UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY I
Master 1ière Année

UE: Algorithmes et Complexité
Responsable: Olivier BOURNEZ
Date: Mardi 17 Janvier 2006, de 10h00 à 12h00
Documents non autorisés

Les exercices sont indépendants, en particulier les exercices 1 et 2.

1 Exercice 1: Problème du Sac à Dos "tout ou rien"

Un voleur dévalisant un magasin trouve n objets, le $i$ème objet valant v_i euros, et pesant w_i kilogrammes, v_i et w_i étant des entiers. Il veut évidemment emporter un butin de plus grande valeur possible mais il ne peut porter que W kilogrammes dans son sac-à-dos. On cherche un algorithme qui lui permette de déterminer quels objets il doit prendre.

On suppose dans cet exercice, qu'il n'est pas possible de découper les objets.

1.1 Relation de récurrence

Considérons $SAD(i, w)$ comme la valeur maximale du butin s'il n'est composé que (d'un sous-ensemble) des i premiers objets, et s'il pèse moins que w kilogrammes.

Etablir une relation de récurrence sur $SAD(i, w)$.

1.2 Algorithme 1

En déduire un algorithme pour déterminer $SAD(n, W)$. Quelle est sa complexité?

1.3 Algorithme 2

Ecrire un algorithme qui détermine les objets à prendre.

2 Exercice 2: Problème du Sac à Dos "fractionnaire"

On suppose maintenant que le voleur peut ne prendre qu'une fraction d'un objet et n'est plus obligé de prendre l'objet tout entier comme précédemment, ou de le laisser.

2.1 Algorithme

Proposer un algorithme glouton dans ce cas (on pourra raisonner sur la valeur au kilogramme des objets, c'est-à-dire sur v_i/w_i).

2.2 Optimalité

Montrer que l'algorithme est optimal.

3 Exercice 3: k-SAT

Pour un entier k, on appelera k-SAT le problème qui prend en entrée une formule booléenne sous forme normale conjonctive à m clauses et n-variables, où chaque clause est la disjonction d'exactement k-littéraux, et doit décider si la formule est satisfaisable.

On appelera $\leq k$-SAT le problème qui prend en entrée une formule booléenne sous forme normale conjonctive à m clauses et n-variables, où chaque clause est la disjonction de au plus k-littéraux, et doit décider si la formule est satisfaisable.

3.1 $\leq k$-SAT

Montrer proprement en admettant la NP-complétude de 3-SAT que $\leq$ 4-SAT est NP-complet.

3.2 k-SAT

Montrer proprement en admettant la NP-complétude de 3-SAT que 4-SAT est NP-complet.

4 Exercice 4: Chevaliers de la table ronde

On a n chevaliers, et on connait toutes les paires d'ennemis parmi-eux. Montrer que le problème de déterminer si on peut les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire d'ennemis ne soit côte-à-côte est NP-complet.

On pourra utiliser la NP-complétude du problème HAMILTON, vue (et admise) en cours.