



Systemes Hybrides

Partie 1: Définitions, Exemples



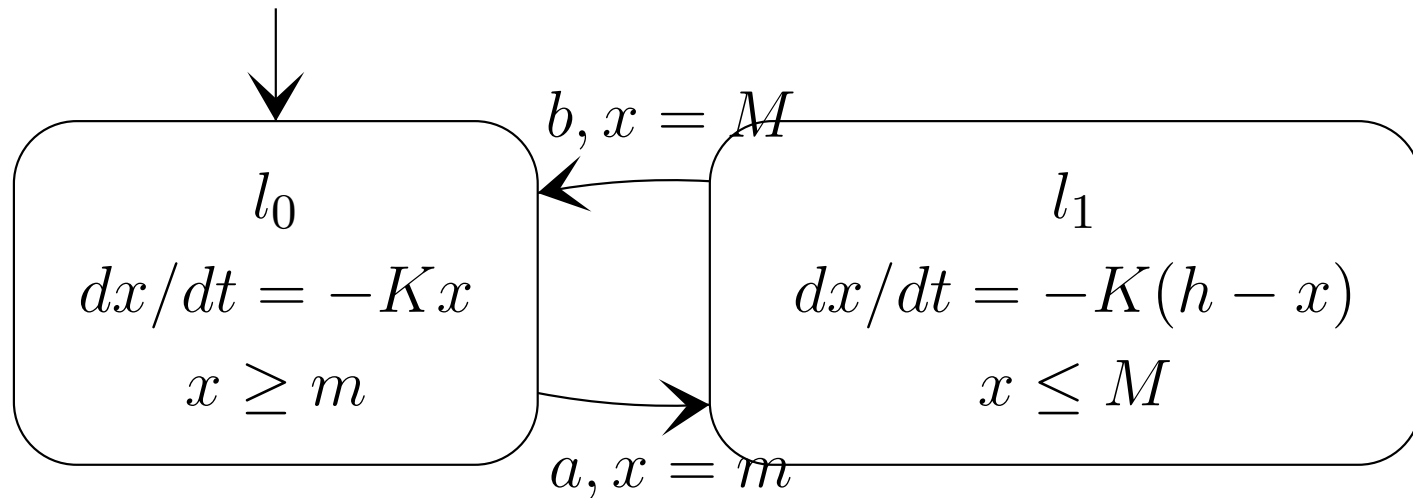
Motivation



- Les systèmes hybrides permettent de modéliser les systèmes discrets qui évoluent dans un environnement continu.
- Une trajectoire d'un système hybride est constituée d'évolutions continues et de transitions discrètes instantanées.
- Les automates temporisés constituent une classe particulière de systèmes hybrides.



Exemple 1: un thermostat



Évolutions:

1. $x(t) = x(0)e^{-Kt}$ dans la place l_0 .
2. $x(t) = x(0)e^{-Kt} + h(1 - e^{-Kt})$ dans la place l_1 .

Systemes hybrides deterministe en temps

Principe: un système hybride se modélise comme un automate fini avec des variables.

Formellement, un système hybride (déterministe en temps) est $H = (Loc, Var, Init, Lab, Edg, Act, Inv)$ où

- Loc un ensemble fini de *places* (locations).
- Var un ensemble fini de variables à valeur dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels.
Une *valuation* est une fonction de Var dans $\mathbb{R}$. On note V l'ensemble des valuations.
Un *état* est un couple (l, v) , avec $l \in Loc$, $v \in V$.
- $Init$ est un ensemble d'états.
- Lab un ensemble fini d'étiquettes.



- $Edg \subset Loc \times Lab \times \mathcal{P}(V^2) \times Loc$ un ensemble fini d'arêtes.

$e = (l, a, \mu, l') \in Edg$ correspond à une transition discrète entre la place l et la place l' , étiquetée par a , conditionnée et avec effet sur les variables donné par $\mu \subset V^2$.

- Act est une fonction qui associe à chaque place $l \in Loc$ une fonction de $V \times IR^{\geq 0}$, où $IR^{\geq 0}$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls, vers V .

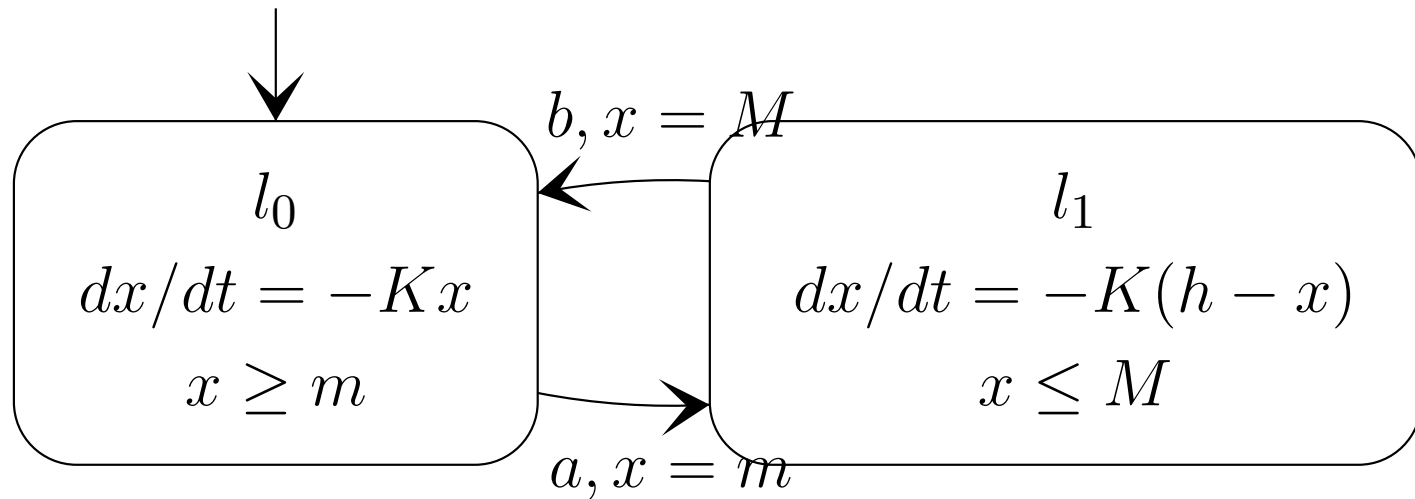
Hypothèse. On suppose cet ensemble clos par *passage du temps*: pour tout $l \in Loc$, $f \in Act(l)$, $t \in IR^{\geq 0}$, la fonction $(f + t)$ est aussi dans $Act(l)$, où $(f + t)$ est la définie par $(f + t)(v, t') = f(f(v, t), t')$.

Principe: $Act(l)(v, t)$ donne l'état des variables au temps t dans la place l partant de v à $t = 0$.

- Inv une fonction qui associe à chaque place un sous-ensemble de V , appelé *invariant*.



Exemple du thermostat





Pour le thermostat:

1. $Loc = \{l_0, l_1\}$
2. $Var = \{x\}$
3. $Lab = \{a, b\}$
4. $Edg = \{e_0, e_1\}$ **avec** $e_0 = (l_0, a, \mu_0, l_1)$, $e_1 = (l_1, b, \mu_1, l_0)$,
 $\mu_0 = \{(x, x') | x = m \wedge x' = x\}$, $\mu_1 = \{(x, x') | x = M \wedge x' = x\}$.
5. $Act(l_0)(x_0, t) = x_0 e^{-Kt}$ **et** $Act(l_1)(x_0, t) = x_0 e^{-Kt} + h(1 - e^{-Kt})$.
6. Inv est telle que $Inv(l_0) = \{x | x \geq m\}$, $Inv(l_1) = \{x | x \leq M\}$.



Trajectoires



- Une trajectoire est une suite de:
 1. transitions discrètes $\rightarrow^a$, $a \in Lab$;
 2. et d'évolutions continues $\rightarrow^t$, $t \in IR^{\geq 0}$.
- Formellement, à un système hybride H correspond un système de transitions étiqueté avec un ensemble d'états infini

$$(\Sigma, S, S_0, \rightarrow)$$

défini par

- $S = Loc \times V$. (l'ensemble des états de H).
- $S_0 = Init$.
- $\Sigma = Lab \cup IR^{\geq 0}$.





- • $\rightarrow = \{ \rightarrow^a, a \in Lab \} \cup \{ \rightarrow^t, t \in IR^{\geq 0} \}$, avec:
1. $(l, v) \rightarrow^a (l', v')$ ssi il existe $e = (l, a, \mu, l') \in Edg$
avec $(v, v') \in \mu$
 2. $(l, v) \rightarrow^t (l, v')$ ssi $Act(l)(v, t) = v'$ et
 $\forall 0 \leq t' \leq t, Act(l)(v, t') \in Inv(l)$.



Modèle plus général

Voici un modèle plus général, permettant de parler de systèmes non-déterministes en temps:

Formellement, un système hybride est

$H = (Loc, Var, Init, Lab, Edg, Act, Inv)$ avec

- Loc un ensemble fini de *places* (locations).
- Var un ensemble fini de variables à valeur dans IR , l'ensemble des réels.

Une *valuation* est une fonction de Var dans IR . On note V l'ensemble des valuations.

Un *état* est un couple (l, v) , avec $l \in Loc$, $v \in V$.

- $Init$ est un ensemble d'états.
- Lab un ensemble fini d'étiquettes.

- $Edg \subset Loc \times Lab \times \mathcal{P}(V^2) \times Loc$ un ensemble fini d'arêtes.
 $e = (l, a, \mu, l') \in Edg$ correspond à une transition discrète entre la place l et la place l' , étiquetée par a , conditionnée et avec effet sur les variables donné par $\mu \subset V^2$.
- Act est une fonction qui associe à chaque place $l \in Loc$ un ensemble d'activités.
Une activité est une fonction de $IR^{\geq 0}$, l'ensemble des réels positifs ou nuls, vers V .
Chaque activité f donne une évolution possible des variables dans une place donnée: $f(t)(l) \in V$ donne la valeur des variables au temps t dans la place l .
Hypothèse. On suppose cet ensemble clos par *passage du temps*: pour tout $l \in Loc$, $f \in Act(l)$, $t \in IR^{\geq 0}$, la fonction $(f + t)$ est aussi dans $Act(l)$, où $(f + t)$ est la définie par $(f + t)(t') = f(t + t')$.
- Inv une fonction qui associe à chaque place un sous-ensemble de V , appelé *invariant*.



Dans l'exemple du thermostat, $Act(l_1)$ est l'ensemble des fonctions f du type $f(t) = \theta_0 e^{-Kt}$ pour $\theta_0 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. et $Act(l_2)$ est l'ensemble des fonctions f du type $f(t)(l_1) = \theta_1 e^{-Kt} + h(1 - e^{-Kt})$ pour $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

On remplace alors la définition de $\rightarrow^t$ par: $(l, v) \rightarrow^t (l, v')$ ssi il existe $f \in Act(l)$ avec $f(0) = v$ et $f(t) = v'$ et $\forall 0 \leq t' \leq t, f(t') \in Inv(l)$

Un système hybride est dit *déterministe en temps* si pour tout $l \in Loc$, $v \in V$, il y a au plus une fonction f dans $Act(l)$ avec $f(0) = v$.



Abstraction Temporelle

A un système hybride H , on peut aussi faire correspondre le système de transitions étiqueté appelé *abstraction temporelle de H* , défini par

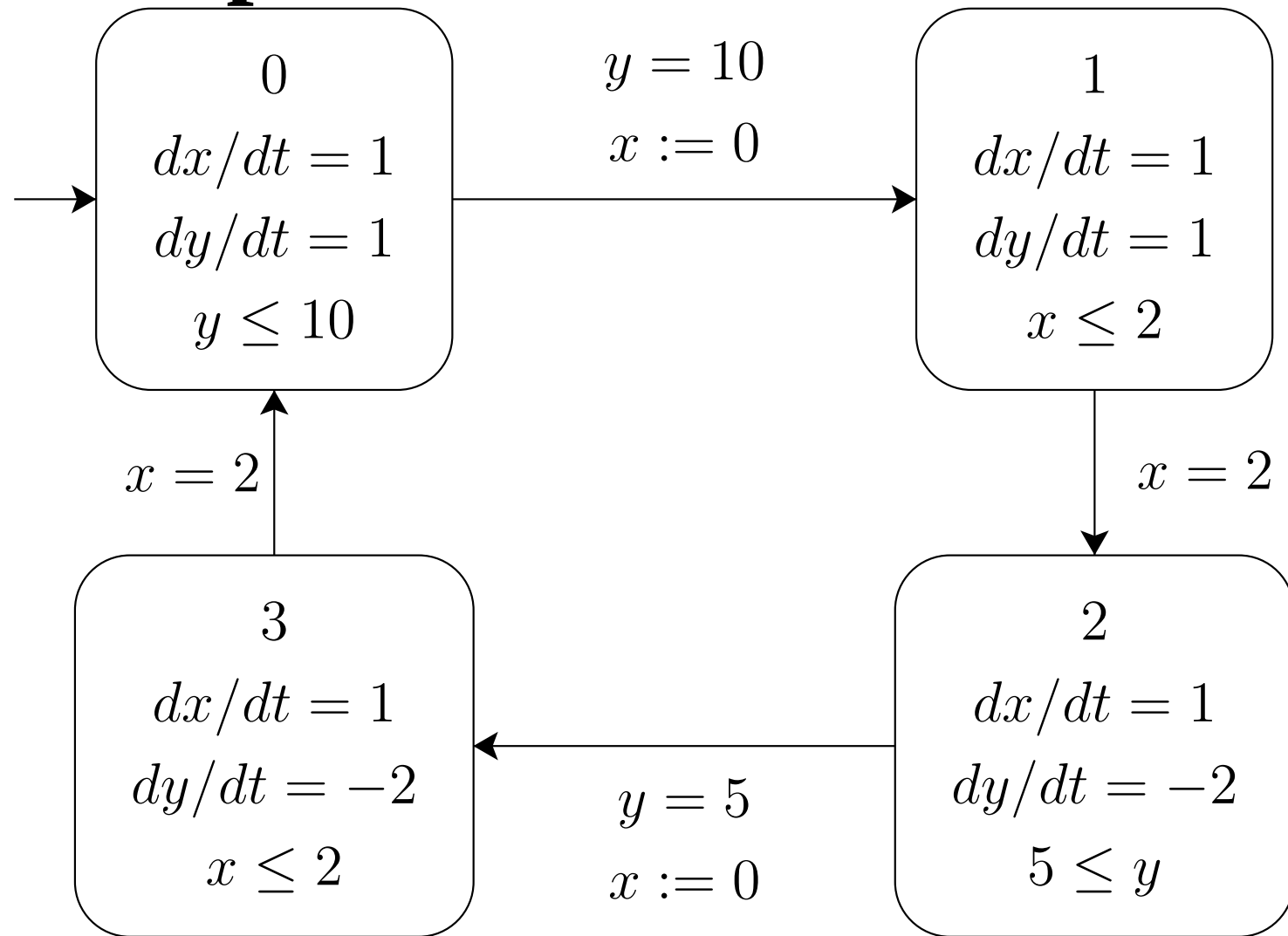
$$\tau(H) = (Lab, S, S_0, R)$$

où

1. $S = Loc \times V$. (l'ensemble des états de H).
2. $S_0 = Init$.
3. $\Sigma = Lab$.
4. $(s, a, s') \in R$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, s'' un état, tel que
 $s \xrightarrow{t} s'' \xrightarrow{a} s'$.

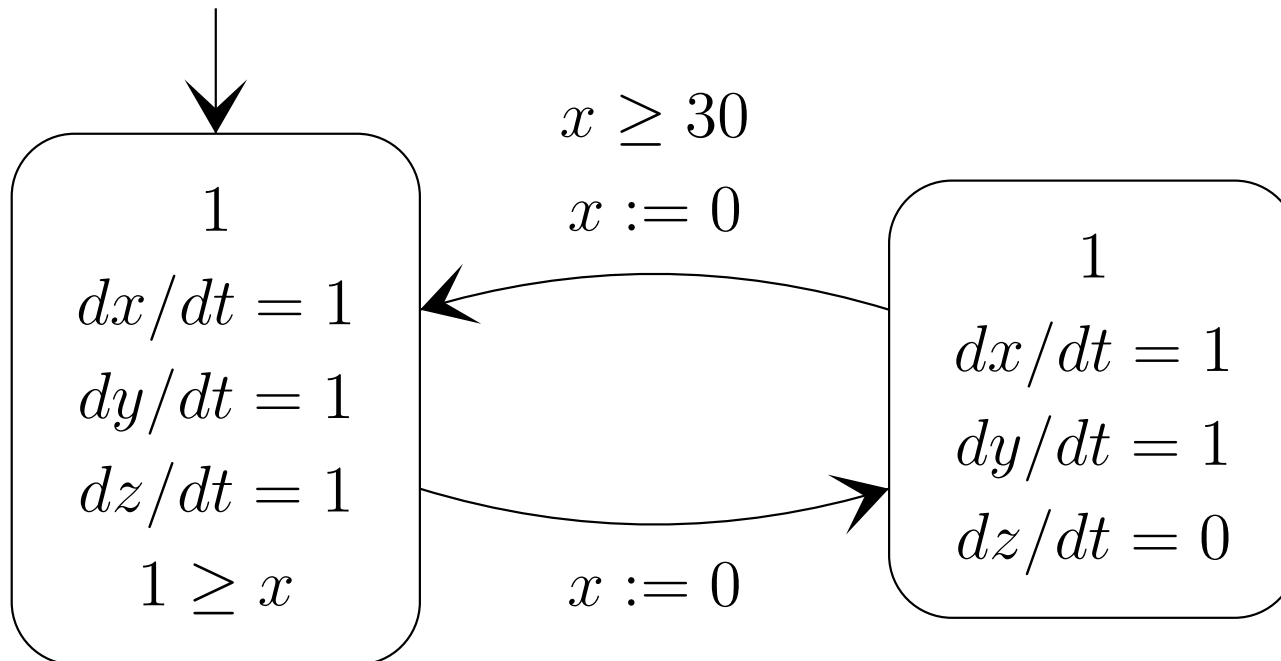
Note: pour les automates temporisés, on a vu que $\tau(A)$ admet une bisimulation finie. On peut montrer que le système de transition précédent n'admet pas de bisimulation finie dans le cas général.

Exemple 2. Moniteur de niveau d'eau



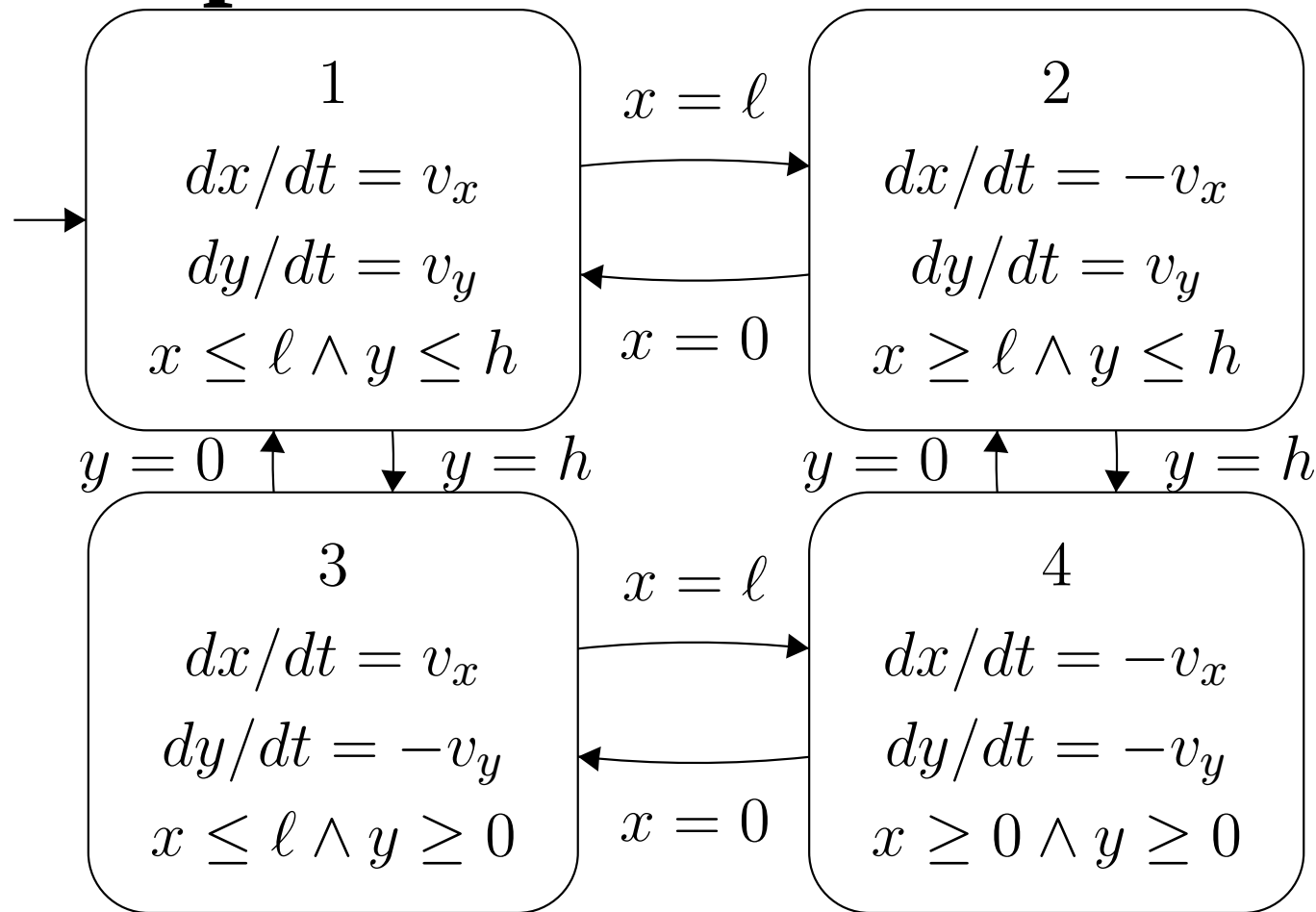
(Condition initiale : $y = 1$).

Exemple 3. Leaking Gaz Burner



(Condition initiale : $x = 0, y = 0, z = 0$).

Exemple 4. Balle sur une table de bill



(Condition initiale : $x = x_g$ et $y = y_g$).

Composition parallèle

Étant donnés

$H_1 = (Loc_1, Var, Init_1, Lab_1, Edg_1, Act_1, Inv_1)$ et

$H_2 = (Loc_2, Var, Init_2, Lab_2, Edg_2, Act_2, Inv_2)$, le produit synchronisé de H_1 et de H_2 , noté $H_1 || H_2$ est le système hybride

$(Loc_1 \times Loc_2, Var, Init_1 \cap Init_2, Lab_1 \cup Lab_2, Edg, Act, Inv)$
défini par:

$$\bullet Act(l_1, l_2) = Act_1(l_1) \cap Act_2(l_2)$$

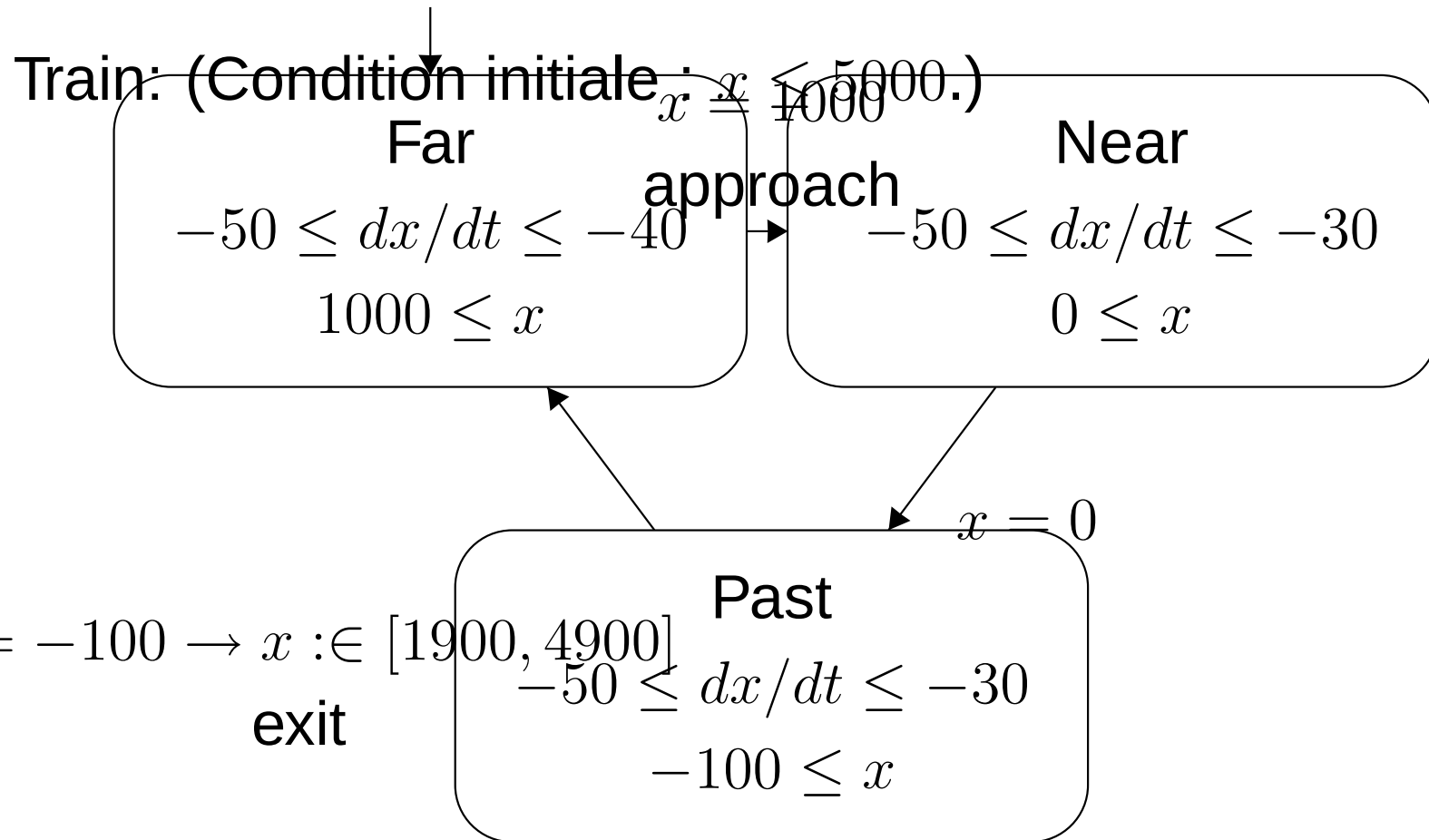
$$\bullet Inv(l_1, l_2) = Inv_1(l_1) \cap Inv_2(l_2)$$



- pour $a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$
 $(l_1, a, \mu_1, l'_1) \in Edg_1$
 $(l_2, a, \mu_2, l'_2) \in Edg_2$
 $\Rightarrow ((l_1, l_2), a, \mu_1 \cap \mu_2, (l'_1, l'_2)) \in Edg$
- pour $a \in \Sigma_1 - \Sigma_2$ $(l_1, a, \mu_1, l'_1) \in Edg_1$
 $l_2 \in Loc_2$
 $\Rightarrow ((l_1, l_2), a, \mu_1, (l'_1, l_2)) \in Edg,$
- symétriquement.

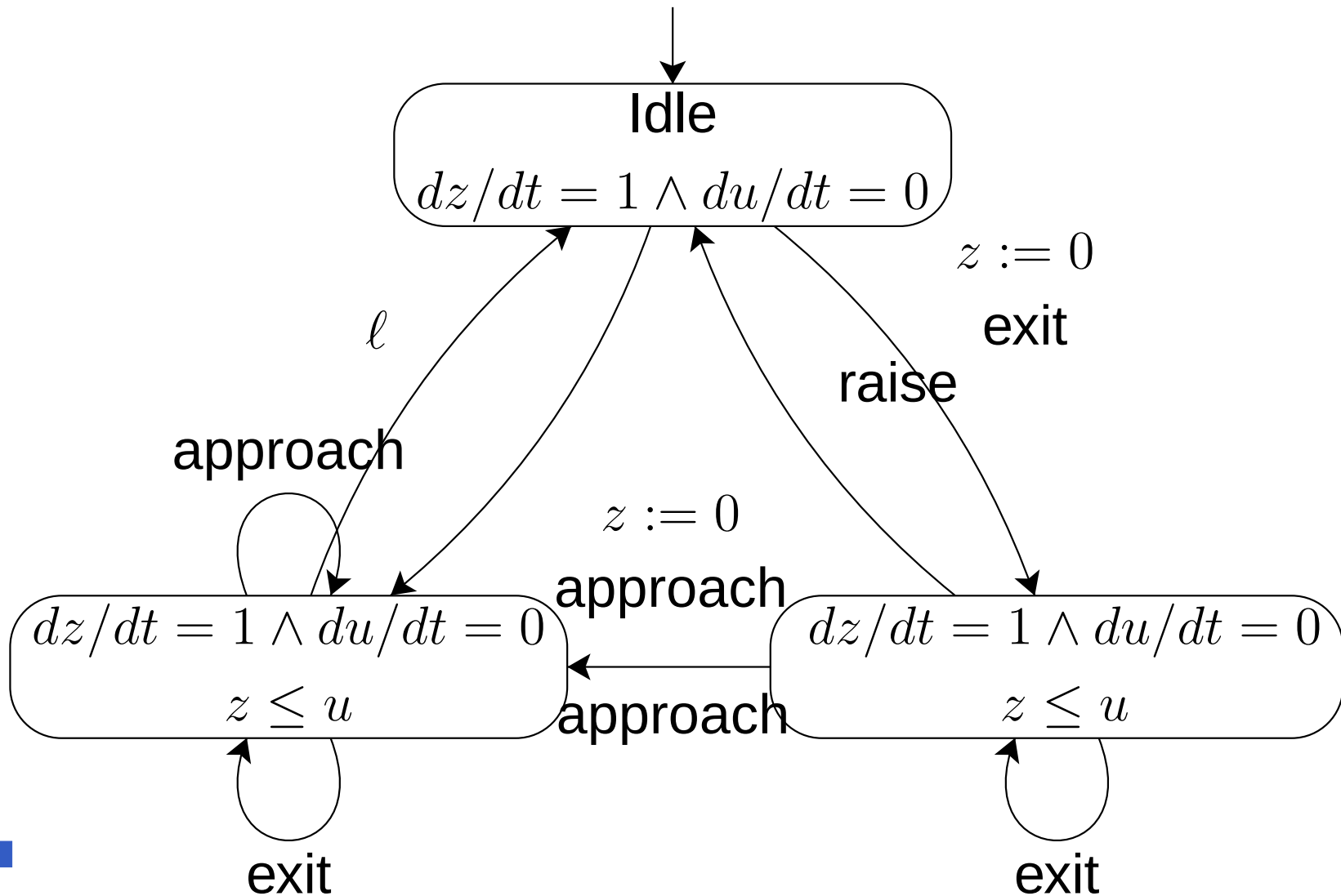


Exemple. Train || Barrière || Contrôle



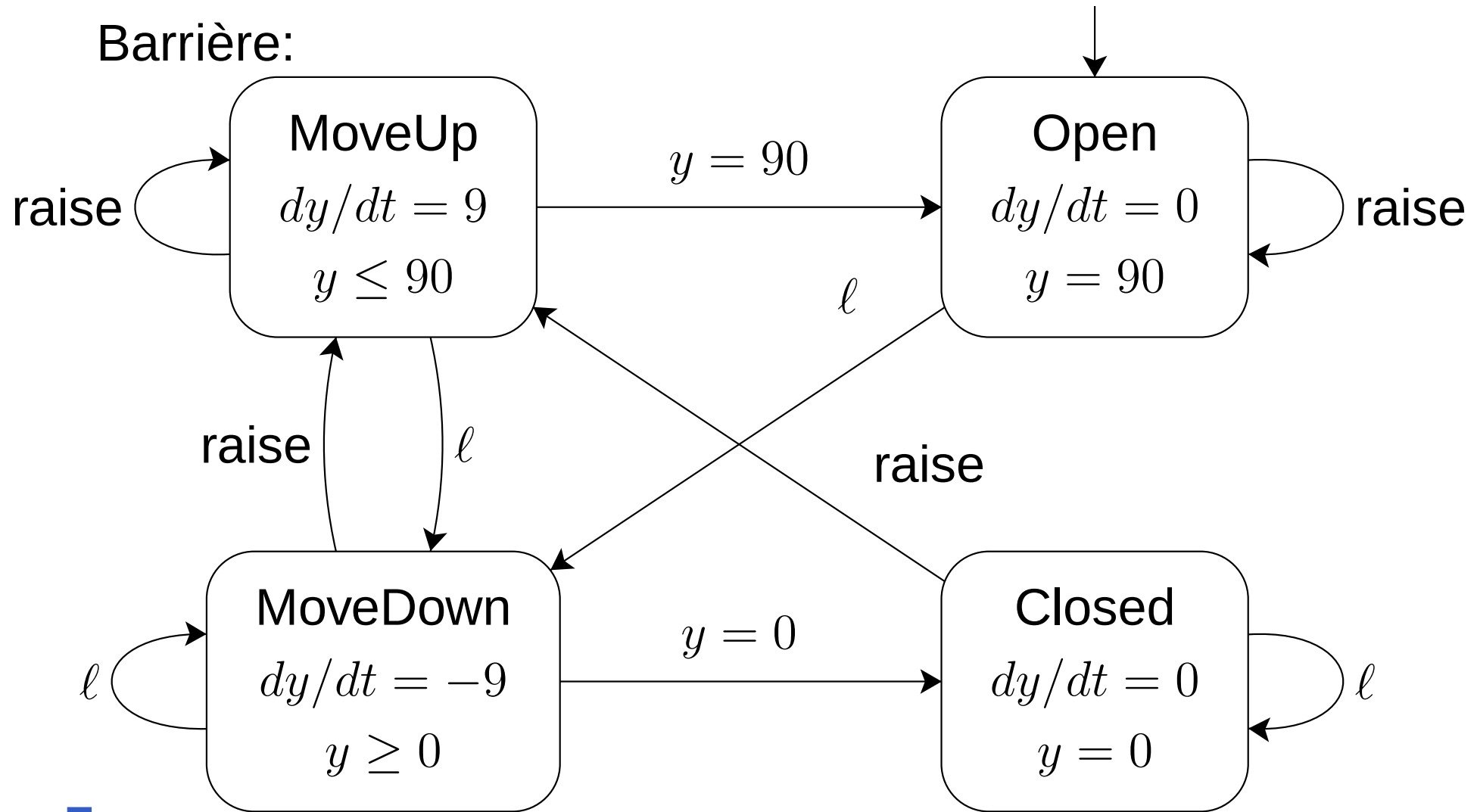


Contrôleur:





Barrière:



Termes et formules linéaires

Soit $Var = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de variables.

1. Un *terme linéaire* sur Var est un terme de la forme $\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ avec les $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in Var$.
 $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers.
2. Une *formule linéaire* est une combinaison booléenne d'inégalités entre termes linéaires.

Propriété: Soit φ une formule linéaire, et $x \in Var$ une variable. L'ensemble défini par la formule logique $\exists x \phi$ se décrit aussi par une formule linéaire.

Utiliser par exemple l'algorithme de Fourier-Motzkin.

Exemple: $\exists x (2 < x \wedge x < y)$ est équivalent à $2 < y$.

Systemes hybrides Linéaires

Un système hybride déterministe en temps est dit *linéaire* si:

1. Pour tout $l \in Loc$, $Act(l)$ est défini par un ensemble d'équations différentielles de la forme $dx/dt = k_x$, $k_x \in \mathbb{Z}$.

On a $Act(l)(v, t)(x) = v(x) + k_x t$ pour tout $v \in V, x \in Var, t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

2. Pour tout $l \in Loc$, $Inv(l)$ est décrit par une formule linéaire.



3. Pour tout $e = (l, a, \mu, l')$, μ est défini par un ensemble d'affectations non-déterministes du type $\psi \rightarrow \{x' \in [\alpha_x, \beta_x] \mid x \in Var\}$ pour ψ une formule linéaire, et α_x, β_x des termes linéaires. C'est-à-dire, il existe ψ une formule linéaire, et des termes linéaires $\alpha_{x_1}, \beta_{x_1}, \dots, \alpha_{x_n}, \beta_{x_n}$ tels que

$$(v, v') \in \mu \text{ ssi } v \models \psi \wedge \forall x \in Var \alpha_x \leq v'(x) \leq \beta_x$$

Dans le cas $\alpha_x = \beta_x$, on note $\mu(e, x) = \alpha_x$.

Exemples: tous les systèmes hybrides précédents, excepté le thermostat, sont des systèmes hybrides linéaires.



Cas spéciaux de systèmes hybrides

1. Si $Act(l, x) = 0$ pour tout $l \in Loc$, alors x est *une variable discrète*. Un *système discret* est un système dont toutes les variables sont discrètes.
2. Si en plus $\mu(e, x) \in \{0, 1\}$ pour tout $e \in Edg$, alors x est une *variable (discrète) propositionnelle*. Un *système à états finis* est un système dont toutes les variables sont propositionnelles.
3. Si $Act(l, x) = 1$ pour tout $l \in Loc$, et $\mu(e, x) \in \{0, x\}$ pour chaque $e \in Edg$, alors x est *une horloge*.
4. Propriété: Un système hybride dont toutes les variables sont soit des propositions soit des horloges et dont toutes les contraintes sont des contraintes d'horloges correspond à un automate temporisé.



5. S'il existe un entier k tel $Act(l, x) = k$ pour tout $l \in Loc$, et $\mu(e, x) \in \{0, x\}$ pour chaque $e \in Edg$, alors x est *une horloge biaisée*. Un *système multitaux* est un système dont toutes les variables sont des variables propositionnelles, des horloges, ou des horloges biaisées.
6. Si $Act(l, x) \in \{0, 1\}$ pour tout $l \in Loc$, et $\mu(e, x) \in \{0, x\}$ pour chaque $e \in Edg$, alors x est *un intégrateur*. Un *système à intégrateur* est un système dont toutes les variables ont des variables propositionnelles ou des intégrateurs.
7. Si $\mu(e, x) = x$ pour chaque $e \in Edg$, alors x est *un paramètre*.





Systemes Hybrides

Partie 2: Vérification



Vérification des systèmes hybrides

On s'intéresse dans la suite aux problèmes suivants:

- Problème de l'atteignabilité:

1. Données:

- (a) H un système hybride

- (b) S^* un ensemble d'états.

2. Réponse: oui s'il existe une trajectoire qui atteint S^* , non sinon.

- Calcul des états atteignables.

1. Données:

- (a) H un système hybride

2. Réponse: l'ensemble des états atteints par les trajectoires de H .

Résultats



Théorème: Le problème de l'atteignabilité est indécidable pour les systèmes hybrides linéaires.

1. Théorème: Le problème de l'atteignabilité est décidable pour les automates temporisés.
2. Théorème: Le problème de l'atteignabilité est indécidable pour les systèmes multitaux. (à deux taux).
3. Théorème: Le problème de l'atteignabilité est indécidable pour les systèmes à intégrateurs.



Conséquences

Puisque le problème est indécidable, même pour les systèmes hybrides linéaires simples, on s'intéressera dans la suite à des semi-algorithmes de vérification, c'est-à-dire à des méthodes de vérification qui peuvent ne pas terminer dans certains cas.

Méthodes:

1. Analyse en avant.
2. Analyse en arrière.

Analyse en avant: opérateur $\uparrow$.

- Soit $l \in Loc$ une place fixée.

Pour $P \subset V$ un ensemble de valuations, on note $P^\uparrow$ l'ensemble des valuations atteignables à partir d'une valuation $v \in P$ en laissant le temps progresser. Formellement,

$$\begin{aligned} v' \in P^\uparrow \quad \text{ssi} \quad & \exists v \in V \\ & \exists t \in IR^{\geq 0} \\ & v \in P \\ & tcp_l[v](t) \\ & v' = Act(v, t)) \end{aligned}$$

Avec $tcp_l[v](t) \equiv \forall 0 \leq t' \leq t \ Act(v, t') \in Inv(l)$

Analyse en avant: opérateur *succ*.

- Soit $e = (l, a, \mu, l') \in Edg$ une transition discrète.
Pour $P \subset V$ un ensemble de valuations, on note $succ(P, e)$ l'ensemble des valuations atteignables à partir d'une valuation $v \in P$ en exécutant la transition e .
Formellement,

$$v' \in succ(P, e) \quad \text{ssi} \quad \begin{aligned} &\exists v \in V \\ &\quad v \in P \cap Inv(l) \\ &\quad (v, v') \in \mu \\ &\quad v' \in Inv(l') \end{aligned}$$

Extension aux régions

- Soit $P \subset V$ un ensemble de valuations, $l \in Loc$ une place, on note (l, P) l'ensemble des (l, v) avec $v \in P \cap Inv(l)$.
- On étend les opérateurs précédents aux régions, c'est-à-dire aux ensembles de la forme $R = \bigcup_{l \in Loc} (l, R_l)$.
Formellement,

$$R^\uparrow = \bigcup_{l \in Loc} (l, R_l^\uparrow)$$

$$succ[R] = \bigcup_{l \in Loc} \bigcup_{e=(l, a, \mu, l') \in Edg} (l', succ(R_l, e))$$

Calcul des états atteignables.



- Étant donné $I \subset Loc \times V$ un ensemble d'états, on note $(I \rightarrow *)$ l'ensemble des états atteignables à partir d'un état $\sigma \in I$.
- Théorème: Soit $I = \cup_{l \in Loc} (l, I_l)$ une région du système H . Alors $(I \rightarrow *) = \cup_{l \in Loc} (l, R_l)$ la région atteignable est le plus petit point fixe de l'équation

$$X = (I \cup succ[X])^{\uparrow}.$$

Autrement dit, chaque R_l est le plus petit point fixe de l'ensemble d'équations:

$$X_l = (I_l \cup \bigcup_{e=(l',a,\mu,l) \in Edg} succ(X_{l'}, e))^{\uparrow}$$



Cas des systèmes hybrides linéaires

- Observation: Pour un système hybride linéaire H , si $P \subset V$ est un ensemble défini par une formule linéaire, alors, pour tout $l \in Loc, e \in Edg, P^\uparrow$ et $succ(P, e)$ sont aussi des ensembles définissables par des formules linéaires.
- Application: Le théorème précédent donne un (semi-)algorithme pour la vérification de propriétés d'atteignabilité des systèmes hybrides linéaires.



• Principe:

1. On part de $X_0 = I$.
2. On calcule la suite X_i définie par les équations
$$X_{i+1,l} = (I_l \cup \bigcup_{e=(l',a,\mu,l) \in Edg} succ(X_{i,l'}, e))^{\uparrow} \text{ pour } l \in Loc.$$
3. Si $X_i = X_{i+1}$ on s'arrête et retourne X_i .



Exemple: Leaking gas burner.

Exemple: leaking gas burner.

- État initial: $\psi_I = pc = 1 \wedge x = y = z = 0$
- $I \rightarrow *$ donné par le plus petit point fixe de
 1. $\psi_1 = (x = y = z = 0 \vee succ(\psi_2, e_{2 \rightarrow 1}))_1^\uparrow$
 2. $\psi_2 = (false \vee succ(\psi_1, e_{1 \rightarrow 2}))_2^\uparrow$
- On le calcule itérativement par:
 1. $\psi_{1,i} = (\psi_{1,i-1} \vee succ(\psi_{2,i-1}, e_{2 \rightarrow 1}))_1^\uparrow$
 2. $\psi_{2,i} = (\psi_{2,i-1} \vee succ(\psi_{1,i-1}, e_{1 \rightarrow 2}))_2^\uparrow$

Avec

1. $\psi_{1,0} = (x = y = z = 0)^\uparrow = (x \leq 1 \wedge x = y = z)$
2. $\psi_{2,0} = false$

On a:

1. $\psi_{1,1} = \psi_{1,0} \vee (\text{succ}(\psi_{2,0}, e_{2 \rightarrow 1}))^\uparrow = \psi_{1,0}$
2. $\psi_{2,1} = \psi_{2,0} \vee (\text{succ}(\psi_{1,0}, e_{1 \rightarrow 2}))^\uparrow = (x = 0 \wedge y \leq 1 \wedge z = y)^\uparrow = (z \leq 1 \wedge y = z + x)$
3. ...
4. $\psi_{1,i} = \psi_{1,i-1} \vee x \leq 1 \wedge 0 \leq z - x \leq i \wedge 30i + z \leq y$
5. $\psi_{2,i} = \psi_{2,i-1} \vee y \leq i + 1 \wedge 30i + x + z \leq y$
6. ...

On obtient $(I \rightarrow *) = (1, \psi_1) \cup (2, \psi_2)$ avec

1. $\psi_1 = x \leq 1 \wedge x = y = z \vee \exists i \geq 1 (x \leq 1 \wedge 0 \leq z - x \leq i \wedge 30i + z \leq y)$
 $= (x \leq 1 \wedge x = y = z) \vee (x \leq 1 \wedge x \leq z \wedge y + 30x \geq 31z)$
2. $\psi_2 = z \leq 1 \wedge y = x + z \wedge x \geq 0 \vee \exists i \geq 1 (z \leq i + 1 \wedge 30i + x + z \leq y)$
 $= (z \leq 1 \wedge y = x + z \wedge x \geq 0) \vee y \geq x + 31z - 30$

Analyse en arrière: opérateur $\Downarrow$.

- Soit $l \in Loc$ une place.

Pour $P \subset V$ un ensemble de valuations, on note $P^\Downarrow$ l'ensemble des valuations à partir desquelles on peut atteindre une valuation $v \in P$ en laissant le temps progresser.

Formellement,

$$\begin{aligned} v' \in P^\Downarrow \quad \text{ssi} \quad & \exists v \in V \\ & \exists t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \\ & v \in P \\ & tcp_l[v'](t) \\ & v = \varphi_l[v'](t) \end{aligned}$$

Avec $tcp_l[v](t) \equiv \forall 0 \leq t' \leq t \text{ Act}(v, t') \in Inv(l)$

Analyse en arrière: opérateur *pre*.

- Soit $e = (l, a, \mu, l') \in Edg$ une transition discrète.
Pour $P \subset V$ un ensemble de valuations, on note $pred(P, e)$ l'ensemble des valuations à partir desquelles on peut atteindre une valuation $v \in P$ en exécutant la transition e .
Formellement,

$$v' \in pre(P, e) \quad \text{ssi} \quad \begin{aligned} &\exists v \in V \\ &\quad v \in P \cap Inv(l') \\ &\quad (v', v) \in \mu \\ &\quad v' \in Inv(l) \end{aligned}$$

Extension aux régions

- On étend les opérateurs précédents aux régions, c'est-à-dire aux ensembles de la forme $R = \bigcup_{l \in Loc} (l, R_l)$.

$$R^{\Downarrow} = \bigcup_{l \in Loc} (l, R_l^{\Downarrow})$$

$$pre[R] = \bigcup_{l \in Loc} \bigcup_{e=(l,a,\mu,l') \in Edg} (l, pre(R_{l'}, e))$$

Calcul des états atteignables.



- Étant donné $I \subset Loc \times V$, on note $(\rightarrow *I)$ l'ensemble des états à partir desquelles on peut atteindre un état $\sigma \in I$.
- Théorème: Soit $I = \bigcup_{l \in Loc} (l, I_l)$ une région du système H . Alors $(\rightarrow *I) = \bigcup_{l \in Loc} (l, R_l)$ est le plus petit point fixe de l'équation

$$X = (I \cup pre[X])^{\Downarrow}$$

.

Autrement dit, chaque R_l est le plus petit point fixe de l'ensemble d'équations:

$$X_l = (I_l \cup \bigcup_{e=(l,a,\mu,l') \in Edg} pre(X_{l'}, e))_l^{\Downarrow}$$



Cas des systèmes hybrides linéaires

- Observation: Pour un système hybride linéaire H , si $P \subset V$ est un ensemble défini par une formule linéaire, alors, pour tout $l \in Loc, e \in Edg, P^\downarrow$ et $pre(P, e)$ sont aussi des ensembles définissables par des formules linéaires.
- Application: Le théorème précédent donne un (semi-)algorithme pour la vérification de propriétés d'atteignabilité des systèmes hybrides linéaires.



• Principe:

1. On part de $X_0 = I$.
2. On calcule la suite X_i définie par les équations
$$X_{i+1,l} = (I_l \cup \bigcup_{e=(l,a,\mu,l') \in Edg} pre(X_{i,l'}, e))^{\Downarrow} \text{ pour } l \in Loc.$$
3. Si $X_i = X_{i+1}$ on s'arrête et retourne X_i .



Exemple: Leaking gas burner.

Exemple: leaking gas burner

Si l'on part de $\psi_R = y \geq 60 \wedge 20z > y$

→ $*I$ est donné par le plus petit point fixe de

1. $\psi_1 = (y \geq 60 \wedge 20z > y) \vee pre(\psi_2, e_{1 \rightarrow 2}) \Downarrow_1$
2. $\psi_2 = (y \geq 60 \wedge 20z > y) \vee pre(\psi_1, e_{2 \rightarrow 1}) \Downarrow_2$

On le calcule itérativement par:

1. $\psi_{1,i} = ((y \geq 60 \wedge 20z > y) \vee pre(\psi_{2,i-1}, e_{1 \rightarrow 2})) \Downarrow_1$
2. $\psi_{2,i} = ((y \geq 60 \wedge 20z > y) \vee pre(\psi_{1,i-1}, e_{2 \rightarrow 1})) \Downarrow_2$

avec

1. $\psi_{1,0} = (y \geq 60 \wedge 20z > y) \Downarrow_1$
2. et $\psi_{2,0} = (y \geq 60 \wedge 20z > y) \Downarrow_2$.

On obtient:

1. $\psi_{1,0} = (-19 < 20z - 19x - y \wedge 59 < -x + y \wedge x \leq 1)$
2. $\psi_{2,0} = (0 < 20z + x - y \wedge 0 < 20z - y \wedge 3 < z)$
3. $\psi_{1,1} = (-19 < 20z - 19x - y \wedge 2 < z - x \wedge x \leq 1)$
4. $\psi_{2,1} = (-19 < 20z - y \wedge 11 < 20z + x - y \wedge 2 < z)$
5. $\psi_{1,2} = (-8 < 20z - 19x - y \wedge 1 < z - x \wedge x \leq 1)$
6. $\psi_{2,2} = (-19 < 20z - y \wedge 11 < 20z + x - y \wedge 2 < z)$
7. $\psi_{1,3} = (-8 < 20z - 19x - y \wedge 1 < z - x \wedge x \leq 1)$
8. $\psi_{2,3} = (-8 < 20z - y \wedge 22 < 20z + x - y \wedge 1 < z)$
9. $\psi_{1,4} = (3 < 20z - 19x - y \wedge 0 < z - x \wedge x \leq 1)$
10. $\psi_{2,4} = (-8 < 20z - y \wedge 22 < 20z + x - y \wedge 1 < z)$
11. $\psi_{1,5} = (3 < 20z - 19x - y \wedge 0 < z - x \wedge x \leq 1)$
12. $\psi_{2,5} = (3 < 20z - y \wedge 33 < 20z + x - y \wedge 0 < z)$
13. $\psi_{1,6} = (14 < 20z - 19x - y \wedge -1 < z - x \wedge x \leq 1)$
14. $\psi_{2,5} = (3 < 20z - y \wedge 33 < 20z + x - y \wedge 0 < z)$

On s'arrête car $\psi_{1,7}$ implique $\psi_{1,6}$ et $\psi_{2,7}$ implique $\psi_{2,6}$ et on obtient $(\rightarrow *I) = \bigvee_{i=1\dots 6} (1, pc = 1 \wedge \psi_{1,i}) \cup (2, (pc = 1 \wedge \psi_{2,i}))$.