cole Doctorale IEAM
Dpartement d'Informatique
ANS2
2002-2003

Examen du 5 février 2003

Les documents de cours sont strictement interdits.

1) Construire une machine à registres simulant la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{N}$. La donnée se trouvera dans le registre A et le résultat dans le registre B.

Restreintes aux registres A et B, les configurations initiales et finales sont :

	A	B
configuration initiale	n	0
configuration finale	n	n^2

Écrire le programme de cette machine : vous pouvez prévoir plusieurs registres de travail, notés W_1, W_2, ... que vous devrez toujours explicitement initialiser à zéro.

Il vous est demandé d'écrire le programme en respectant strictement le formalisme rappelé ci-dessous.

Un programme est une liste d'instructions étiquetées. Une instruction est de l'une des quatre formes suivantes :

u **inc** R
v **dec** R, **k**
w **jump s**

Par ailleurs, il vous est demandé **impérativement** de respecter les noms de registres donnés dans l'énoncé.

2) En s'inspirant de la machine construite en 1), construire une machine à registre qui simule le calcul de la fonction: $x \mapsto \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ sur $\mathbb{N}^*$. Les configurations initiales et finales, restreintes aux registres A et B sont maintenant :

	A	B
configuration initiale	n	0
configuration finale	n	$\lfloor\sqrt{x}\rfloor$

On rappelle que la fonction: $x \mapsto \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ vérifie: $\lfloor\sqrt{x^2}\rfloor = x$ pour tout $x \in I\!N$.

On pourra éventuellement utiliser la propriété suivante :

$$\sum_{i=0}^{x}(2k+1) \;=\; (x+1)^2 \text{ pour tout } x \in I\!N.$$

3.1) Connaissez vous des problèmes complets pour chacune des classes de complexité suivantes: NP, L, P, BPP, NL, PSPACE?

On rappelle que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le corps obtenu en considérant $\{0,1\}$ avec les opérations $+$ et $*$ modulo 2: $0+0=0$,$1+1=0$, $0+1=1+0=1$, $0*0=0$, $0*1=1*0=0$, $1*1=1$.

On considère le problème de décision:
Problème ***SYSTEMESEQUATIONS*:**

- **Instance:** Des polynômes $P_1,\ldots,P_m$ à n-variables $x_1,\ldots,x_n$
- **Question:** $\exists x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}$ tel que $P_1(x_1,\ldots,x_n) = P_2(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = P_m(x_1,\ldots,x_n) = 0$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

4.1) Quelles sont les valeurs qui annulent les polynômes $Q(x,y) = 1+x+y+xy$ et $R(x) = 1+x$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Donnez une intepprétation logique de $Q(x,y) = 0$? et $R(x) = 0$?

4.2) Montrer proprement que SYSTEMESEQUATIONS est NP-complet. On pourra utiliser la NP-complètude du problème 3-SAT.

On rappelle que le problème VERTEXCOVER est le problème de décision suivant: Problème ***VERTEXCOVER*:**

- **Instance:** $G=(V,E)$ un graphe, k un entier
- **Question:** Existe t'il une couverture de taille $\leq k$? (i.e. $V' \subset V, \forall e = (x,y) \in E, x \in V' \textit{ ou } y \in V'$?)

5.1) Existe-t-il un algorithme en temps polynômial pour VERTEXCOVER? A quoi cette question est-elle équivalente? Justifier.

5.2) Montrer qu'il existe un algorithme en temps polynômial à k-fixé: c'est-à-dire, montrer qu'il y a un algorithme en temps $O(f(k)|G|^c)$ pour une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une constante c. (on dit que VERTEXCOVER est dans la classe FPT).