ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Ecole Normale Supérieure
45, Rue D'Ulm, 75005 Paris

Giuseppe Longo

DR1, CNRS – ENS
Lab. et Dépt. d'Informatique,
http://www.di.ens.fr/users/longo

e-mail: longo@dmi.ens.fr
(tel. ++33-1-4432-3328; fax -2156)

Rapport de HDR :

« Modèles continus. Calculs. Algorithmique distribuée. »
par Olivier Bournez

Rapporteur : Giuseppe Longo

Le document de O. Bournez (OB dans la suite) est un texte remarquable, par envergure, clarté et originalité. Sa lecture est extrêmement agréable, car l'auteur introduit une grande quantité de résultats, pris de la littérature ou à lui-même, toujours de façon motivée et riche, insérée dans un cadre conceptuel cohérent : il n'est jamais question d'une liste technique dont les motivations seraient escomptées ou partie du folklore du secteur spécifique.
Pourquoi passer du discret au continu en théorie de la calculabilité ? La réponse à cette question est donnée de maintes façons, presque dans chaque chapitre du texte. Ces réponses sont toutes fortes, presque évidentes, mais le lecteur doit savoir qu'il n'a est pas ainsi dans la culture cloisonné à l'arithmétique qui domine en informatique. Cet engagement fort de l'auteur, dans une direction qui a demandé du courage dès le début, est un mérite scientifique qui doit être reconnu avant même tout jugement spécifique du travail entrepris. Il ne s'agît pas seulement de reconnaître la variété des compétences nécessaires (équations différentielles, éléments de physique-mathématique, théorie classique de la recursivité, bien évidemment …), mais aussi le talent de passer d'un type de regard à l'autre (le continu vs. le discret, par exemple).
Dans le premier chapitre OB introduit différents aspects des systèmes dynamiques continus. Il donne, fort justement, un rôle centrale à la notion de Problème de Cauchy polynomial : leur généralité sera au cœur des esquisses d'unification développées dans les chapitres suivants. Une première remarque sur la non neutralité de la discrétisation est faite sur la base d'un article très récent où l'on démontre qu'une simple dynamique unidimensionnelle passe de la stabilité au chaos selon le pas de la discrétisation. Une première introduction est faite du GPAC, machine analogique classique qui, sous la forme originaire de « analyseur

différentiel », a précédé la machine de Turing de '36 (et que Turing cite souvent, au moins à partir de '48, quand il commencera à s'intéresser aux systèmes continus).
Le chapitre 2 est aussi un survol, mais le « biais » de l'auteur y apparaît avec toutes ses motivations. Les réseaux génétiques, les dynamiques des populations et, surtout, une vaste gamme de modèles de jeux, sont présentés avec des bonnes argumentations qui en motivent l'immersion dans des cadres continus. Nombreuses questions clarifient les enjeux que ces systèmes présentent ou qui apparaissent bien naturellement suite à leur explicitation à la limite continue. Pourquoi ce passage au continu, souvent déjà largement présent dans la littérature, serait-il avantageux, aussi dans ces cas ? On reviendra, tout comme OB, sur cette sorte de limite thermodynamique de la construction de connaissance et ses motivations.
La question à la fin du chapitre vaut elle même une vie de travail. En fait, corréler les systèmes d'équations différentielles présentés à l'expressivité des systèmes distribués et concurrents, demande au moins savoir ce que ces systèmes expriment, en tant que processus, ce qui est loin d'être clair : il est tout à fait possible que le passage par le continu puisse permettre de mieux traiter ce problème, normalement considéré seulement sur des structures discrètes.
Le chapitre 3 est un vaste survol, en tant que version française d'un article dédié au nouveaux paradigmes computationnels. On y introduit, rapidement, mais de façon efficace, les réseaux de Hopfield, les neurones à seuil, les fonctions R-recursives, et, avec plus de précision que dans le chapitre 1, le GPAC. La question de la calculabilité des solutions des équations différentielles y est aussi introduite, avec des références précises aux exemples (et contrexemples). Fort heureusement un voix se lève dans ce mémoire, mais référence est aussi faite à une intuition ancienne de Asarin, pour expliquer qu'il n'est pas très informatif que de prendre un système d'équations et y encoder les machines de Turing. Quand Matiyasevich a fait en premier ce travail, sa nouveauté était remarquable et elle a permis de résoudre un grand problème : les équations diophantiennes utilisées ne faisaient aucune référence à la modélisation physique (le grand enjeu qui donne un sens à la thèse de OB). Ensuite, l'exercice, avec des prétentions de connaissance physico-mathématique, a occupé trop de thèses et d'articles (on raconte que, si on place un carrelage sous une fourmilière, on peut encoder une machine de Turing par les mouvements des fourmis : cela ne dit absolument rien sur l'éthologie des fourmis, sauf qu'elles bougent beaucoup). L'enjeu est l'inverse : qu'est-ce que nous dit la machine digitale quand elle simule/imite/modélise un système dynamique continu ? Très souvent on y perd l'âme (la notion de dimension par exemple, car elle est un invariant topologique point trivial, dont l'importance en physique-mathématique est hors question et qui est perdu quand la topologie naturelle est discrète).
Je crois qu'une bonne partie des résultats d'atteignabilité reste dans les limites de cet exercice : quel est le sens physique de « partir d'un point » ? La mesure en physique est toujours et par principe un intervalle. Fort heureusement, on commence à intégrer, même en calculabilité, ce "petit" problème de la physique : la mesure. Et, en soulignant ce point, OB passe à la question centrale concernant la difficulté de simuler des systèmes continus par un modèle digital. Dans ce cadre, la notion de robustesse est très bien mise en question, avec tous les problèmes que posent ses rapports à la décidabilité algorithmique.
Des extensions de la thèse de Church, un thème traité dans l'annexe, sont aussi discuté et au bon niveau : celui des systèmes d'équations. Bref, mais OB en parlera plus longuement dans la suite, la thèse de Church est depuis 70 ans une évidence (une banalité sans beaucoup d'intérêt informatique ?) pour les systèmes hilbertiens arithmétisant : peut-on comparer (considérer équivalents du point de vue des calculs) les systèmes d'équations différentielles et sous quelles hypothèses ? La thèse de Church et ses variantes est une question qui se pose au niveau des systèmes formels (de l'arithmétique, du continu différentiable, selon les contextes), explique OB. En effet, elle n'a rien à voir avec les processus physiques en tant

que tels, mais au plus, elle peut servir à corréler leurs modèles mathématique (qu'il soit dit en passant, pour le débat : les processus physiques ne calculent pas, en nature. Quelle invention, ces machines physiques à états discrets qui calculent ! elles n'étaient pas du tout dans le monde. En fait, pour faire calculer un phénomène physique, il faut le *mesurer*, un enjeu crucial, classique – non-linéaire - et quantique ; seulement ces machines physiques que nous avons inventées, grâce à Turing, avec leurs bases de données discrètes, permettent un *accès* aux données, une mesure, sans problèmes – exacte et, dans les machines séquentielles, absolue ; voila un élément crucial de tous les problèmes dont on discute).
Le chapitre 4 présente des résultats de l'auteur et ses collaborateurs d'un très grand intérêt. Avant ces travaux, il n'y avait point d'unité dans les différentes approches à la calculabilité sur le continu. Bien évidemment, des passages avaient été donnés, tout comme des exemples et contre-exemples pour des équivalences possibles. Les travaux de OB (et ses co-auteurs) par des restrictions riches de sens physique et des théorèmes (point évidents) permettent de corréler les fonctions GPAC-calculables, les R-recursives et celles de l'analyse recursive. En particulier, une très belle caractérisation algébrique des fonctions de l'analyse recursive donne unité à l'approche suivie.
Le chapitre 5 caractérise des classes de complexité dans un des modèles longuement discutés dans les chapitres précédents, les fonctions à la BBS. Le cadre proposé utilise encore une fois une approche algébrique fort intéressant. Même la légère différence par rapport à la définition originaire (BBS) est très élégante et permets de passer à un cadre beaucoup plus général et informatif.
Le sixième chapitre est une fort belle discussion sur les perspectives. Cette discussion démontre la maturité du chercheur, son talent à saisir les enjeux conceptuels, qui s'ajoute à son talent technique, ce qui n'est pas toujours le cas. Ce passage à la limite continue, au cœur de la vision de OB, est fort bien motivé ; on comprend le rôle de la dimension, par exemple, crucial en physique mathématique, j'y reviens, et qui n'a pas de sens structurel dans tout système où la topologie discrète (c'est à dire, l'absence de topologie) est « naturelle », car un invariant topologique, la dimension cartésienne, est perdu.
Le travail accompli par OB au cours de ces dernières années l'a amené à une remarquable maturité et, dirons-nous, à la sagesse du chercheur, une sagesse nécessaire au suivi de thèses solides et motivées. Ce mémoire démontre une remarquable compétence technique, résume une longue liste de résultats importants et, surtout, montre une 'vision' d'un espace interdisciplinaire difficile. Il confirme que OB peut proposer à des thésards, voire à des jeunes chercheurs, des bonnes conjectures, l'enjeu crucial de toute bonne science : savoir démontrer des théorèmes en mathématiques est très important, ça fait partie essentielle du métier, mais il est encore plus important, surtout pour diriger des recherche d'autres, comprendre quels théorèmes il vaut la peine de démontrer. OB paraît en mesure de faire accéder aussi les autres à cette compréhension. J'exprime donc un avis nettement favorable à la soutenance de cette HDR.