pu, alors, proposer des *correcteurs* de type *PID* et *de Smith*, y compris lorsqu'il y a instabilité, résolvant ainsi des problèmes ouverts depuis longtemps.

Applications. Cette théorie mathématique des systèmes à retards, qui emprunte beaucoup à la platitude, est à ma connaissance la première à avoir connu des applications concrètes, y compris industrielles, notamment en raffinage pétrolier[42].

6.4 Systèmes à paramètres répartis[43]

Les ingénieurs appellent *systèmes à paramètres répartis*, ou *distribués*, des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles.

Théorie. La formule classique de d'Alembert donnant la solution de l'équation des cordes vibrantes à partir de deux fonctions arbitraires d'une seule variable permet de comprendre comment la commande d'une telle équation se ramène à la théorie précédente des systèmes à retards. Pour des équations comme celles de la chaleur, des télégraphistes, ou d'Euler-Bernoulli, le calcul opérationnel permet l'utilisation des modules et donc une commande basée sur les mêmes principes. Il faut y ajouter un ingrédient supplémentaire, les fonctions de Gevrey-Roumieu. Examinons plus attentivement l'équation de la chaleur :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) w(z,t) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad t \geq 0 \tag{8}$$

La condition initiale est $w(z,0) = 0$, les conditions aux bords

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial z} = 0$$

et

$$w(1,t) = u(t)$$

[41]On a pu faire de même pour l'observabilité.

[42]Des extensions, motivées par des considérations pragmatiques, ont été faites en non-linéaire et au cas de retards variables par H. Mounier, N. Petit, P. Rouchon, J. Rudolph, etc.

[43]Une école, tenue en février 2003, à l'Institut Max Planck de Magdebourg (Allemagne), a conduit à la publication des livres suivants, qui fournissent un excellent panorama, théorique et pratique, du sujet,
J. Rudolph, *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems*, Shaker, Aachen, 2003.
J. Rudolph, J. Winkler, F. Woittennek, *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems : Examples and Computer Exercises from Various Technological Domains*, Shaker, Aachen, 2003.
On y trouvera aussi des rappels sur la platitude non linéaire et sur les systèmes à retards.

où $u(t)$ est la commande. Le calcul opérationnel transforme (8) en équation différentielle ordinaire, en la variable indépendante z

$$\hat{w}_{zz} - s\hat{w} = 0 \tag{9}$$

avec conditions aux deux bouts $\hat{w}_z(0) = 0$, $\hat{w}(1) = \hat{u}$. Le paramètre s désigne, évidemment, la dérivation par rapport au temps. Réécrivons la solution de (9)

$$\hat{w} = \frac{\mathrm{ch}(z\sqrt{s})}{\mathrm{ch}(\sqrt{s})}$$

sous la forme

$$Q\hat{w} = P\hat{u} \tag{10}$$

où $P = \mathrm{ch}(z\sqrt{s})$, $Q = \mathrm{ch}(\sqrt{s})$. Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 6.3.1, le $\mathbf{C}[P, Q]$–module correspondant est sans torsion, mais non libre. Le module localisé sur $\mathbf{C}[P, Q, (PQ)^{-1}]$ est libre, de base $\hat{\zeta} = \hat{w}(0)$:

$$\begin{array}{rcl} \hat{w} & = & \mathrm{ch}(z\sqrt{s})\hat{\zeta} \\ \hat{u} & = & \mathrm{ch}(\sqrt{s})\hat{\zeta} \end{array} \tag{11}$$

Pour calculer une trajectoire désirée, on explicite l'action de $\mathrm{ch}(z\sqrt{s})$ sur $\zeta(t)$ par la formule[44]

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{d^\nu \zeta}{dt^\nu} \tag{12}$$

en supposant ζ fonction Gevrey[45] de classe < 2, plate en $t = 0$. Pour que (12) soit valide, il suffit que la fonction $\zeta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifie les conditions suivantes :

1. ζ est C^∞, à support contenu dans $[0, +\infty[$; en particulier, ζ est plate en $t = 0$, donc $\zeta^{(n)}(0) = 0$, pour tout $n \geq 0$.
2. ζ est Gevrey d'ordre < 2.

La fonction C^∞

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ e^{\frac{-1}{t^d}} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

où $d > 0$, est plate en $t = 0$, à support dans $[0, +\infty[$. Elle est Gevrey de classe $1 + \frac{1}{d}$. Prendre pour ζ une telle fonction n'est pas satisfaisant, car cela revient à

---

[44] On peut interpréter caractère infini de cette série comme étant liée à la dimension infinie, commentaire qui s'étend aux systèmes à retards (voir, par exemple, la formule (7)), si l'on regarde les opérateurs de retard et d'avance à l'aide d'un développement infini en puissances de la dérivation. Rappelons qu'en dimension finie on utilise seulement un nombre fini de dérivées.

[45] Rappelons que la fonction ζ est dite Gevrey, ou Gevrey-Roumieu, de classe ou d'ordre $\mu \geq 1$ si, et seulement si,

- elle est C^∞,
- pour tout compact $C \subset \mathbf{R}$ et tout entier $n \geq 0$, on a

$$\mid \zeta^{(n)}(t) \mid \leq c^{n+1}(n!)^\mu$$

où $c > 0$ est une constante dépendant de ζ et C.

obtenir un comportement désiré asymptotiquement, c'est-à-dire pour $t \to +\infty$. On y remédie, en introduisant avec J.-P. RAMIS[46], la fonction Gevrey de classe $1 + \frac{1}{d}$

$$\eta_d(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0 \\ \\ C \int_0^t \exp\left(\frac{-1}{\tau^d(1-\tau)^d}\right) d\tau \quad \text{si } 0 < t < 1 \\ \\ 1 \quad \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

où

$$C = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{\tau^d(1-\tau)^d}\right) d\tau$$

est une constante de normalisation, représentée dans la figure 9 pour $d = 1$.

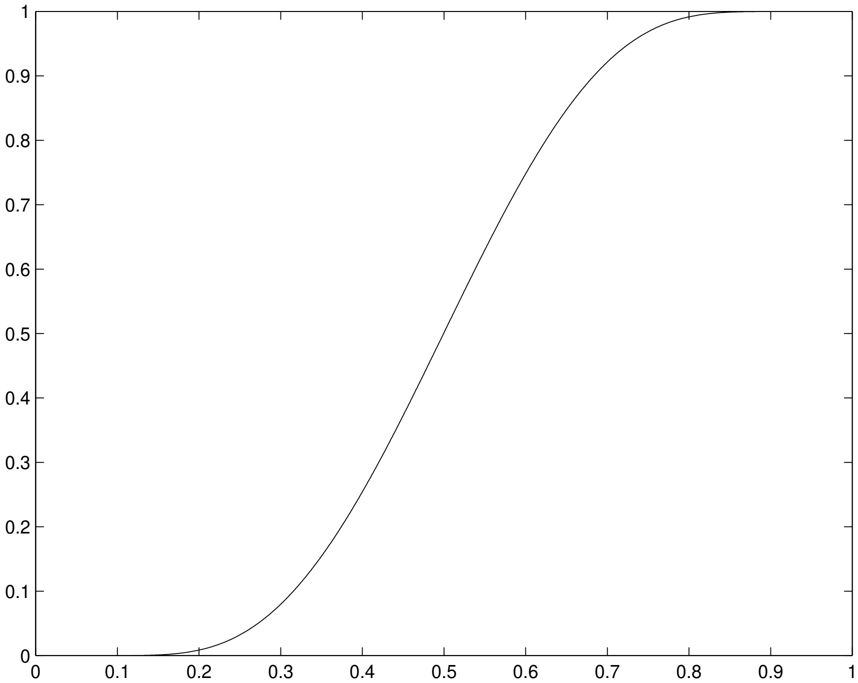

FIG. 9 – La fonction de Gevrey utilisée pour $d = 1$

Ces calculs s'étendent à l'équation d'Euler-Bernoulli des poutres flexibles. Ils ont été testés avec succès en laboratoire.

[46] J.-P. Ramis utilise les fonctions Gevrey dans ses remarquables études sur les séries divergentes. Nous avons beaucoup bénéficié non seulement de ses écrits, mais aussi de conversations très enrichissantes.

Applications. Ces équations aux dérivées partielles traditionnelles, qui permettent de modéliser simplement une grande variété de situations, ont déjà permis de nombreuses illustrations concrètes dans des domaines fort divers, allant du forage pétrolier aux réacteurs chimiques. Certaines, en génies chimique ou électrique notamment, ont été ou sont en passe d'être industrialisées.

6.5 Rayonnement

Les techniques de platitude sont aujourd'hui pratiquées et développées non seulement en France, mais aussi dans bien des pays étrangers. Pour les États-Unis, mentionnons le très actif *California Institute of Technology*, à Pasadena, autour de R.M. MURRAY. De nombreuses thèses plus ou moins théoriques y sont soutenues. On y trouve des dispositifs expérimentaux, parfois lourds, pour l'aviation et la marine américaines. Avec la recherche et l'enseignement en Allemagne et en Autriche, on est en pays « conquis[47] » ! N'énumérons pas les universités et leurs contrats industriels, mais insistons sur la commercialisation par la firme *Bosch*, bien connue, de plusieurs équipements automobiles dont la conception même repose sur la platitude[48]. Comme il ne s'agit pas de dresser un catalogue exhaustif, terminons par l'Institut Polytechnique de Mexico (Mexique) qui, outre la recherche et l'enseignement animés par H. SIRA-RAMÍREZ, organise du 17 au 21 novembre 2003, une semaine pour commémorer les douze ans de la découverte de la platitude, en invitant les principaux protagonistes français, avec publication prévue d'actes.

[47] L'origine de cet engouement est, sans doute, due au fait que j'ai eu plusieurs thésards allemands, dont au moins l'un, J. RUDOLPH, a joué un rôle primordial.

[48] C'est à R. ROTHFUSS que l'on doit cet essor. Or, la thèse de ROTHFUSS, soutenue à Suttgart, sous la direction de M. ZEITZ, a été considérablement influencée par RUDOLPH. J'étais membre du jury !

7 Vers une nouvelle théorie de l'estimation

Ce domaine, qui concentre aujourd'hui l'essentiel de mes réflexions et espoirs, est sans doute trop neuf[49] pour que j'y consacre plus que quelques lignes dans un tel document.

7.1 Correcteurs proportionnels intégraux généralisés

Les *correcteurs proprtionnels-intégraux-dérivés*, ou *PID*, sont des boucles de rétroaction simples qui, depuis près de 60 ans, rassemblent l'essentiel de l'utilisation industrielle de l'automatique. La présence d'un terme dérivé, c'est-à-dire la nécessité de déterminer la dérivée de la mesure donnée par un capteur[50], ont constitué un obstacle à d'éventuelles généralisations, jamais complètement levé. Avec R. MARQUEZ (Université des Andes, Mérida, Vénézuela), alors thésard sous ma direction, E. DELALALEAU (Université Paris-Sud), H. SIRA-RAMÍREZ, j'ai pu contourner cette difficulté en remplaçant les termes dérivés par des intégrales pouvant contenir la commande. Ces *correcteurs proportionnels-intégraux généralisés*, ou *GPI*, ont servi à la commande de moteurs électriques sans avoir recours à des capteurs, parfois coûteux. On entrevoit l'industrialisation de convertisseurs électriques.

7.2 Identification

Les techniques précédentes s'étendent à l'identification[51]. On assure la *robustesse* par rapport aux bruits de façon suivante :

- Les perturbations dites *structurées*, comme les *biais* constants, sont chassées en multipliant par un opérateur différentiel approprié, car elles sont solutions d'équations différentielles.
- Les bruits à fluctuations rapides, traités d'habitude par des méthodes probabilistes et statistiques, sont atténués par des *filtres passe-bas*[52], dont l'intégration est l'exemple le plus simple.

Les calculs, qui ne sont plus de nature asymptotique, fournissent la réponse en *temps réel*[53]. On peut donc, et la question était largement ouverte, en dépit de nombreuses tentatives comme la commande *adaptative*, identifier en *boucle fermée*[54]. Les simulations numériques et les premiers essais de laboratoire sont probants.

[49] Les premières publications datent d'il y a moins d'un an.

[50] Tout signal étant bruité, il est bien connu qu'il est délicat, voire impossible, d'en extraire ses dérivées. Cette restriction ne vaut pas, bien entendu, pour l'intégration.

[51] Un ingrédient nécessaire est la théorie algébrique l'identifiabilité, évoquée au paragraphe 5.1.

[52] Ce sont des dispositifs électroniques entrée-sortie, supposés en général linéaires, qui écrêtent les fréquences à partir d'un certain seuil.

[53] Jargon d'ingénieurs, qui signifie qu'on obtient la réponse très rapidement.

[54] Très souvent, en pratique, on ne peut prendre le temps d'identifier un système, indépendamment de sa commande.

7.3 Traitement du signal

Ces techniques passent à des questions d'estimation en traitement du signal, comme la *démodulation*. Ici encore, les premiers résultats, non encore publiés, obtenus avec M. Mboup (Université Paris V) et H. Mounier, sont prometteurs.

7.4 Détection de pannes

La *détection de pannes* est, en raison de la complexité actuelle des systèmes industriels, un sujet très en vogue, attaqué, en automatique, selon les angles les plus variés. Comme je l'ai montré avec C. Join (CRAN, Nancy), les techniques d'estimation précédentes s'y montrent d'une redoutable efficacité. On a pu, pour la première fois sans doute, détecter des pannes

- en boucle fermée,
- sur des systèmes « incertains », c'est-à-dire à paramètres mal connus.

7.5 Pour une nouvelle *épistémologie* de l'estimation

Ces calculs ne fournissent pas seulement des solutions à des questions dont l'intérêt pratique est incontestable. Ils pourraient aussi modifier notre compréhension des multiples domaines où l'estimation est primordiale. Ainsi, dans un article récent[55], T. Poggio et S. Smale demandent comment édifier une théorie de l'*apprentissage*, qui, dans leur optique, relève de l'estimation, avec « peu » de données. Une réponse vraisemblable tient à la possibilité d'obtenir les évaluations en temps réel, de façon non asymptotique, comme il est proposé ici.

[55] T. Poggio, S. Smale, The Mathematics of Learning : Dealing with Data, *Notices Amer. Math. Soc.*, **50**, 2003, 537-544.

8 En guise de conclusion

La platitude, et sa réussite exceptionnelle dans les applications, souvent très concrètes, attestent la valeur de ma démarche en théorie du contrôle. J'espère que mon approche de l'identification et de l'estimation connaîtra un succès semblable.

À propos des références bibliographiques

Les références bibliographiques ci-dessous, classées par ordre chronologique, ne contiennent que les principales publications. Je n'y ai inclus ni les notes aux comptes rendus ni les communications de congrès, dont le contenu a été développé dans des articles plus complets.

Bibliographie

[1] M. Fliess, Transductions algébriques, *Rev. franç. Info. Rech. Op.*, **4**, 1970, 109-125.

[2] M. Fliess, Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques, *Bull. Sci. math.*, **94**, 1970, 231-239.

[3] M. Fliess, Deux applications de la représentation matricielle d'une série rationnelles non commutative, *J. Algebra*, **19**, 1970, 344-353.

[4] M. Fliess, Sur divers produits de séries formelles, *Bull. Soc. math. France*, **102**, 1974, 181-191.

[5] M. Fliess, Matrices de Hankel, *J. Math. pures appl.*, **53**, 1974, 197-222.

[6] M. Fliess, Transductions de séries formelles, *Discrete Math.*, **10**, 1974, 57-74.

[7] M. Fliess, Séries rationnelles positives et processus stochastiques, *Ann. Inst. H. Poincaré (Calcul des Probabilités et Statistiques)*, **11**, 1975, 1-21.

[8] M. Fliess, Un outil algébrique : les séries formelles non commutatives, in *Mathematical System Theory* (G. Marchesini, S.K. Mitter, Eds), Lect. Notes Econom. Math. Syst. **131**, Springer, Berlin, 1976, 122-148.

[9] M. Fliess, Un codage non commutatif pour certains systèmes échantillonnés non linéaires, *Inform. Control*, **38**, 1978, 264-287.

[10] M. Fliess, Remarque sur une variante des systèmes réguliers (ou bilinéaires), *Inform. Control*, **39**, 1978, 82-86.

[11] M. Fliess, Une théorie fonctionnelle de la réalisation en filtrage multidimensionnel échantillonné, récurrent, *Inform. Control*, **43**, 1979, 338-355.

[12] M. Fliess, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, *Bull. Soc. math. France*, **109**, 1981, 3-40.

[13] M. Fliess, D. Normand-Cyrot, Algèbres de Lie filtrées transitives, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen, *Semin. Proba. XVI, 1980/81*, Lect. Notes Math. **920**, Springer, Berlin, 1982, 257-267.

[14] M. Fliess, F. Lamnabhi-Lagarrigue, Application of a new functional expansion to the cubic anharmonic oscillator, *J. Math. Physics*, **23**, 1982, 495-502.

[15] M. Fliess, M. Lamnabhi, F. Lamnabhi-Lagarrigue, An algebraic approach to nonlinear functional expansions, *IEEE Trans. Circuits Systems*, **30**, 1983, 554-570.

[16] M. Fliess, I. Kupka, A finiteneess criterion for input-output systems, *SIAM J. Control Optimiz.*, **21**, 1983, 721-728.

[17] M. Fliess, Réalisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives, *Invent. Math.*, **71**, 1985, 521-537.

[18] M. Fliess, Décomposition en cascade des systèmes automatiques et feuilletages invariants, *Bull. Soc. math. France*, **113**, 1985, 285-294.

[19] M. Fliess, Vers une notion de dérivation fonctionnelle causale, *Ann. Instit. H. Poincaré (Anal. non Lin.)*, **3**, 1986, 67-76.

[20] M. Fliess, Automatique et corps différentiels, *Forum Math.*, **1**, 1989, 227-238.

[21] M. Fliess, Automatique en temps discret et algèbre aux différences, *Forum Math.*, **2**, 1990, 213-232.

[22] M. Fliess, Controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics, *IEEE Trans. Automat. Control*, **33**, 1990, 994-1001.

[23] M. Fliess, Some basic structural properties of generalized linear systems, *Systems Control. Lett.*, **15**, 1990, 391-396.

[24] M. Fliess, M. Hasler, Questioning the classic state space description via concrete examples, in *Realization and Modelling in System Theory (Proc. MTNS-89)*, Kluwer, Boston, 1990, 1-12.

[25] E. Delaleau, M. Fliess, Algorithme de structure, filtration et découplage, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **I-315**, 1992, 101-106.

[26] S. Diop, M. Fliess, On nonlinear observability, *Proc.* 1^{st} *Europ. Control Conf.* (C. Commault, D. Normand-Cyrot, J.M. Dion, L. Dugard, M. Fliess, A. Titli, G. Cohen, A. Benveniste, I.D. Landau, Eds). Hermès, Paris, 1991, pp. 152-157.

[27] S. Diop, M. Fliess, Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories, *Proc.* 36^{th} *IEEE Conf. Decision Control.* Brighton, 1991, pp. 714-719.

[28] M. Fliess, Reversible linear and nonlinear discrete-time dynamics, *IEEE Trans. Automat. Control*, **37**, 1992, 1144-1153.

[29] M. Fliess, Invertibility of causal discrete time dynamical systems, *J. Pure Applied Algebra*, **86**, 1993, 173-179.

[30] M. Fliess, Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert, *Linear Algebra Appl.*, **203-204**, 1994, 429-442.

[31] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples, *Internat. J. Control*, **61**, 1995, 1327-1361.

[32] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, *Proc. Europ. Control Conf.*, Rome, 1995.

[33] M. Fliess, H. Bourlès, Discussing some examples of linear system interconnections, *Systems Control Lett.* **27**, 1996, 1-7.

[34] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible, in *Élasticité, viscoélasticité et contrôle optimal*, *ESAIM Proc.*, **2**, 1997, 157-168.

[35] H. Bourlès, M. Fliess, Finite poles and zeros of linear systems : An intrinsic approach, *Internat. J. Control*, **68**, 1997, 897-922.

[36] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, Deux applications de la géométrie locale des diffiétés, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **66**, 1997, 275-292.

[37] M. Fliess, H. Mounier, Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach, *ESAIM : Control Optimisation Calculus Variations*, **3**, 1998, 301-314.

[38] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess, P. Rouchon, Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as a delay system, *ESAIM : Control Optimisation Calculus Variations*, **3**, 1998, 315-321.

[39] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor : A multivariable case, *Proc.* 37^{th} *Conf. Decision Control*, Tampa, FL, 1998, 439-442.

[40] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, Some open questions related to flat nonlinear systems, *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, V.D. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, J.C. Willems, Eds, Springer, London, 1998, 99-103.

[41] M. Fliess, P. Martin, N. Petit, P. Rouchon, Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal, *Traitem. Signal*, **15**, 1998, 619-625.

[42] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, Nonlinear control and diffieties with an application to physics, *Secondary Calculus and Cohomological Physics* (M. Henneaux, J. Krasil'shchik, A. Vinogradov, Eds), Contemp. Math. **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 81-91.

[43] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **44**, 1999, 922-937.

[44] M. Fliess, H. Mounier, Tracking control and π–freeness of infinite dimensional linear systems, *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision* (G. Picci, D.S. Gilliam, Eds), Birkhäuser, Bâle, 1999, 45-68.

[45] M. Fliess, Variations sur la notion de contrôlabilité, in *Journée Soc. Math. France*, Paris, 2000, 47-86.

[46] M. Fliess, Sur des pensers nouveaux faisons des vers anciens, *Actes Conf. Internat. Francoph. Automatique*, Lille, 2000, 26-36.

[47] R. Marquez, E. Delaleau, M. Fliess, Commande par PID généralisé d'un moteur électrique sans capteur mécanique, *Actes Conf. Internat. Francoph. Automatique*, Lille, 2000, 453-458.

[48] M. Fliess, H. Mounier, On a class of delay systems often arising in practice, *Kybernetika*, **27**, 2000, 295-308.

[49] M. Fliess, R. Marquez, Continuous-time linear predictive control and flatness : a module-theoretic setting with examples, *Internat. J. Control*, **73**, 2000, 606-623.

[50] M. Fliess, R. Marquez, Une approche intrinsèque de la commande prédictive linéaire discrète, *APII J. europ. Syst. automat.*, **35**, 2001, 127-147.

[51] M. Fliess, R. Marquez, E. Delaleau, H. Sira-Ramirez, Correcteurs proportionnels intégraux généralisés, *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, **7**, 2002, 23-41.

[52] M. Fliess, H. Mounier, A trajectory interpretation of torsion-free controllability, *IMA J. Math. Control Information*, **19**, 2002, 49-57.

[53] M. Fliess, On the structure of linear recurrent error-control codes, *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, **8**, 2002, 703-713.

[54] M. Fliess, R. Marquez, H. Mounier, An extension of predictive control, PID regualators and Smith predictors to some linear delay systems, *Internat. J. Control*, **75**, 2002, 728-743.

[55] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, **9**, 2003.

[56] M. Fliess, C. Join, An algebraic approach to fault diagnosis for linear systems, *Proc. CESA Conf.*, Lille, 2003.

[57] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, A new computational approach to the demodulation of CPM signals, *Proc. IEEE Signal Conf.*, Darmstadt, 2003.