Matrices de différences bornées.

Rappels

Rappel:

- Définition: une zone d'horloges est une conjonction d'inégalités du type $x \prec c$, $c \prec x$, $x - y \prec c$, où x est une variable, $c \in \mathbb{Q}$ une constante, et $\prec \in \{<, \leq\}$. Forme générale: $x_0 = 0 \wedge \bigwedge_{0 \leq i \neq j \leq n} x_i - x_j \prec c_{i,j}$.
- Définitions: soit φ une zone d'horloge.
  1. Soit $\lambda \subset X$. On note $\varphi[\lambda := 0] = \{v[\lambda := 0] | v \in \varphi\}$.
  2. Soit $d \in IR^{\geq 0}$. On note $\varphi + d = \{v + d | v \in \varphi\}$.
  3. Soit $d \in IR^{\geq 0}$. On note $\varphi - d = \{v - d | v \in \varphi\}$.

Matrices de différences bornées

- But: représentation des zones d'horloges.
  1. Supposons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
  2. Une *matrice de différences bornées* est une matrice indexée par $X \cup \{x_0\}$ où x_0 est une variable factice dont la valeur est toujours 0.
  3. Chaque entrée $D_{i,j}$ est de la forme

$$D_{i,j} = (d_{i,j}, \prec_{i,j})$$

avec $\prec_{i,j} \in \{<, \leq\}$ et $d_{i,j} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

- L'entrée $D_{i,j} = (d_{i,j}, \prec_{i,j})$ représente la contrainte $x_i - x_j \prec_{i,j} d_{i,j}$.

  une entrée $(\infty, <)$ représente l'absence de borne supérieure sur $x_i - x_j$.

  $D_{j,0} = (d_{j,0}, \prec)$ représente $x_j \prec d_{j,0}$.

  $D_{0,j} = (d_{0,j}, \prec)$ représente $-x_j \prec d_{0,j}$.

- Exemple: $x_1 - x_2 < 2 \wedge 0 < x_2 \leq 2 \wedge 1 \leq x_1$.
  Représentation possible:

	x_0	x_1	x_2
x_0	$(0, \leq)$	$(-1, \leq)$	$(0, <)$
x_1	$(\infty, <)$	$(0, \leq)$	$(2, <)$
x_2	$(2, \leq)$	$(+\infty, <)$	$(0, \leq)$

- Remarques.
  1. Une zone d’horloges ne se représente pas par une unique matrice.
  2. Deux matrices distinctes peuvent correspondent à la même zone d’horloges.

- Exemple: $x_1 - x_2 < 2$ et $x_2 - x_0 \leq 2$ implique $x_1 - x_0 < 4$. Donc $D_{1,0}$ pourrait être $(4, <)$.

Mise sous forme canonique

- En général $d_{i,j} + d_{j,k}$ est une borne supérieure pour $x_i - x_k$.
- Principe: $$\frac{\begin{array}{c} x_i - x_j \prec_{i,j} d_{i,j} \\ x_j - x_k \prec_{j,k} d_{j,k} \end{array}}{x_i - x_k \prec'_{i,k} d'_{i,k}}$$

  Avec:

  1. $d'_{i,k} = d_{i,j} + d_{j,k}$
  2. $\prec'_{i,k}=\leq$ si $\prec_{i,j}=\leq$ et $\prec_{i,k}=\leq$, $<$ sinon.

Mise sous forme canonique

- Algorithme $MiseSousFormeCanonique(D)$:

  pour $i = 0$ à $|X|$

  pour $j = 0$ à $|X|$

  pour $k = 0$ à $|X|$

  Remplacer $D_{i,k} = (d_{i,k}, \prec_{i,k})$ par $(d'_{i,k}, \prec'_{i,k})$

  si $d'_{i,k} < d_{i,k}$ ou ($d'_{i,k} = d_{i,k}$ et $\prec'_{i,k}$=$<$).

- On appelle $FomeCanonique$ la matrice obtenue et retournée par cet algorithme. (Algorithme de Floyd-Warshal en $O(|X|^3)$).

Exemple

- Exemple:

	x_0	x_1	x_2
x_0	$(0, \leq)$	$(-1, \leq)$	$(0, <)$
x_1	$(\mathbf{4}, <)$	$(0, \leq)$	$(2, <)$
x_2	$(2, \leq)$	$(\mathbf{1}, <)$	$(0, \leq)$

Propriétés

- Propriété: si D_1 et D_2 sont deux matrices de différences bornées représentant des contraintes non-vides, alors D_1 et D_2 représentent la même contrainte ssi

$$FormeCanonique(D_1) = FormeCanonique(D_2).$$

- On peut donc facilement tester si deux matrices représentent la même contrainte.
- Remarque. On peut tester si une matrice D représente l'ensemble vide par la remarque suivante:
  L'algorithme $MiseSousFormeCanonique$ appliquée à une matrice D termine avec une matrice dont la diagonale contient uniquement des entrées du type $(0, \leq)$ ssi D représente une contrainte non vide

Autres opérations

- Intersection. Soit ${\mathcal D^1}_{i,j} = (c_1, \prec_1)$ et ${\mathcal D^2}_{i,j} = (c_2, \prec_2)$. La matrice $\mathcal D = \mathcal D^1 \wedge \mathcal D^2$ est donnée par $\mathcal D = (min(c_1, c_2), \prec)$ où $\prec$ est defini de la façon suivante:
  - Si $c_1 < c_2$ alors $\prec = \prec_1$.
  - Si $c_2 < c_1$ alors $\prec = \prec_2$.
  - Si $c_2 = c_1$ et $\prec_1 = \prec_2$ alors $\prec = \prec_1$.
  - Si $c_2 = c_1$ et $\prec_1 \neq \prec_2$ alors $\prec = <$.

- Remise à zéro. La matrice $\mathcal{D}' = \mathcal{D}[\lambda := 0]$, où $\lambda \subseteq X$ est donnée par:
  - Si $x_i, x_j \in \lambda$ alors $\mathcal{D}'_{i,j} = (0, \leq)$.
  - Si $x_i \in \lambda$ et $x_j \notin \lambda$ alors $\mathcal{D}'_{i,j} = \mathcal{D}_{0,j}$.
  - Si $x_j \in \lambda$ et $x_i \notin \lambda$ alors $\mathcal{D}'_{i,j} = \mathcal{D}_{i,0}$.
  - Si $x_i, x_j \notin \lambda$ alors $\mathcal{D}'_{i,j} = \mathcal{D}_{i,j}$.

Autres opérations (suite)

- Passage du temps. La matrice $\mathcal{D}' = \mathcal{D}^{\Uparrow}$ est donnée par
  - $\mathcal{D}'_{i,0} = (\infty, <)$ pour quelque soit $i \neq 0$.
  - $\mathcal{D}'_{i,j} = \mathcal{D}_{i,j}$ si $i = 0$ ou si $j \neq 0$.

Remarque: à chaque fois, la matrice obtenue doit être mise sous forme canonique.

Application

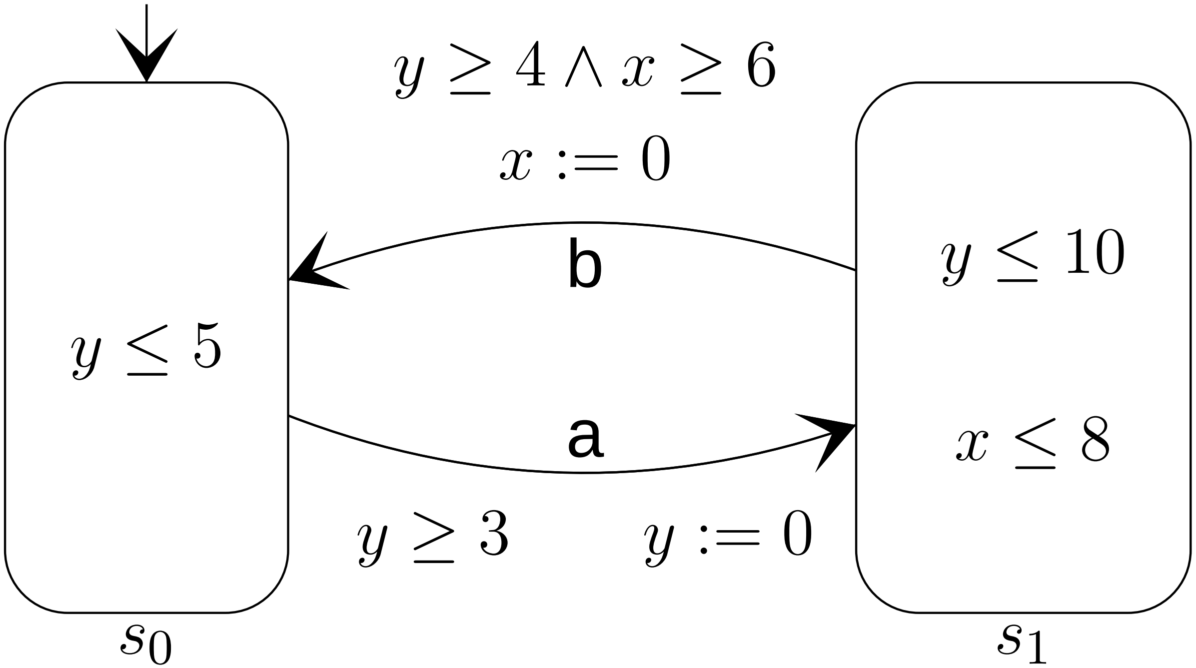
Les algorithmes précédents permettent d'implémenter facilement le calcul du graphe des zones d'un automate temporisé donné.
Rappel:

$$succ(\varphi, e) = ((\varphi \wedge I(s))^{\Uparrow} \wedge I(s) \wedge \psi)[\lambda := 0]$$

pour une transition $e = (s, a, \psi, \lambda, s')$.

Exemple

Pour l'automate:



La région initiale (s_0, Z_0) avec Z_0 la région d'horloge $x = y = 0$ se représente par

	x_0	x	y
x_0	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
x	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
y	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$

On veut calculer
$succ(Z_0, a) = ((\varphi \wedge I(s_0))^{\Uparrow} \wedge I(s_0) \wedge y \geq 3)[y := 0]$.

$I(s_0)$ est $0 \leq x \wedge 0 \leq y \leq 5$ soit sous forme canonique :

	x_0	x	y
x_0	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
x	$(\infty, <)$	$(0, \leq)$	$(\infty, <)$
y	$(5, \leq)$	$(5, \leq)$	$(\infty, <)$

$Z_0 \wedge I(s_0)$ est la matrice nulle.

$(Z_0 \wedge I(s_0))^{\Uparrow}$ est sous forme canonique:

	x_0	x	y
x_0	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
x	$(\infty, <)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
y	$(\infty, <)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$

$(Z_0 \wedge I(s_0))^{\Uparrow} \wedge I(s_0)$ est sous forme canonique:

	x_0	x	y
x_0	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
x	$(5, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
y	$(5, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$

$(Z_0 \wedge I(s_0))^{\Uparrow} \wedge I(s_0) \wedge y \leq 3$ est sous forme canonique:

	x_0	x	y
x_0	$(0, \leq)$	$(-3, \leq)$	$(-3, \leq)$
x	$(5, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$
y	$(5, \leq)$	$(0, \leq)$	$(0, \leq)$

$((\varphi \wedge I(s_0))^{\Uparrow} \wedge I(s_0) \wedge y \leq 3)[y := 0]$ est sous forme canonique:

	x_0	x	y
x_0	$(0, \leq)$	$(-3, \leq)$	$(0, \leq)$
x	$(5, \leq)$	$(0, \leq)$	$(5, \leq)$
y	$(0, \leq)$	$(-3, \leq)$	$(0, \leq)$

Soit la zone d'horloge $Z_1 = 3 \leq x \leq 5 \wedge 3 \leq x - y \leq 5 \wedge y = 0$. Il y a donc une arrête de (s_0, Z_0) vers (s_1, Z_1) dans le graphe des zones.

Si on continue, on ajoute les états suivant de l'automate des zones:

1. (s_0, Z_0') avec $Z_0' = 4 \leq y \leq 5 \wedge 4 \leq y - x \leq 5 \wedge x = 0$, puis
2. (s_1, Z_1') avec $Z_1' = 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq x - y \leq 1 \wedge y = 0$, puis
3. (s_0, Z_0'') avec $Z_0'' = 5 \leq y \leq 8 \wedge 5 \leq y - x \leq 8 \wedge x = 0$, puis
4. (s_1, Z_1'') avec $Z_1'' = x = 0 \wedge y = 0$

On peut alors s'arrêter car $(s_1, x = 0 \wedge y = 0)$ est contenu dans $(s_1, 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq x - y \leq 1 \wedge y = 0)$, et donc aucun nouvel état ne sera ajouté s'il on continuait.
Les états atteignables est donc l'union de toutes ces zones, soit $(s_0, Z_0 \cup Z_0' \cup Z_0'') \cup (s_1, Z_1 \cup Z_1')$.