

Cours 3. Partie 2: Arbres de recherche. Tas

Olivier Bournez

bournez@lix.polytechnique.fr
LIX, Ecole Polytechnique

2011-12

Algorithmique

Aujourd'hui

Dictionnaires, Files de priorité

Arbres binaires de recherche

Arbres AVL

Les tas

Le type abstrait Dictionnaire

- On suppose que l'on a des clés k qui vivent dans un univers U **totalemment ordonné**.
- A chaque clé k , on associe une donnée D . Les données vivent dans un univers V .
- Par rapport au cours sur le hachage, on veut ne pas seulement supporter les opérations d'insertion, recherche, et suppression.
- On suppose dans ce cours, pour simplifier, que comme pour le cours sur le hachage, il n'y a pas de clé en "double": une clé identifie une unique donnée.

Le type abstrait Dictionnaire

On cherche des structures de données, Dictionnaire, qui permettent

- D'insérer un couple (clé, donnée): `insérer(k,D)`.
- Retrouver la donnée¹ associée à une clé: `rechercher(k)`.
- Supprimer la donnée¹ associée à une clé: `supprimer(k)`.

(puisque U est totalement ordonné)

- Renvoyer le couple (clé, donnée)¹ associé à la clé la plus petite: `minimum()`.
- Renvoyer le couple (clé, donnée)¹ associé à la clé la plus grande: `maximum()`.

¹Quand elle/il existe

Application 1: représenter un ensemble

- On peut choisir $V = \emptyset$.
- Un Dictionnaire permet alors de représenter un ensemble d'éléments de U .
- Insérer un élément: `insérer(k)`.
- Tester l'appartenance d'un élément: `rechercher(k)`.
- Supprimer un élément: `supprimer(k)`.
- Renvoyer l'élément minimum: `minimum()`.
- Renvoyer l'élément maximum: `maximum()`.

Application 2: les files de priorité

Structures de données pour représenter un ensemble d'éléments dans un domaine V , avec une priorité $k \in U$ associée à chaque élément.

On a besoin:

- D'insérer un couple (priorité, élément): `insérer(k,D)`.
- Trouver l'élément de priorité maximale: `maximum()`.
- Enlever l'élément de priorité maximale:
`supprimer(clé(maximum()))`.

Exemple d'application:

- gestion des tâches sur un ordinateur partagé:
 - ▶ lorsqu'une tâche se termine, on choisit la tâche suivante parmi celles de priorité maximum.

Résumé

■ Complexité en moyenne:

	rechercher	insérer	supprimer	minimum	maximum
tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(\log n)$				
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

■ Complexité au pire cas:

tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

Aujourd'hui

Dictionnaires, Files de priorité

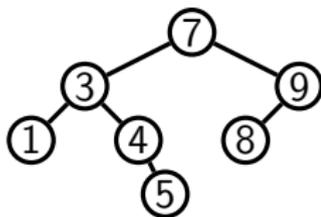
Arbres binaires de recherche

Arbres AVL

Les tas

Arbre binaire de recherche

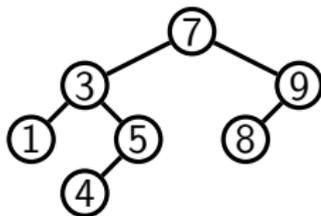
- Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire, dans lequel chaque sommet est étiqueté par un couple (k, D) , avec la propriété suivante:
 - ▶ tous les sommets du sous-arbre
 - gauche ont une clé inférieure à k .
 - droit ont une clé supérieure à k .
- Exemple:



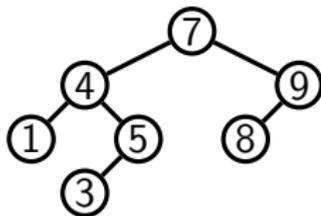
(Seules les clés sont représentées dans les dessins)

Arbres binaires de recherche

- Autre exemple:



- Contre-exemple:



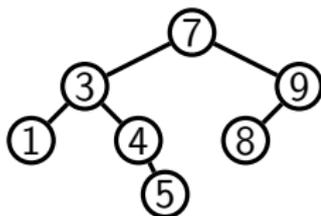
Coder un arbre binaire de recherche

- Un arbre binaire de recherche est un arbre.

```
class Arbre {  
    int k; int D;  
    Arbre gauche, droite;  
    Arbre (Arbre gauche, int k, int D, Arbre droite) {  
        this.gauche = gauche;  
        this.k = k;  
        this.D = D;  
        this.droite = droite; }}
```

Première propriété

- Propriété: Un parcours infixe d'un arbre binaire de recherche traite les sommets par clés croissantes.

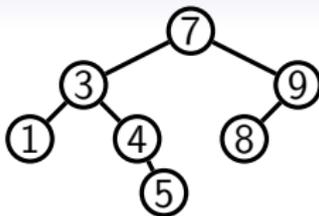


- Exemple:

```
static void affiche(Arbre a) {  
    if (a==null) return;  
    affiche(a.gauche);  
    System.out.print(a.k+" ");  
    affiche(a.droite);} 
```

Affiche: 1 3 4 5 7 8 9

Rechercher une clé k dans un arbre A



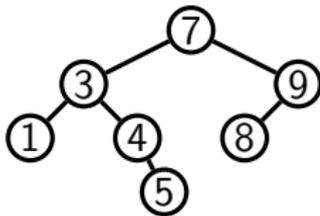
- Solution récursive simple:

```
static Arbre rechercher(int k, Arbre a) {  
    if (a==null) return null;  
    else if (a.k==k) return a;  
    else if (k<a.k) return rechercher(k,a.gauche);  
    else return rechercher(k,a.droite);  
}
```

- `rechercher(k, a)` renvoie
 - ▶ le sous-arbre de racine le sommet avec la clé k , si k est présente dans l'arbre,
 - ▶ et `null` si k n'y est pas.

Rechercher une clé k dans un arbre A

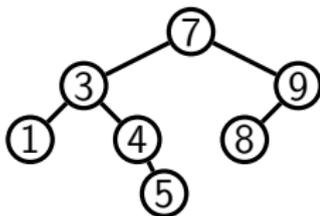
- Version itérative: pas vraiment plus compliqué. On suit un chemin dans l'arbre.



```
static Arbre rechercher(int k, Arbre a) {  
    while (a != null) {  
        if (a.k == k) return a;  
        else if (k < a.k) a = a.gauche;  
        else if (k > a.k) a = a.droite;  
    }  
    return null;  
}
```

Insérer une nouvelle clé k

- Solution récursive (persistante):

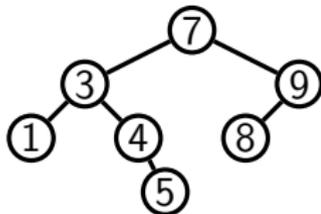


```
static Arbre insérer(int k, int D, Arbre a) {  
    if (a==null)  
        return new Arbre(null,k,D,null);  
    else if (k<a.k) // On insère à gauche  
        return new Arbre(insérer(k,D,a.gauche),a.k,a.D,a.droite);  
    else if (k>a.k) // On insère à droite  
        return new Arbre(a.gauche,a.k,a.D,insérer(k,D,a.droite));  
    else // k==a.k: clé déjà présente, ne rien faire.  
        return a;}
```

- Solution itérative plus compliquée.

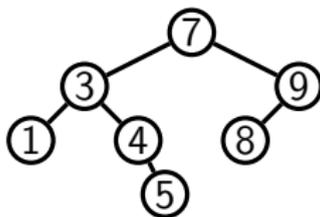
Insérer une nouvelle clé k

- Solution récursive (non-persistante):



```
static Arbre insérer2(int k, int D, Arbre a) {  
    if (a==null)  
        return new Arbre(null,k,D,null);  
    else if (k<a.k) // On insère à gauche  
        a.gauche = insérer(k,D,a.gauche);  
    else if (k>a.k) // On insère à droite  
        a.droite= insérer(k,D,a.droite);  
    return a;}
```

Renvoyer l'élément de clé maximum

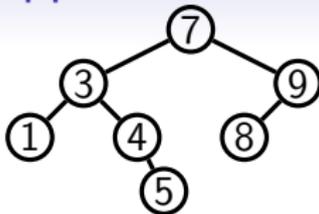


- L'élément de clé la plus grande s'obtient en allant systématiquement à droite.

```
static Arbre maximum(Arbre a) {  
    if (a==null) return null;  
    while (a.droite!=null) a=a.droite;  
    return a;  
}
```

- Symétriquement pour minimum.

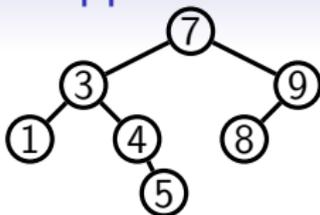
Supprimer une clé



■ 3 niveaux de difficulté:

- ▶ Supprimer une feuille (exemple: $k = 5$):
 - Trivial. Il suffit de l'enlever.
- ▶ Supprimer un sommet qui n'a qu'un fils (exemple: $k = 4$).
 - Facile. Il suffit de l'enlever, et de faire de l'unique fils un fils du père du sommet supprimé = remonter l'unique fils d'un niveau.
- ▶ Supprimer un sommet qui a deux fils (exemple: $k = 7$).
 - Moins facile.

Le cas moins facile: supprimer un sommet s d'arité 2



- Supprimer un sommet s qui a deux fils (exemple: $k = 7$).
 - ▶ On cherche l'élément g de clé maximum dans son sous-arbre gauche (sur l'exemple: g est l'élément de clé 5).
 - ▶ On échange le contenu du sommet s par le contenu du sommet g .
 - ▶ On supprime g .
- Remarques:
 - ▶ g n'a pas de fils droit (sinon, il ne serait pas maximum).
 - ▶ g est donc dans le cas trivial, ou facile, si on veut le supprimer.

Code complet en JAVA

- Solution récursive (persistante).

- ▶ On recherche le sommet correspondant à une clé:

```
static Arbre supprimer(int k, Arbre a) {  
    if (a==null) return a;  
    if (k==a.k) return supprimerRacine(a);  
    else if (k<a.k) return  
        new Arbre (supprimer(k,a.gauche),a.k,a.D,a.droite);  
    else return  
        new Arbre(a.gauche,a.k,a.D,supprimer(k,a.droite));}
```

- ▶ On supprime la racine du sous-arbre correspondant:

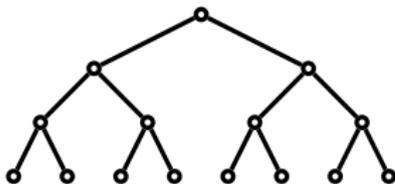
```
static Arbre supprimerRacine(Arbre a) {  
    // Cas trivial & Facile  
    if (a.gauche==null) return a.droite;  
    if (a.droite==null) return a.gauche;  
    // Cas moins facile  
    Arbre g= maximum(a.gauche);  
    return  
        new Arbre(supprimer(g.k,a.gauche),g.k,g.D,a.droite);}
```

Complexité des algorithmes

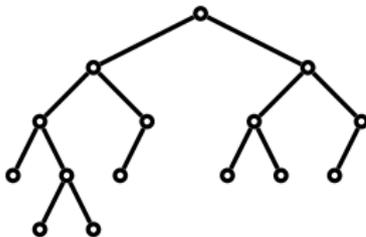
- Si h est la hauteur d'un arbre binaire de recherche, et n le nombre de sommets
 - ▶ insérer, rechercher, supprimer, maximum, minimum sont en $O(h)$.

Arbres avec h de l'ordre de $\log n$

- Un arbre (très bien) équilibré: $h = \log n$.

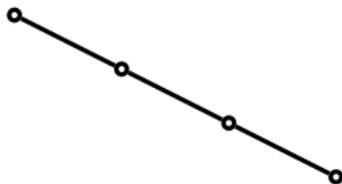


- Un arbre à peu près équilibré: $h \leq 2 \log n$.



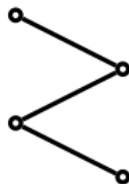
Arbres avec h de l'ordre de n

- Un arbre très mal équilibré: $h = n - 1$.



- ▶ On obtient un arbre comme cela si l'on insère $1, 2, 3, \dots, n$ dans cet ordre.

- Un autre arbre très mal équilibré: $h = n - 1$.



Complexité des algorithmes

- Si h est la hauteur d'un arbre binaire de recherche, et n le nombre de sommets
 - ▶ insérer, rechercher, supprimer, maximum, minimum sont en $O(h)$.
 - ▶ Donc au pire cas en $O(n)$.
- Pour garantir un pire cas en $O(\log n)$, on utilise des arbres *équilibrés*: arbres AVL, arbres a-b, arbres rouge et noir, ...

En fait:

- La hauteur moyenne d'un arbre à n sommets est $O(\sqrt{n})$, si on suppose tous les arbres binaires équiprobables.
- Mais plusieurs suites d'insertions peuvent produire les mêmes arbres: par exemple, 2, 1, 3 et 2, 3, 1 produisent l'arbre de hauteur 1 de racine 2.
- La hauteur moyenne d'un arbre à n sommets obtenu par insertion de $1, 2, \dots, n$, dans tous les ordres possibles, ces ordres étant équiprobables est $O(\log n)$.
- On peut donc considérer que les algorithmes précédents se comportent en $O(\log n)$, c'est-à-dire bien, en moyenne...
... mais parfois/avec un pire cas en $O(n)$.
- Les arbres équilibrés permettent de garantir un pire cas et une moyenne en $O(\log n)$.

Résumé

■ Complexité en moyenne:

	rechercher	insérer	supprimer	minimum	maximum
tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(\log n)$				
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

■ Complexité au pire cas:

tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

Aujourd'hui

Dictionnaires, Files de priorité

Arbres binaires de recherche

Arbres AVL

Les tas

Principe des arbres AVL

- Un arbre AVL (Adelson-Velskii et Landis) est
 1. un arbre binaire de recherche
 2. tel qu'en tout sommet, la hauteur du fils droit et du fils gauche diffèrent *au plus* d'un.

- Intérêt majeur:
 - ▶ Cette propriété garantie que la hauteur d'un arbre AVL est en $O(\log n)$.

Pourquoi?

- Plus précisément, cela découle de

$$\log_2(1 + n) \leq 1 + h \leq 1.44 \log_2(2 + n).$$

- La borne $\log_2(1 + n) \leq 1 + h$ est vraie pour tout arbre binaire (cf cours 2): un arbre binaire de hauteur h a au plus $2^{h+1} - 1$ sommets.
- Pour l'autre borne, on considère le nombre minimal $N(h)$ de sommets dans un arbre AVL de hauteur h .
 - ▶ Hauteur 0: $N(0) = 1$.
 - ▶ Hauteur 1: $N(1) = 2$.
 - ▶ Hauteur h , $h \geq 2$: une racine + un sous-arbre de hauteur $h - 1$ + un sous-arbre de hauteur $h - 2$.

$$N(h) = 1 + N(h - 1) + N(h - 2).$$



■ Posons $F(h) = 1 + N(h)$,

- ▶ On a $F(0) = 2$, $F(1) = 3$, et
- ▶ $F(h) = F(h-1) + F(h-2)$, pour $h \geq 2$.

■ C'est la suite de Fibonacci "décalée".

■ On trouve

$$F(h) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - \phi^{-(h+3)}),$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

■ On a donc $1 + n \geq F(h) > \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - 1)$ ce qui donne

$$h + 3 < \log_{\phi}(\sqrt{5}(2 + n)) < \frac{\log_2(2 + n)}{\log_2(\phi)} + 2.$$

■ On observe que $\frac{1}{\log_2(\phi)} \leq 1.44$.

Garder de la hauteur

```
class Arbre {
    int k; int D;
    Arbre gauche, droite;
    int hauteur;

    static int hauteur(Arbre a) {
        return a==null? -1:a.hauteur;
    }

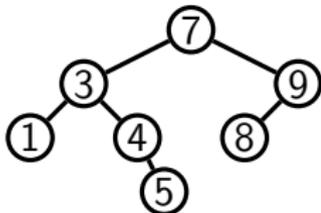
    Arbre (Arbre gauche, int k, int D, Arbre droite) {
        this.gauche = gauche;
        this.k = k; this.D = D;
        this.droite = droite;

        hauteur=1+ Math.max(hauteur(gauche),hauteur(droite));}}}
```

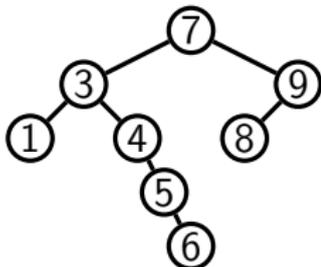
- Petite astuce JAVA: la fonction **static** hauteur renvoie soit la hauteur, soit -1 si l'arbre est vide.

Comment garder l'équilibre?

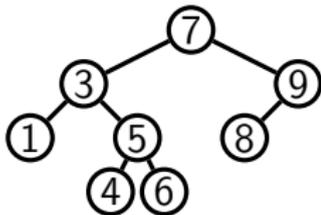
- Partant de:



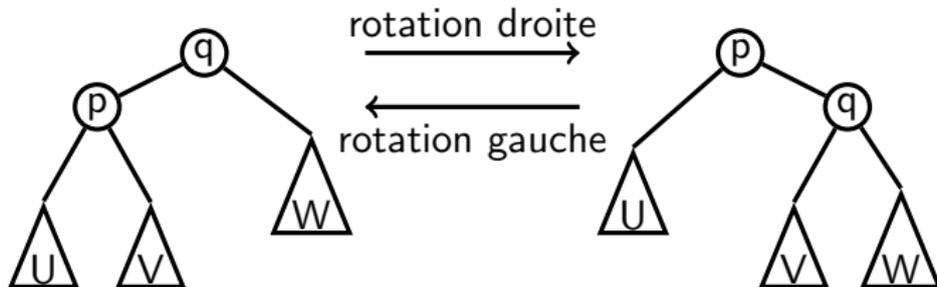
- Après avoir inséré un élément de clé 6 ...



- ..., on rétablit l'équilibre, par une *rotation*.



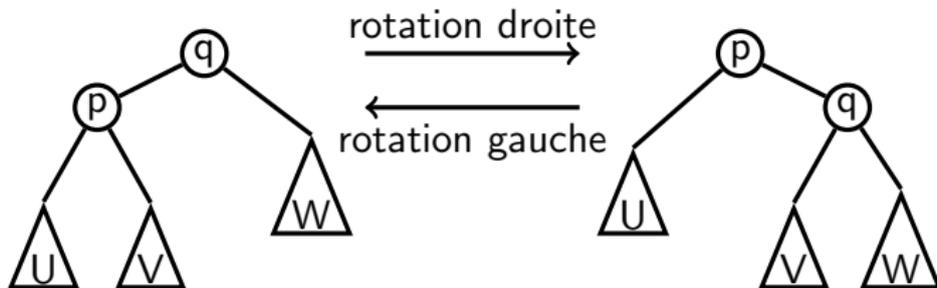
Le concept de rotation



■ Formellement:

- ▶ Rotation droite: A partir de $((U, p, V), q, W)$, on construit $(U, p, (V, q, W))$.
 - ▶ Rotation gauche: A partir de $(U, p, (V, q, W))$, on construit $((U, p, V), q, W)$.
- U, V, W sont des sous-arbres, qui peuvent être vides. Lorsqu'on fait une rotation droite (respectivement gauche), on suppose que l'arbre possède un fils gauche (resp. droit).

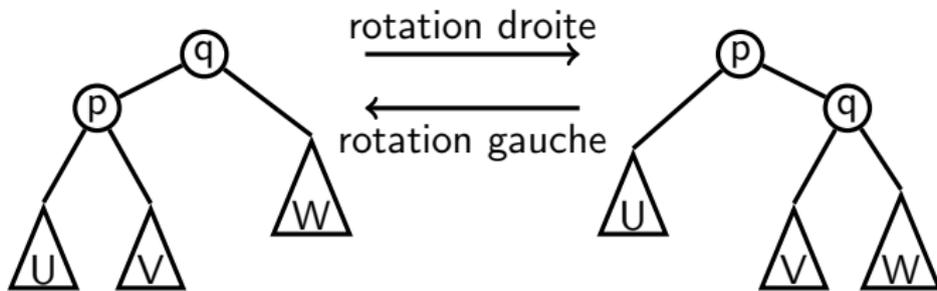
Rotation en JAVA



```
static Arbre rotationdroite(Arbre a) {  
    return new Arbre(a.gauche.gauche,a.gauche.k,a.gauche.D,  
        new Arbre(a.gauche.droite,a.k,a.D,a.droite));  
}
```

```
static Arbre rotationgauche(Arbre a) {  
    return new Arbre(new Arbre(a.gauche,a.k,a.D, a.droite.gauche),  
        a.droite.k,a.droite.D,a.droite.droite);  
}
```

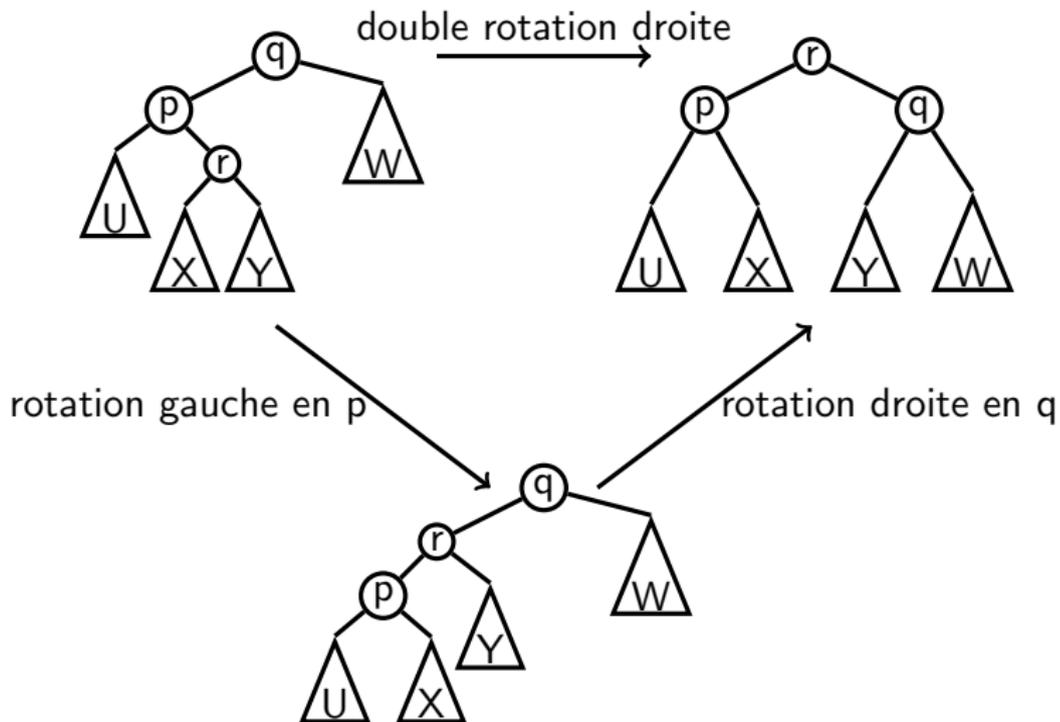
Propriétés des rotations



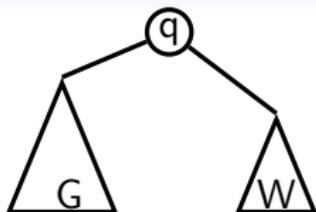
- Propriété 1: les rotations préservent l'ordre infixe, et donc la propriété d'arbre binaire de recherche.
- Par contre, elles modifient la hauteur de certains sous-arbres de 1 ou -1 .

Double rotation droite

- On définit une double rotation droite comme une rotation gauche en le fils gauche, puis une rotation droite.

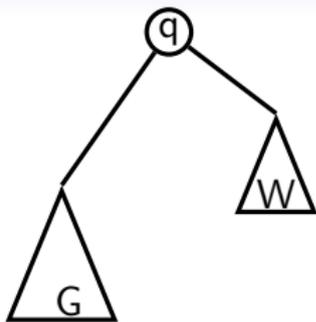


Petit raisonnement



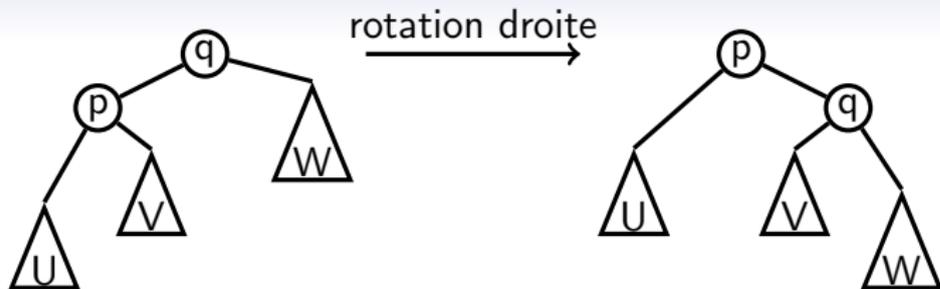
- Une insertion ou une suppression perturbe d'au plus 1 la hauteur du fils droit ou du fils gauche d'un sommet q .
- Si q n'est plus équilibré, c'est donc que $|hauteur(G) - hauteur(W)| = 2$.

Petit raisonnement



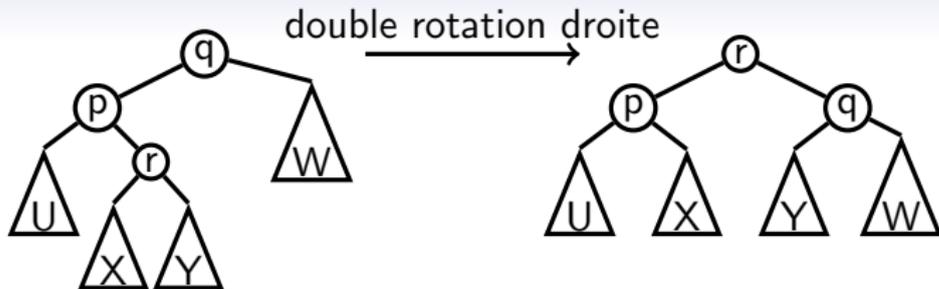
- Une insertion ou une suppression perturbe d'au plus 1 la hauteur du fils droit ou du fils gauche d'un sommet q .
- Si q n'est plus équilibré, c'est donc que $|hauteur(G) - hauteur(W)| = 2$.
- Supposons que $hauteur(G) = hauteur(W) + 2$ (l'autre cas s'obtient par symétrie).

Petit raisonnement



- Une insertion ou une suppression perturbe d'au plus 1 la hauteur du fils droit ou du fils gauche d'un sommet q .
- Si q n'est plus équilibré, c'est donc que $|hauteur(G) - hauteur(W)| = 2$.
- Supposons que $hauteur(G) = hauteur(W) + 2$ (l'autre cas s'obtient par symétrie).
- Si $hauteur(U) > hauteur(V)$, il suffit de faire un rotation droite en q .

Petit raisonnement



- Une insertion ou une suppression perturbe d'au plus 1 la hauteur du fils droit ou du fils gauche d'un sommet q .
- Si q n'est plus équilibré, c'est donc que $|hauteur(G) - hauteur(W)| = 2$.
- Supposons que $hauteur(G) = hauteur(W) + 2$ (l'autre cas s'obtient par symétrie).
- Si $hauteur(U) > hauteur(V)$, il suffit de faire un rotation droite en q .
- Si $hauteur(U) \leq hauteur(V)$, il suffit de faire une double rotation droite en q (= une rotation gauche en p , puis droite en q).

En JAVA

```
static Arbre équilibrer(Arbre a) {  
    a.hauteur = 1 + Math.max(hauteur(a.gauche), hauteur(a.droite));  
  
    if (hauteur(a.gauche) - hauteur(a.droite) == 2) {  
        if (hauteur(a.gauche.gauche) ≤ hauteur(a.gauche.droite))  
            a.gauche = rotationgauche(a.gauche);  
        return rotationdroite(a);}  
  
    if (hauteur(a.gauche) - hauteur(a.droite) == -2) {  
        if (hauteur(a.droite.droite) ≤ hauteur(a.droite.gauche))  
            a.droite = rotationdroite(a.droite);  
        return rotationgauche(a);}  
    return a;}  
}
```

Insérer

```
static Arbre insérer(int k, int D, Arbre a) {
    if (a==null)
        return new Arbre(null,k,D,null);
    else if (k<a.k) // On insère à gauche
        a=new Arbre(insérer(k,D,a.gauche),a.k,a.D,a.droite);
    else if (k>a.k) // On insère à droite
        a= new Arbre(a.gauche,a.k,a.D,insérer(k,D,a.droite));
    return équilibrer(a);
}
```

- On a simplement ajouté un appel à la méthode équilibrer avant de renvoyer.

Supprimer

```
static Arbre supprimer(int k, Arbre a) {
    if (a==null) return a;
    if (k==a.k) return supprimerRacine(a);
    else if (k<a.k) a=
        new Arbre (supprimer(k,a.gauche),a.k,a.D,a.droite);
    else a=
        new Arbre(a.gauche,a.k,a.D,supprimer(k,a.droite));
    return équilibrer(a);}

```

```
static Arbre supprimerRacine(Arbre a) {
    // Cas trivial & Facile
    if (a.gauche==null) return a.droite;
    if (a.droite==null) return a.gauche;
    // Cas moins facile
    Arbre g= maximum(a.gauche);
    a= new Arbre(supprimer(g.k,a.gauche),g.k,g.D,a.droite);
    return équilibrer(a);}

```

- Même remarque.

Complexité

- La complexité de chacune des procédures est majorée par la hauteur de l'arbre.
- Remarque: les rotations se font en temps constant.
- Bilan:
 - ▶ insérer, rechercher, supprimer, maximum, minimum s'effectuent en temps $O(\log n)$.
- Remarque: rééquilibrer un arbre
 - ▶ après une insertion, en fait une seule rotation, ou double rotation suffit.
 - ▶ après une suppression, il peut y avoir jusqu'à h rotations ou double rotations.

Résumé

■ Complexité en moyenne:

	rechercher	insérer	supprimer	minimum	maximum
tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(\log n)$				
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

■ Complexité au pire cas:

tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

Aujourd'hui

Dictionnaires, Files de priorité

Arbres binaires de recherche

Arbres AVL

Les tas

Les tas

- Les *tas* constituent une structure de données optimisée pour la gestion des files de priorité.
- Opérations supportées efficacement:
 - ▶ `insérer(k,D)`: $O(\log n)$.
 - ▶ `maximum()`: $O(1)$.
 - ▶ `supprimer(clé(maximum()))`: $O(\log n)$.
- n est le nombre d'éléments.
- En fait, les tas sont souvent utilisés comme briques élémentaires dans d'autres algorithmes plus complexes (ex: compression de Huffman & poly).

Tri par tas

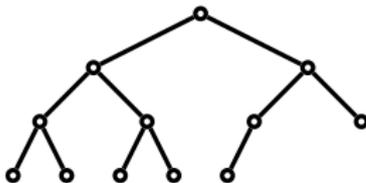
```
static void TriParTas (int tab[]) {  
    Tas t= new Tas(tab.length);  
  
    for (int i=0; i<tab.length;i++)  
        t.insérer(tab[i]);  
  
    for (int i=tab.length-1; i>=0;i--) {  
        tab[i]=t.maximum();  
        t.supprimerMaximum();  
    }  
}
```

- Le tri par tas est parmi les tris optimaux en $O(n \log n)$ comparaisons.

Définition d'un arbre tassé

- Un arbre binaire est dit *tassé* si
 - ▶ tous les niveaux sauf peut-être le dernier sont complets.
 - ▶ le dernier est "rempli à gauche".

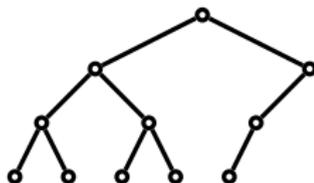
- Exemple:



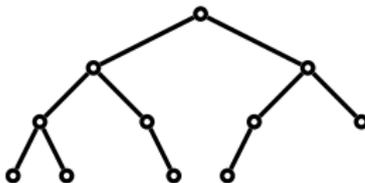
- Un arbre tassé à n sommets est de hauteur $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Contre-exemples

- Le niveau 2 n'est pas plein.

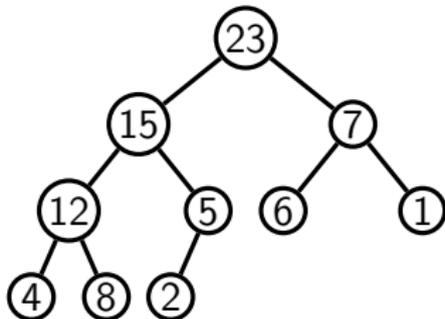


- Le niveau 3 n'est pas "rempli à gauche"



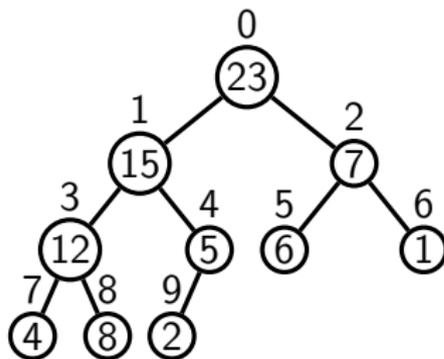
Un tas

- Un *tas* est un arbre binaire tassé,
 - ▶ dont les sommets sont étiquetés par des clés;
 - ▶ tel que tout sommet possède un clé supérieure ou égale aux clés de ses fils.



Tas et tableaux

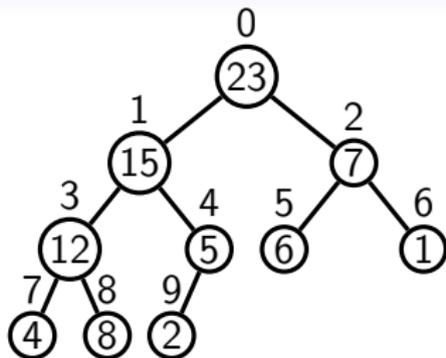
- Un tas se représente naturellement par un tableau.



- On numérote les sommets par un parcours en largeur, de gauche à droite.
- Le sommet i est rangé dans la case d'indice i du tableau.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
tab	23	15	7	12	5	6	1	4	8	2

Relations de filiation

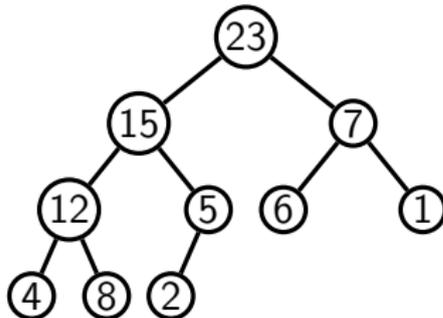


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
tab	23	15	7	12	5	6	1	4	8	2

racine	:	sommet 0
parent du sommet i	:	sommet $\lfloor (i - 1)/2 \rfloor$
fils gauche du sommet i	:	sommet $2i + 1$
fils droit du sommet i	:	sommet $2i + 2$
sommet i est une feuille	:	$2i + 1 \geq n$
sommet i a un fils droit	:	$2i + 2 < n$

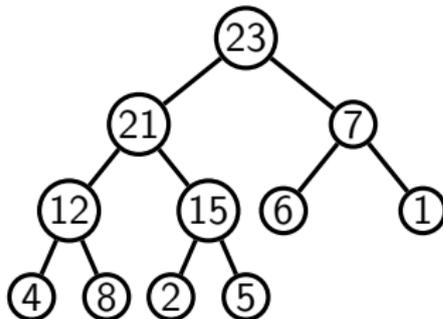
Insérer dans un tas

- Pour insérer la clé v dans un tas.
 - ▶ On insère la clé v à la fin du dernier niveau de l'arbre (à la fin du tableau).
 - ▶ Tant que la clé du père de v est plus petite que la clé v :
 - on échange la clé du père de v avec la clé v .
- Exemple: insertion de 21. (avant)



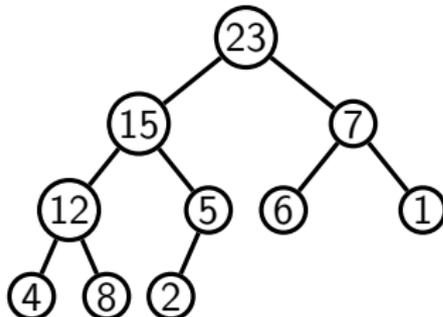
Insérer dans un tas

- Pour insérer la clé v dans un tas.
 - ▶ On insère la clé v à la fin du dernier niveau de l'arbre (à la fin du tableau).
 - ▶ Tant que la clé du père de v est plus petite que la clé v :
 - on échange la clé du père de v avec la clé v .
- Exemple: insertion de 21. (après)



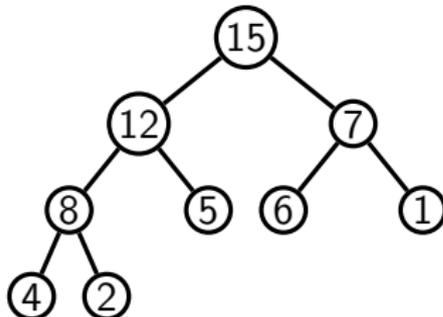
Supprimer le maximum

- La clé maximum se lit à la racine.
- Pour enlever la racine:
 - ▶ On remplace la racine par le dernier élément v (à la fin du tableau).
 - ▶ Tant que la clé de v est inférieure à celle de l'un de ses fils:
 - on échange la clé de v avec celle du plus grand de ses fils.
- Exemple: suppression du maximum. (avant)



Supprimer le maximum

- La clé maximum se lit à la racine.
- Pour enlever la racine:
 - ▶ On remplace la racine par le dernier élément v (à la fin du tableau).
 - ▶ Tant que la clé de v est inférieure à celle de l'un de ses fils:
 - on échange la clé de v avec celle du plus grand de ses fils.
- Exemple: suppression du maximum. (après)



Complexité des opérations

- La complexité des opérations d'insertion et de suppression du maximum est majorée par la hauteur de l'arbre.
- Complexité:
 - ▶ `insérer(k,D)`: $O(\log n)$.
 - ▶ `maximum()`: $O(1)$.
 - ▶ `supprimer(clé(maximum()))`: $O(\log n)$.
- n est le nombre d'éléments.

Un tas en JAVA

```
class Tas {  
  
    private int [] t ;  
    // Tableau des sommets  
    private int n ;  
    // Nombre de sommets  
  
    Tas(int sz) {  
        t = new int [sz+1] ;  
        n = 0 ;}  
  
}
```

```
int maximum() {  
    return t[0];  
}
```

```
int père(int i) {  
    return (i-1)/2;}  
  
int gauche(int i) {  
    return 2 * i + 1;}  
  
int droite(int i) {  
    return 2 * i + 2;}  
  
boolean estUneFeuille(int i) {  
    return (2 * i + 1  $\geq$  n);}  
  
boolean aUnFilsDroit(int i) {  
    return (2 * i + 2 < n);}  
  
...}
```

Insérer en JAVA

```
void insérer(int v) {  
    int i = n;  
    n++;  
  
    while (i > 1 && t[père(i)] ≤ v) {  
        t[i] = t[père(i)] ;  
        i = père(i);  
    }  
  
    t[i] = v;  
}
```

- En fait, on n'échange pas le père de v avec v , mais on "descend" le père de v , et v est mis directement à sa place finale.

Supprimer le maximum en JAVA

```
void supprimerMaximum() {
    n--;
    int v = t[n];
    int i = 0;
    while (!estUneFeuille(i)) {
        int j = gauche(i);
        if (aUnFilsDroit(i) && t[droite(i)] > t[gauche(i)])
            j = droite(i);
        if (v >= t[j])
            break;
        t[i] = t[j];
        i = j;
    }
    t[i] = v;}
}
```

- Même astuce.

Résumé

■ Complexité en moyenne:

	rechercher	insérer	supprimer	minimum	maximum
tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(\log n)$				
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$

■ Complexité au pire cas:

tableau/liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
dichotomie	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
hachage	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre de recherche	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
arbre équilibré	$O(\log n)$				
tas	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$