UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY I
Master 1ière Année

UE: Algorithmes et Complexité
Responsables: René SCHOTT, Olivier BOURNEZ
Date: Lundi 6 Mars 2006, de 9h00 à 12h00
Documents non autorisés

Les exercices sont indépendants.
Il est suggéré de passer 1h30 sur l'exercice 1, et 1h30 sur les autres exercices.

1 Exercice 1

Un arbre 2.3 est un arbre de recherche tel que :
- chaque noeud interne a 2 fils ou 3 fils,
- toutes les feuilles sont au même niveau.

Chaque feuille de l'arbre contient un élément de l'ensemble représenté par l'arbre 2.3, et les éléments sont rangés de gauche à droite par ordre croissant dans les feuilles.
Chaque noeud interne contient deux valeurs : le plus grand élément du premier sous-arbre de ce noeud, puis le plus grand élément de son second sous-arbre.
1) Etant donné un arbre 2.3 contenant n noeuds internes et f feuilles, et de hauteur h, montrer que

$$2^{h+1} - 1 \leq n + f \leq \frac{3^{h+1} - 1}{2}$$

et

$$2^h \leq f \leq 3^h$$

2) Ecrire un algorithme de recherche d'un élément dans un arbre 2.3.
3) Etudier des algorithmes d'adjonction et de suppression d'un élément qui conservent les propriétés d'un arbre 2.3.

2 Exercice 2

Proposer un algorithme, qui étant donnés des entiers $n, w_1, \cdots, w_n$, retourne le n ème élement S_n de la suite définie par $S_1 = w_1$, $S_2 = w_2$, $S_{n+2} = w_{n+2}S_{n+1} + S_n$ pour tout n. Evaluer sa complexité.

3 Exercice 3

Le professeur Bell conduit une voiture entre Amsterdam et Lisbonne sur l'autoroute E10. Son reservoir, quand il est plein, contient assez d'essence pour faire n kilomètres, et sa carte lui donne les stations-services sur la route.
1) Donner une méthode efficace grâce à laquelle Joseph Bell pourra déterminer les stations-services où il peut s'arrêter, sachant qu'il souhaite faire le moins d'arrêts possibles.
2) Démontrer proprement que votre stratégie est optimale.

4 Exercice 4

Montrer proprement que le problème suivant est NP-complet: Etant donnés un grahe $G = (V, E)$, un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient une roue de taille K, i.e. un ensemble de $K + 1$ sommets $w, v_1, v_2, \cdots, v_K$ tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i < K$, $(v_K, v_1) \in E$, et $(v_i, w) \in E$ pour $1 \leq i \leq K$ (w est le centre de la roue).

On pourra utiliser le problème HAMILTON vu en cours.