Introduction, Définitions, Machines de Turing

Alphabets, Langages

- Alphabet Σ: ensemble fini.
- Σ^n: les mots de longueur n.
- $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^n$, $|w|$ = n: longueur du mot w.
- ϵ: mot vide. $|\epsilon| = 0$.
- $\Sigma^* = \cup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i$: les mots sur l'alphabet Σ.
- Concaténation de $w, w' \in \Sigma^*$ notée ww'.
  $|ww'| = |w| + |w'|$.

- Langage P, Problème (de décision) P: partie de Σ^*:
  $L \subset \Sigma^*$, $P \subset \Sigma^*$.

Machines de Turing

- **Une machine de Turing à k-rubans** est un 8-uplet $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \delta, q_0, q_a, q_r)$ où
  1. Q est l'ensemble fini des états
  2. Σ est l'alphabet
  3. Γ est l'alphabet de travail: en général Σ et des caractères de contrôle supplémentaires.
  4. B est le caractère blanc.
  5. $q_0 \in Q$ est l'état initial
  6. $q_a \in Q$ est l'état d'acceptation
  7. $q_r \in Q$ est l'état de rejet (ou arrêt).
  8. δ fonction de transition: fonction de $Q \times \Gamma^k$ dans $Q \times \Gamma^{k-1} \times Mvt^k$, $Mvt = \{\leftarrow, |, \rightarrow\}$.

Conventions

- Dans la définition précédente, on suppose que le premier ruban, appelé **ruban d'entrée** est uniquement accessible en lecture (= il n'est pas accessible en écriture).
- Les rubans 2 à k sont appelés **rubans de travail**.

Configurations

- **Une configuration** est donnée par la description du ruban, les positions des têtes de lecture/écriture, et l'état interne. Elle sera notée $C = (q, u_1\#v_1, \dots, u_k\#v_k)$ $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Gamma^*$, $q \in Q$: u_i et v_i désigne le contenu respectivement à gauche et à droite de la tête de lecture du ruban i, la tête de lecture du ruban i étant sur la première lettre de v_i.
- La configuration est dite **acceptante** si $q = q_a$, rejetante si $q = q_r$.
- Pour $w \in \Sigma^*$, la configuration initiale correspondante à w est $C[w] = (q_0, \#w, \#, \dots, \#)$.

Calculs

- On note: $C \vdash C'$ si la configuration C' est le successeur direct de la configuration C par le programme (donné par δ) de la machine de Turing

Calculs

- **Calcul de M sur un mot $w \in \Sigma^*$**: suite de configurations $(C_i)_{i \in N}$ telle que $C_0 = C[w]$ et pour tout i, $C_i \vdash C_{i+1}$.
- Le mot w est dit **accepté** si le calcul sur ce mot est tel qu'il existe un entier t avec C_t acceptante.
- On dit dans ce cas que w est accepté **en temps** t.
- Si m désigne le nombre de cases des rubans 2 à k (= autre que le ruban d'entrée) utilisés jusqu'au temps t, on dit dans ce cas que w est accepté en **espace (mémoire)** m.

Langage reconnu par une MT

- **Un langage** $L \subset \Sigma^*$ **est accepté par** M si pour tout $w \in \Sigma^*$,
  - $w \in L$ si et seulement si w est accepté.

Bornes sur l'espace et le temps

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.

- **Un langage** $L \subset \Sigma^*$ **est accepté par** M **en temps** f si pour tout $w \in \Sigma^*$, si on pose $n = |w|$,
  - $w \in L$ si et seulement si w est accepté.
  - lorsque $w \in L$, w est accepté en un temps $t \leq f(n)$
- **Un langage** $L \subset \Sigma^*$ **est accepté par** M **en espace** f, si M possède $k \geq 2$ rubans, le premier en lecture seulement, et si pour tout $w \in \Sigma^*$, si on pose $n = |w|$,
  - $w \in L$ si et seulement si w est accepté.
  - lorque $w \in L$, w est accepté en espace $m \leq f(n)$.

Fonction calculée par une MT

- Les machines de Turing peuvent aussi être vus comme calculant des fonctions: on leur ajoute un ruban de sortie, accessible uniquement en écriture (une telle machine de Turing est aussi appelé **transducteur**).
- On dit qu'une **fonction** $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ **est calculée par une machine de Turing** M si M possède $k+1$ rubans, le premier seulement en lecture, le $k+1$ème ruban étant accessible uniquement en écriture, telle que pour tout $w \in \Sigma^*$,
  1. w est accepté par M en un certain temps t
  2. la configuration C_t vaut $(q_a, \#w, \#, \dots, \#, \#g(w))$.

- On dit que g **est calculée en temps** f, où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction, si g est calculée par M et on a de plus $t \leq f(n)$ pour tout w.
- On dit que g **est calculée en espace** f, où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction, si g est calculée par M et on a de plus que pour tout $w \in \Sigma^*$, le nombre de cases m utilisées par les configurations $C_1, \ldots, C_t$ sur les rubans 2 à k (= on ne compte pas le ruban d'entrée et de sortie) satisfait toujours $m \leq f(n)$.

Machines de Turing Non-Determinist

- **Une machine de Turing à k-rubans NON-DETERMINISTE** est un 8-uplet $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \delta, q_0, q_a, q_r)$ où

1. $Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, q_a, q_r$ sont comme avant
2. δ fonction de transition: fonction de $Q \times \Gamma^k$ dans $\mathcal{P}(Q \times \Gamma^{k-1} \times Mvt^k)$ avec $Mvt = \{\leftarrow, |, \rightarrow\}$ ($\mathcal{P}(Q \times \Gamma^{k-1} \times Mvt^)$ désigne l'ensemble des parties de $Q \times \Gamma^k \times Mvt^k$).

Configurations

- On note: $C \vdash C'$ si la configuration C' est UN successeur direct de la configuration C par le programme (donné par δ) de la machine de Turing non déterministe.
- **Calcul de M sur mot** $w \in \Sigma^*$: UNE suite de configurations $(C_i)_{i \in N}$ telle que $C_0 = C[w]$ et pour tout i, $C_i \vdash C_{i+1}$.

- Le mot w est dit **accepté** si il existe UN calcul $(C_i)_{i \in N}$ sur le mot w, avec un entier t, tel que C_t est acceptante.
- On dit dans ce cas que w est accepté **en temps** t par le calcul $(C_i)_{i \in N}$.
- Le mot est dit accepté en **espace** m par le calcul $(C_i)_{i \in N}$ si le calcul $(C_i)_{i \in N}$ à utilisé au plus m cases mémoires sur les rubans $2, \ldots, k$.

Langage reconnu par une MT

- Les notions de langage reconnu sont inchangés. Ainsi:
- **Un langage** $L \subset \Sigma^*$ **est accepté par** M si pour tout $w \in \Sigma^*$,
  - $w \in L$ si et seulement si w est accepté.

Bornes sur l'espace et le temps

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction.

- **Un langage $L \subset \Sigma^*$ est accepté par M en temps f** si pour tout $w \in \Sigma^*$, si on pose $n = |w|$,
  - $w \in L$ si et seulement si w est accepté.
  - lorsque $w \in L$, il y a au moins UN calcul $(C_i)_{i \in N}$ sur w qui accepte w en un temps $t \leq f(n)$.
- **Un langage $L \subset \Sigma^*$ est accepté par M en espace** f, si M possède $k \geq 2$ rubans, le premier en lecture seulement, et si pour tout $w \in \Sigma^*$, si on pose $n = |w|$,
  - $w \in L$ si et seulement si w est accepté.
  - lorsque $w \in L$, il y a au moins UN calcul $(C_i)_{i \in N}$ sur w qui accepte w en un espace $m \leq f(n)$.

Thèse Church

- Notion informelle d'algorithme
- **Thèse de Church:** Tout algorithme peut se traduire en un programme de machine de Turing.

Thèse de l’invariance

- Notion informelle d’algorithme
- **Thèse de l’invariance:** La simumation de tout algorithme par un programme de machine de Turing introduit au plus un ralentissement quadratique, et un facteur constant sur l’espace.