Cours 5: Programmation dynamique

Olivier Bournez

bournez@lix.polytechnique.fr
LIX, Ecole Polytechnique

2011-12

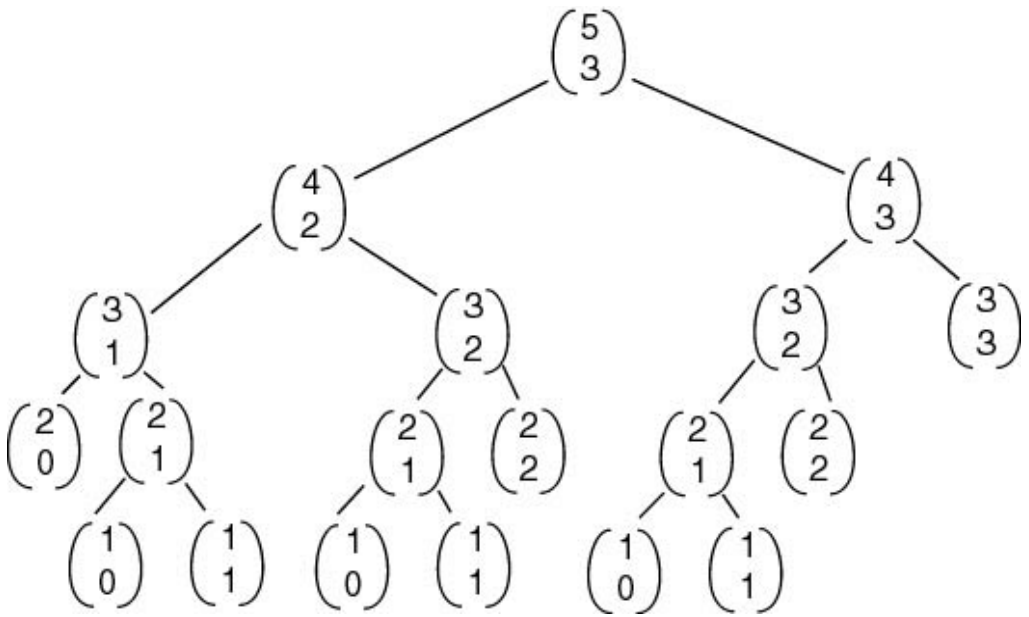
Algorithmique

Exemple: C_n^k

- Exemple: On veut calculer $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (aussi noté $\binom{n}{k}$)
- Prop:
  - $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ pour $0 < k < n$,
  - 1 sinon.
- Approche "Diviser pour régner".

  Fonction $C(n, k)$
  - Si $k = 0$ ou $k = n$ alors retourner 1.
  - Retourner $C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$.

Arbre de calcul de $C(5,3)$



Fait: Le nombre total d'appels récursifs est $2\binom{n}{k} - 2$

Meilleur idée: triangle de Pascal

	0	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$n-1$	1	$n-1$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n-1}{3}$	$\cdots$	1	
n	1	n	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\cdots$	n	1

Triangle de Pascal.

Principe

1. On rempli les k premières cases de chaque ligne de haut en bas.
2. On arrête à la ligne n
3. Temps: $T(n, k) = 0(nk)$.

Remarque: il n'est pas nécessaire de mémoriser tout le tableau.

Principes de la prog. dynamique

- Souvent utilisée lorsqu'une solution récursive se révèle inefficace.
  1. Solution récursive: Haut en bas.
  2. Programmation dynamique: Bas en haut.

- On évite de calculer plusieurs fois la même chose.

Découpe de planches

- On considère une scierie qui connaît le prix de vente p_i pour une planche de longueur i.
- Lorsqu'elle reçoit en entrée une planche de longueur n, elle peut soit en tirer directement le profit/prix p_n, soit chercher à la découper en k morceaux pour en tirer plusieurs (sous) planches de longueur $i_1, i_2, \cdots, i_k$ (avec $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$) et obtenir comme profit la somme $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$ des prix de vente des sous-planches.
- Le problème de la scierie est alors de déterminer la solution qui lui garantir un profit maximal.

- Exemple:

longueur i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prix p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Possibilités pour une planche de longueur 4

- Aucune découpe: profit 9
- Découpe $1 + 3$: profit $1 + 8 = 9$
- Découpe $2 + 2$: profit $5 + 5 = 10$
- Découpe $3 + 1$: profit $8 + 1 = 9$
- Découpe 1+1+2: profit $1 + 1 + 5 = 7$
- Découpe 1+2+1: profit $1 + 5 + 1 = 7$
- Découpe 2+1+1: profit $5 + 1 + 1 = 7$
- Découpe 1+1+1+1: profit $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

- Optimal: découpe 2+2, c'est-à-dire 2 morceaux de longueur 2.

Relation de récurrence

- r_n: profit maximal que l'on peut atteindre pour une planche de longueur n.
- Récurrence 1:

$$r_n = \max(p_n, r_1 + r_{n-1}, r_2 + r_{n-2}, \ldots, r_{n-1} + r_1)$$

  - le premier argument p_n correspond à faire aucune coupe
  - les autres $n-1$ arguments, à faire un premier trait de coupe à la longueur i, et à optenir le revenu maximal des deux morceaux obtenus de longueur i et $n-i$.

- Récurrence 2:

$$r_n = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i})$$

en posant $r_0 = 0$.

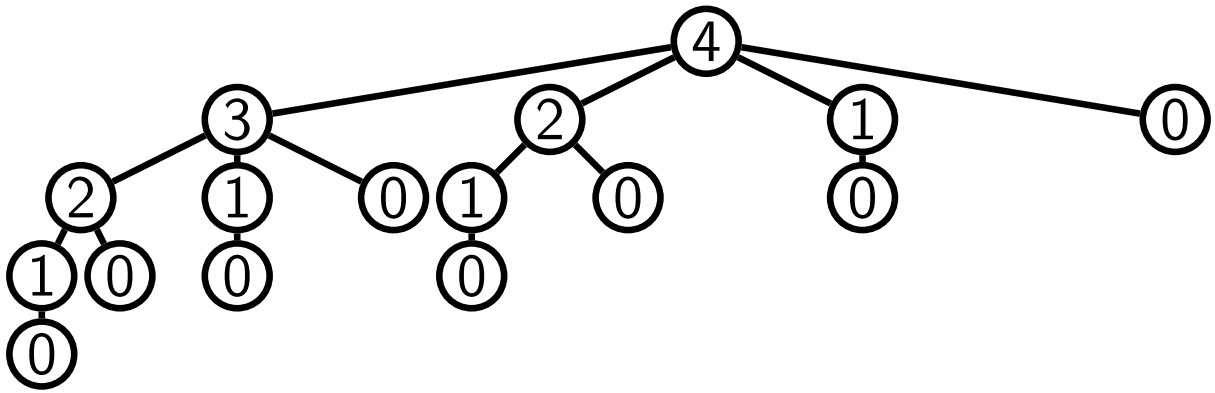
  - s'obtient en considérant que ce que l'on obtient au final est un morceaux de longueur i sur l 'extremité gauche, au prix p_i, et le reste, de longueur $n-i$, qui dans une solution optimal doit être un découpage optimal d'une planche de longueur $n-i$.

Programmation récursive (de haut en bas)

Fonction Coupe(p,n)

- si $n = 0$ alors retourner 0
- sinon
  - $q = -\infty$
  - pour $i = 1$ à n
    - $q = \max(q, p[i] + Coupe(p, n - i))$

Dérouler le calcul de $C(p, 4)$



- Beaucoup de calculs effectués qui ont déjà été calculés
- Complexité: $O(2^n)$.

Solution Mémoizée

- On considère un tableau $r[0..n]$, dont tous les éléments sont intialement tels que $r[i] = -\infty$

- Fonction Coupe-memoizé(p,n,r)
  - si $r[n] \geq 0$ alors retourner $r[n]$
  - sinon si $n = 0$ alors $q = 0$
  - sinon
    - $q = -\infty$
    - pour $i = 1$ à n
      $q = \max(q, p[i]+\text{Coupe-memoizé}(p, n-i, r))$
    - $r[n] = q$
  - retourner q.

- Complexité: $O(n^2)$.

Solution de bas en haut

- On considère un tableau $r[0..n]$
- $r[0] = 0$
- pour $j = 1$ à j
  - $q = -\infty$
  - pour $i = 1$ à j
    $q = \max(q, p[i] + r[j - i])$
  - $r[j] = q$
- retourner $r[n]$

Reconstruire une solution

On modifier très légèrement le code précédent:

- On considère un tableau $r[0..n]$ et un tableau $s[0..n]$
- $r[0] = 0$
- pour $j = 1$ à j
  - $q = -\infty$
  - pour $i = 1$ à j
    si $q < p[i] + r[j - i]$ alors
    $q = p[i] + r[j - i]$
    $s[j] = i$
  - $r[j] = q$
- retourner r et s

A partir de r, et s produit par l'algorithme plus haut, on peut reconstruire la solution. Il suffit de faire:

- tant que $n > 0$
  - afficher "un morceau de longueur $s[n]$"
  - $n = n - s[n]$

- Sur l'exemple on obtient

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r[i]	0	1	5	8	10	13	17	18	22	25	30
s[i]	0	1	2	3	2	2	6	1	2	3	10

- Par exemple, pour $n = 7$, on affiche qu'il faut découper en un morceau de 1, et un morceau de 6 (pour un profit de 18).

Multiplications chaînées de matrices.

- On veut calculer le produit de matrices

$$M = M_1 M_2 \cdots M_n$$

- Fait: multiplier une matrice pq, par une matrice qr en utilisant la méthode standard nécessite pqr produits scalaires.
- Exemple: A:13x5, B:5x89, C: 89x3, D: 3x34.
- On veut calculer ABCD.

- Le nombre de produits scalaires est donné dans le tableau suivant:
  1. ((AB)C)D: 10582
  2. (AB)(CD): 54201
  3. (A(BC))D: 2856
  4. A((BC)D): 4055
  5. A(B(CD)): 26418
- Question: comment trouver la meilleur parenthétisation?

Première solution

1. Essayer toutes les possibilités.
   - Soit $T(N)$ le nombre de façons de parenthéser $M_1 \dots M_n$
   - Écrivons:
     - $M = (M1 \dots Mi)(M_{i+1} \dots M_n)$.
     - $T(i)$façons 1ère parenthèse, T(n-i) façons autre.
   - On obtient: $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$ (Nombres de Catalan).
   - $T(2) = 1,\ T(3) = 2,\ T(4) = 5,\ T(5) = 14,\ T(10) = 4862,$ $T(15) = 2674440$.
   - Fait: T(n) dans $\Omega(4^n/n^2)$.

Alternative: Prog. Dynamique

- M_i: matrice $d_{i-1}d_i$.
- Définissons $m_{i,j}$: nombre minimal de produits scalaires nécessaires pour évaluer $M_i..M_j$.
- Supposons que nous sachions que la meilleure façon de parenthéser $M_i \ldots M_j$ est $(M_1..M_k)(M_{k+1} \ldots M_j)$.
  1. $M_i..M_k$ est une matrice $d_{i-1}d_k$ et nécessite $m_{i,k}$ produits scalaires.
  2. $M_{k+1} \ldots M_j$ est une matrice $d_k d_j$ et nécessite $m_{k+1,j}$ produits scalaires
  3. Le nombre total de produits scalaires est $m_{i,k} + m_{k+1,j} + d_{i-1}d_k d_j$.

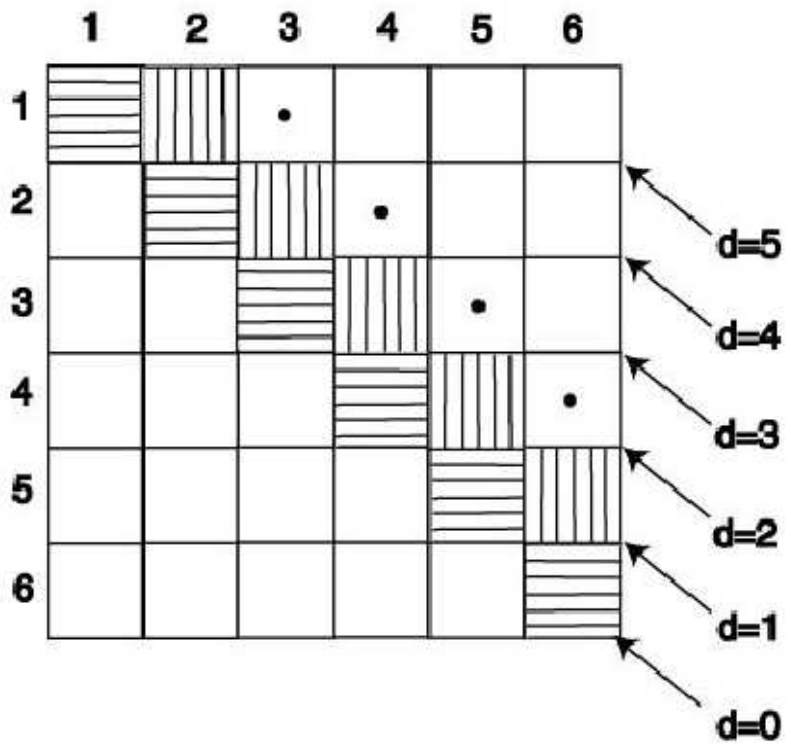
- On obtient

$$m_{i,j} = \begin{cases} \min_{i \leq k < j}(m_{i,k} + m_{k+1,j} + d_{i-1} d_k d_j) & \text{si } i < j. \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Preuve:

1. le raisonnement précédent montre que le membre gauche est plus grand que le membre droit.
2. réciproquement, les réalisations des minimums des membres droits donnent une parenthétisation, et donc le membre gauche est plus petit que le membre droit.

Arbre de calcul de $m_{2,5}$



Pour calculer $m_{2,5}$ nous avons besoin de $m_{2,2}$ et $m_{3,5}$, $m_{2,3}$ et $m_{4,5}$, $m_{2,4}$ et $m_{5,5}$

Faits

1. Pour calculer une diagonale, on a seulement besoin de connaître les diagonales précédentes.
2. La diagonale d contient les éléments $m_{i,j}$ tels que $d = j - i$.

Algorithme

1. Initialisation: tous les éléments de la diagonale sont mis à 0
2. $i := 1$
3. Calculer toutes les entrées de la diagonale i
4. Si $i < n$ aller en 3

Exemple: Tableau $m[i, j]$

	1	2	3	4
1	0	5785	1530	2856
2		0	1335	1845
3			0	9078
4				0

Exemple

Exemple: $n = 4$

$d_0 = 13, d_1 = 5, d_2 = 89, d_3 = 3, d_4 = 34$

$\underline{d = 1}$

$$m_{1,2} = 13 \times 5 \times 89 = 5785$$
$$m_{2,3} = 5 \times 89 \times 3 = 1335$$
$$m_{3,4} = 89 \times 3 \times 34 = 9078$$

Exemple

$\underline{d = 2}$

$$
\begin{aligned}
m_{1,3} &= \min\{m_{1,1} + m_{2,3} + 13 \times 5 \times 3, \\
&\qquad m_{1,2} + m_{3,3} + 13 \times 89 \times 3\} \\
&= \min\{1530, 9256\} \\
&= 1530 \\
m_{2,4} &= \min\{m_{2,2} + m_{3,4} + 5 \times 89 \times 34, \\
&\qquad m_{2,3} + m_{4,4} + 5 \times 3 \times 34\} \\
&= \min\{24208, 1845\} \\
&= 1845
\end{aligned}
$$

Exemple

$\underline{s = 3}$

$$
\begin{aligned}
m_{1,4} &= \min\{m_{1,1} + m_{2,4} + 13 \times 5 \times 34, \\
&\qquad m_{1,2} + m_{3,4} + 13 \times 89 \times 34, \\
&\qquad m_{1,2} + m_{4,4} + 13 \times 3 \times 34\} \\
&= \min\{4055, 54201, 2856\} \\
&= 2856
\end{aligned}
$$

Analyse

- Pour $d > 0$, il y a $n - d$ éléments sur la diagonale d.
- Pour chaque élément, on doit considérer d possibilités.
- Le temps d'exécution est

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{d=1}^{n-1}(n-d)d \\ &= n\sum_{d=1}^{n-1} d - \sum_{d=1}^{n-1} d^2 \\ &= n^2(n-1)/2 - n(n-1)(2n-1)/6 \\ &= (n^3 - n)/6. \end{aligned}$$

- Soit $T(n)$ dans $\theta(n^3)$.

Algorithme ProduitMatrice

- Pour $i := 1$ à n, $m[i, i] := 0$.
- Pour $l := 2$ à n //longueur de la chaîne
  - Pour $i := 1$ à $n - l + 1$
    - $j := i + l - 1$
    - $m[i, j] = +\infty$
    - Pour $k := i$ à $j - 1$
    - $q := m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j$
    - Si $q < m[i, j]$ alors
    - $m[i, j] := q$
    - $s[i, j] := k$

Exemple: Tableau $s[i, j]$

	1	2	3	4
1	0	1	1	3
2		0	2	3
3			0	3
4				0

Meilleur résultat: $(A(BC))D$ avec 2856 multiplications.

Algorithme AfficheResultat(s,i,j)

AfficheResultat(s,i,j)

- Si $i = j$ alors afficher M_i
- Sinon
  - Afficher “(“
  - $AfficheResultat(s, i, s[i, j])$
  - $AfficheResultat(s, s[i, j] + 1, j)$
  - Afficher “)”

Plus court chemin dans un graphe

- Entrée : Un graphe orienté $G = (N, A)$ où chaque arc possède une longueur non-négative. Un des noeuds du graphe est appelé source.
- Problème: Trouver la longueur du plus court chemin entre toutes les paires de noeuds.
- On suppose que $N = \{1, \ldots n\}$.
- On suppose aussi que G est donné sous forme de matrice $L[1..n, 1..n]$.
- Algorithme de Floyd: cet algorithme construite une matrice D qui donne la longueur du plus court chemin entre chaque pair de noeuds.

Principe

1. On initialise D à L
2. Après l'itération k, D donne la longueur du plus court chemin lorsque l'on utilise que des noeuds dans $\{1, .., k\}$ comme noeuds intermédiaires (ou éventuellement aucun noeud intermédiaire).

Définition: D_k est la matrice D après l'itération k.

Récurrence

$$D_k[i,j] = \min(D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j])$$

Exercice: expliquer pourquoi.

Floyd(L[1..n,1..n])

Procédure Floyd(L[1..n,1..n])

- D:=L
- Pour $k := 1$ à n
  - Pour $i := 1$ à n
    - Pour $j := 1$ à n
    - $D[i,j] = min(D[i,j], D[i,k] + D[k,j])$
- Retourner D.

Temps dans $O(n^3)$.

Principe d'optimalité

- Dans une séquence optimale de décisions, ou de choix, chaque sous séquence doit aussi être optimale.
- Exemple: Si (1,4), (4,2) est le chemin le plus court entre 1 et 2, alors (1,4) est le chemin le plus court entre 1 et 4 et (4,2) entre 4 et 2.
- Exemple: cela ne marche pas pour les chemins les plus longs.

Sous-structure optimale

- Un problème possède une sous structure optimale si toute solution optimale contient la solution optimale aux sous-problèmes.
- Exemple: chemin le plus court, multiplication chaînée de matrices, etc.
- Pour obtenir une solution efficace, l'espace des sous-structures d'un problème ne doit pas être trop grand.
- Exemple: dans la multiplication chaînée de matrices, l'espace des sous-structures consiste en l'évaluation de toutes les séquences de matrices $M_i..M_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

Fonctions à Mémoire

- Le fait que l'espace des sous-structures est petit implique qu'une solution récursive inefficace calcule plusieurs fois les mêmes problèmes plutôt que de toujours générer de nouveaux sous-problèmes.
- Exemple: Calculer $fib(n)$ avec $fib(0) = fib(1) = 1$, $fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)$.

Solution récursive

Fonction *fib*1(n)

- si n<2 alors retourner n
- retourner fib1(n-1)+fib1(n-1).

Temps dans $O(\phi^n)$ avec $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Solution prog. dynamique

Fonction $fib2(n)$

- $i := 1$
- $j := 0$
- Pour $k := 1$ à n
  - $j := i + j$
  - $i := j - i$
- Retourner j.

Temps dans $O(n)$.

Compromis

On veut obtenir

1. la clarté de l'approche récursive
2. l'efficacité de la programmation dynamique

- Idée: Ajouter une table à $fib1$, initialisée à “vide”, afin de ne pas faire d'appels inutiles.
- Fonction $fib(n)$
  - Si $n < 2$ alors
    - $T[n] := n$
    - Retourner n
  - Si $T[n-1] =''$ $vide''$ alors $T[n-1] := fib(n-1)$
  - $T[n] := T[n-1] + T[n-2]$
  - Retourner $T[n]$

Exercice: Sac à dos

Problème du Sac à dos:

- Entrées: Budget B, et n objets. Objet i: valeur v_i, prix p_i.
- But: choisir un sous-ensemble des objets de valeur totale maximale tout en dépensant au plus B.
- Définition récursive: soit $f(i, b)$ la plus grande valeur atteignable par choix d'objets dans $\{1.., i\}$ avec budget b.

- But: $f(n, B)$.
- Implantation: tableau $f[0..n, 0..B]$.
- Complexité: $0(nB)$.