Introduction

Document principal

Motivation Nous avons décidé de consacrer deux chapitres à notre motivation.

Ainsi, le chapitre 1 présente les systèmes dynamiques, avec un point de vue assez mathématique, et classique, ainsi que quelques exemples bien connus de la littérature.

Les exemples du chapitre 2 se distinguent de ceux du chapitre précédant par le fait qu'ils mettent explicitement en jeu une certaine notion de concurrence entre agents.

Ces deux chapitres ne visent pas à réellement produire des résultats nouveaux, mais plutôt à mettre en perspective différents systèmes, et différentes relations entre systèmes, et à mettre en perspectives ce travail.

Chapitre 1 Le premier chapitre vise à argumenter plusieurs faits élémentaires.

Le premier est la richesse, et la subtilité des comportements possibles des systèmes dynamiques continus. Ce point de vue est assez classique, et, sans complexe, est très largement inspiré par l'excellent ouvrage [Hirsch et al., 2003], dont nous reprenons beaucoup d'exemples.

Le second est que différents dispositifs sont intrinsèquement continus, et utilisables comme tels pour réaliser certains calculs.

Enfin, nous voulons insister sur la puissance de modélisation d'une classe de systèmes dynamiques, que nous nommons, en relations avec [Graça, 2007], les problèmes de Cauchy polynomiaux.

Nous discutons aussi, à l'aide du très pédagogique article [Krivine et al., 2006], plusieurs des problèmes qui se posent lorsqu'on cherche à discrétiser des systèmes continus, argumentant par là que l'abstraction continue est souvent la bonne manière de faire.

L'idée que raisonner sur le continu est un moyen très élégant de raisonner sur des systèmes continus ou discrets est initiée dans le chapitre 1, mais se voit essentiellement développée dans le chapitre 2.

Chapitre 2 Nous présentons ainsi dans le chapitre 2, plusieurs modèles, parfois intrinsèquement discrets, dont le bon modèle d'abstraction, de compréhension, et d'étude est le continu.

Certains de ces modèles sont issus de la bioinformatique, pour les réseaux de régulations génétiques, d'autres utilisés en biologie des populations, en virologie biologique, ou en virologie informatique. Nous présentons alors la théorie des jeux, et ses modèles, en nous focalisant sur certains de ses modèles du dynamisme.

Nous cherchons à montrer que ces modèles de dynamiques continus deviennent naturels pour parler d'algorithmique distribuée, en particulier dès que l'on a affaire à des systèmes de grande taille, ou dont on ne contrôle pas les interactions ou la topologie autrement que par des arguments probabilistes ou statistiques.

Ce point de vue nettement moins classique est très récent. Nous discuterons quelques modèles proposés en algorithmique distribuée qui intègrent déjà ces considérations.

Les exemples de ces deux chapitres montrent qu'il est très important d'arriver à comprendre la puissance et la richesse de ces modèles, que ce soit pour les applications citées, mais aussi pour l'algorithmique distribuée et l'informatique actuelle et, nous le pensons, du futur.

Chapitre 3 Ce chapitre constitue un survol de la théorie des calculs pour les modèles à temps continu.

La puissance des modèles de calculs à temps et espace discrets est relativement bien comprise grâce à la thèse de Church : en effet, celle-ci postule que tous les modèles raisonnables et suffisamment puissants ont la même puissance, celle des machines de Turing.

Cependant, on peut considérer des modèles de calculs qui travaillent sur un espace continu. C'est par exemple le cas du modèle de Blum Shub et Smale sur les réels [Blum et al., 1989] (ce modèle est évoqué dans le chapitre 5). Les modèles de l'analyse récursive rentrent aussi dans ce cadre. Ces modèles sont à temps discret.

Mais on peut aussi considérer des modèles où le temps est continu. Les chapitres 1 et 2 en évoquent certains, certains réalistes, certains plutôt folkloriques, et certains futuristes en rapport avec l'algorithmique distribuée. Mais certaines autres grandes classes de modèles ont été considérées. Nous les reprenons dans ce chapitre, en présentant un panorama de ce qui est connu sur leurs propriétés calculatoires.

Chapitre 4 Ce chapitre présente un panorama de quelques-uns de nos résultats personnels à propos de la comparaison de la puissance de plusieurs modèles à temps continu, en relations avec la thèse de Emmanuel Hainry.

Le GPAC (General Purpose Analog Computer) a été introduit en 1941 par Shannon [Shannon, 1941] comme un modèle mathématique d'un dispositif analogique de l'époque : l'Analyseur Différentiel.

Shannon a proposé une caractérisation précise des fonctions calculables dans ce modèle. Les résultats de Shannon ont longtemps été inteprétés comme la preuve que le GPAC est un modèle trop faible, et en tout cas plus faible que l'analyse récursive.

En collaboration avec Manuel Campagnolo, Daniel Graça, et Emmanuel Hainry, nous avons prouvé récemment qu'il n'en est rien.

Ce résultat prend toute sa perspective si l'on comprend que les fonctions calculées par le GPAC correspondent aux problèmes de Cauchy polynomiaux, et que nous argumentons dans le chapitre 1, que presque tous les systèmes dynamiques continus considérés en physique, en biologie, ou en chimie rentrent dans ce cadre.

Parmi les modèles à temps continu, il y a aussi la classe des fonctions $\mathbb{R}$-récursives introduite par Cris Moore dans [Moore, 1996]. L'article de Moore présente des idées fort intéressantes et très originales pour comprendre les calculs sur les réels, qui peuvent se présenter de la façon suivante : puisqu'il n'existe pas de notion de machine universellement acceptée dans le monde continu, pourquoi ne pas contourner le problème en partant des caractérisations des classes de complexité et de calculabilité qui s'affranchissent de notions de machines, en particulier des caractérisations algébriques.

Manuel Campagnolo, dans sa thèse [Campagnolo, 2001], supervisée par Félix Costa et Cris Moore, propose l'idée très intéressante de se limiter aux classes primitives récursives, c'est-à-dire sans opérateur de minimisation, et montre que le remplacement de l'opérateur d'intégration de Moore par un opérateur d'intégration linéaire conduit à une classe de fonctions qui se relie naturellement aux fonctions élémentaires sur les entiers.

Nous avons montré qu'il était possible d'aller plus loin, et de caractériser algébriquement les fonctions élémentairement calculables et calculables au sens de l'analyse récursive.

Nous reprenons nos principaux résultats à ce sujet dans le chapitre 4.

Chapitre 5 Dans ce chapitre, nous reprenons certains de nos résultats à propos de caractérisations logiques de classes de complexité dans le modèle de Blum Shub et Smale, en relations avec la thèse de Paulin Jacobé de Naurois.

Le modèle de Blum Shub et Smale [Blum et al., 1989] constitue un modèle de calcul à temps discret et à espace continu.

Le modèle, défini initialement pour parler de complexité algébrique de problèmes sur le corps des réels, ou plus généralement sur un anneau, a été par la suite été étendu par Poizat dans [Poizat, 1995], [Goode, 1994] en un modèle de calculs sur une structure logique arbitraire.

Par l'intermédiaire de la thèse de Paulin Jacobé de Naurois, aussi supervisée par Felipe Cucker à Hong-Kong et par Jean-Yves Marion, à Nancy, nous avons cherché à comprendre s'il était possible de caractériser syntaxiquement les classes de complexité dans ce modèle sur une structure arbitraire.

Le chapitre 5 reprend nos résultats en droite ligne des caractérisations, dites de la complexité implicite, amorcées par les travaux de Bellantoni et Cook [Bellantoni and Cook, 1992].

Chapitre 6 Enfin, le dernier chapitre est consacré à une conclusion. Nous y reprenons les principales questions.

Annexes

Il semble de tradition de reprendre en annexe dans une HDR quelques publications.

Annexe A Nous reprenons dans cette annexe l'article [Bournez, 2006].

La question de l'existence de systèmes capables de réaliser des hypercalculs, c'est-à-dire d'effectuer des calculs exploitables qui ne seraient pas réalisables par aucune machine de Turing, fait encore couler de l'encre et des controverses. La situation n'est pas si claire qu'elle n'y parait.

Nous avons été invité à exprimer notre point de vue dans un numéro spécial sur le sujet, dans cet article [Bournez, 2006].

Nous y rappelons, en nous basant sur [Copeland, 2002], plusieurs mauvaises compréhensions fréquentes de ce que dit précisément la thèse de Church, et nous présentons un panorama de plusieurs classes de systèmes mathématiques, avec la caractérisation de leur puissance.

L'article [Bournez, 2006] contient plusieurs résultats originaux, et peut aussi se voir comme une remise à jour avec notre compréhension actuelle, des résultats qui existaient lorsque nous avions débuté notre thèse [Bournez, 1999].

Bibliographie

[Bellantoni and Cook, 1992] Bellantoni, S. and Cook, S. (1992). A new recursion-theoretic characterization of the poly-time functions. *Computational Complexity*, 2 :97–110.

[Blum et al., 1989] Blum, L., Shub, M., and Smale, S. (1989). On a theory of computation and complexity over the real numbers ; NP completeness, recursive functions and universal machines. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 21(1) :1–46.

[Bournez, 1999] Bournez, O. (1999). *Complexité Algorithmique des Systèmes Dynamiques Continus et Hybrides*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon.

[Bournez, 2006] Bournez, O. (2006). How much can analog and hybrid systems be proved (super-)Turing. *Applied Mathematics and Computation*, 178(1) :58–71.

[Campagnolo, 2001] Campagnolo, M. L. (2001). *Computational complexity of real valued recursive functions and analog circuits*. PhD thesis, IST, Universidade Técnica de Lisboa.

[Copeland, 2002] Copeland, B. J. (Fall 2002). The Church-Turing thesis. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University. Available online at : *http ://plato.stanford.edu/entries/church-turing/*.

[Goode, 1994] Goode, J. B. (1994). Accessible telephone directories. *The Journal of Symbolic Logic*, 59(1) :92–105.

[Graça, 2007] Graça, D. (2007). *Thèse de Daniel Graça, titre à fixer*. PhD thesis, IST. en rédaction.

[Hirsch et al., 2003] Hirsch, M. W., Smale, S., and Devaney, R. (2003). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press.

[Krivine et al., 2006] Krivine, H., Lesne, A., and Treiner, J. (2006). Discrete-time and continuous-time modelig : some bridges and gaps. *Mathematical Structures in Computer Science*. In print.

[Moore, 1996] Moore, C. (1996). Recursion theory on the reals and continuous-time computation. *Theoretical Computer Science*, 162(1) :23–44.

[Poizat, 1995] Poizat, B. (1995). *Les petits cailloux*. aléas.

[Shannon, 1941] Shannon, C. E. (1941). Mathematical theory of the differential analyser. *Journal of Mathematics and Physics MIT*, 20 :337–354.