Nombres surréels, intégration, calculs

Quentin Guilmant

LIX, École Polytechnique

Lundi 6 septembre 2021

Plan

Nombres surréels

Nombre ?

- Construction des nombres : $\varnothing \to \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ est l'unique corps archimédien complet.

Nombre ?

- Construction des nombres : $\varnothing \to \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ est l'unique corps archimédien complet.
- Mais si on veut aller plus loin ? Avec des ordinaux ?

Forme normale de Cantor : $\sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} n_i$

On obtient alors les nombres surréels.

Nouvel objet : les nombres surréels

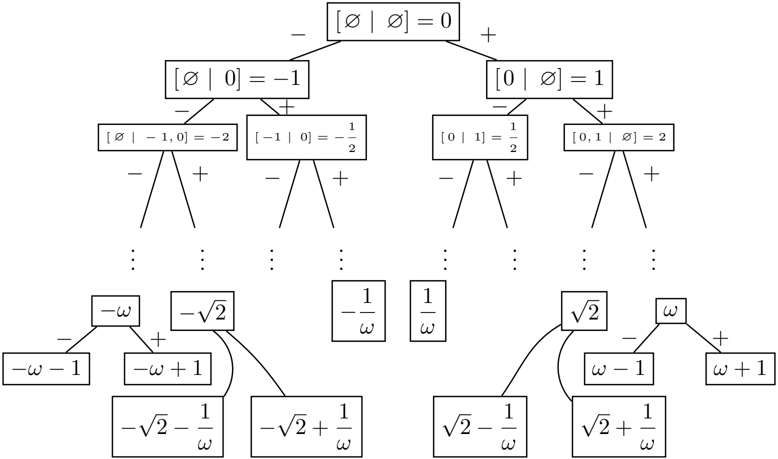
- Coupures : $\frac{\omega}{2} = [\, n \in \mathbb{N} \mid \{\omega - n \mid n \in \mathbb{N}\}]$
- Suites de signes : $\frac{\omega}{2} = (+)^{\omega}(-)^{\omega}$
- Séries de Hahn : $\sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$

Nouvel objet : les nombres surréels

- Coupures : $\frac{\omega}{2} = [\, n \in \mathbb{N} \mid \{\omega - n \mid n \in \mathbb{N}\}]$
- Suites de signes : $\frac{\omega}{2} = (+)^{\omega}(-)^{\omega}$
- Séries de Hahn : $\sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$

No désigne la classe des nombres surréels. Elle contient $\mathbb{R}$, les nombres ordinaux et (beaucoup) d'autres (Ex : $\frac{\omega}{2}$, $\sqrt{\omega}$, $\omega^{1/\omega} = \ln \omega$).

Arbres des nombres surréels



Opérations

Définition

$$\sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i} + \sum_{i<\mu} s_i \omega^{b_i} = \sum_{a=a_i=b_j} (r_i + s_j)\omega^a$$

$$x + y = [\, L_x + y,\ x + L_y \mid R_x + y,\ x + R_y \,]$$

Définition

$$\sum_{a \in \mathbf{No}} \omega^a r_a \times \sum_{a \in \mathbf{No}} \omega^a s_a = \sum_{a \in \mathbf{No}} \omega^a \sum_{b+c=a} r_b s_c$$

$$x \times y = \left[\begin{array}{c} l_x y + x l_y - l_x l_y \\ r_x y + x r_y - r_x r_y \end{array} \middle| \begin{array}{c} l_x y + x r_y - l_x r_y \\ r_x y + x l_y - r_x l_y \end{array} \right]$$

Sous-ensembles de nombres surréels

Notation

$$\mathbf{No}_{<\alpha} = \{x \in \mathbf{No} \mid \operatorname{length}(x) < \alpha\}$$

Sous-ensembles de nombres surréels

Notation

$$\mathbf{No}_{<\alpha} = \{x \in \mathbf{No} \mid \text{length}(x) < \alpha\}$$

Proposition (Van den Dries and Ehrlich [6], corollaires 3.1, 4.4 et 4.9)

L'ensemble $\mathbf{No}_{<\lambda}$ *(muni des opération addition et multiplication) est*

- *un groupe pour* $+$ *ssi* λ *is additif (i.e de la forme* $\lambda = \omega^{\alpha}$*)*
- *un anneau commutatif ssi* λ *is multiplicatif (i.e de la forme* $\lambda = \omega^{\omega^{\alpha}}$*)*
- *un corps iff* λ *est un* ε*-nombre (i.e satisfait l'équation* $\lambda = \omega^{\lambda}$*)*

Corps de séries de Hahn

Définition (Corps de séries de Hahn)

$$\mathbb{K}((t^\Gamma)) = \{\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma \mid \text{supp}(x) := \{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\} \text{ est bien ordonné}\}$$

$\mathbb{K}$ un corps et Γ un groupe abélien ordonné.

Corps de séries de Hahn

Définition (Corps de séries de Hahn)

$$\mathbb{K}((t^\Gamma)) = \{\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma \mid \text{supp}(x) := \{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\} \text{ est bien ordonné}\}$$

$\mathbb{K}$ un corps et Γ un groupe abélien ordonné.

Notation

$\mathbb{K}_\lambda^\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{K}((t^\Gamma)) \;\middle|\; \operatorname{supp} x < \lambda \right\}$

Notation

Si $(\Gamma_i)_{i\in I}$ est un suite de groupes abélien croissante (avec I ordonné), alors on pose $\mathbb{R}_\lambda^{(\Gamma_i)_{i\in I}} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{R}_\lambda^{\Gamma_i}$

Forme normale

Théorème (Gonshor , [4, théorème 5.6])

Tout nombre surréel peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$$

Pour Γ sgrp abélien ordonné de **No**, $\mathbb{R}^{\Gamma}_{\lambda}$ est un corps de nombres surréels.

Forme normale

Théorème (Gonshor , [4, théorème 5.6])

Tout nombre surréel peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$$

Pour Γ sgrp abélien ordonné de **No**, $\mathbb{R}_\lambda^\Gamma$ est un corps de nombres surréels.

Définition

Pour $x = \sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$ et $y = \sum_{i<\nu'} s_i \omega^{b_i}$,

- $x \prec y \iff x$ plus petit en ordre de grandeur que y
- $x \asymp y \iff x$ du même ordre de grandeur que y
- $x \preceq y \iff x$ au plus du même ordre de grandeur que y
- $x \sim y \iff x$ et y sont équivalents

Fonction exponentielle

Définition

$$\exp x = \left[\begin{matrix} 0, \exp(x')\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x')^k}{k!}, \\ \exp(x'')\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(x-x'')^k}{k!} \end{matrix} \;\middle|\; \frac{\exp(x')}{\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(x'-x)^k}{k!}}, \frac{\exp(x'')}{\sum_{k=0}^{n}\frac{(x''-x)^k}{k!}}\right]$$

Théorème ([4, théorèmes 10.2, 10.3 and 10.4])

Pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout ε infinitésimal,

$$\exp r = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!} \qquad et \qquad \exp\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}$$

et

$$\exp(r+\varepsilon) = \exp(r)\exp(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+\varepsilon)^k}{k!}$$

Pour tout x purement infini,

$$\exp(x+r+\varepsilon) = \exp(x)\exp(r+\varepsilon)$$

Fonction exponentielle

Proposition ([4, théorème 10.5])

Pour x purement infini,

$$\exp x = \left[0, \exp(x') \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x')^k}{k!} \;\middle|\; \frac{\exp(x'')}{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x''-x)^k}{k!}} \right]$$

Proposition (Gonshor, [4, théorème 10.13])

Si x est purement infini alors

$$\exp x = \omega^{\sum_{i<\nu} r_i \omega^{g(a_i)}}.$$

où $$g(a) = [\, c(a), g(a') \mid g(a'')]$$
et $c(a)$ est le surréel tel que $a \asymp \omega^{c(a)}$.

Fonction logarithme

Définition

$$\ln \omega^a = \left[\ln \omega^{a'} + n, \ln \omega^{a''} - \omega^{\frac{a''-a}{n}} \;\middle|\; \ln \omega^{a''} - n, \ln \omega^{a'} + \omega^{\frac{a-a'}{n}} \right]$$

Cette définition est uniforme.

Si $x \preceq 1$ alors on pose $\ln x = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{x^k}{k}$.

$x = \sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i} = r_0 \omega^{a_0}(1+\eta)$ avec $\eta \prec 1$, alors

$$\ln x = \ln \omega^{a_0} + \ln r_0 + \ln(1+\eta)$$

Proposition (Gonshor [4, théorème 10.8, 10.9 et 10.12])

Pour tout surréel a, $\ln \omega^a$ *est purement infiniment grand :*

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i},\ \ln \omega^x = \sum_{i<\nu} r_i \omega^{h(a_i)}$$

On a $\exp \ln \omega^a = \omega^a$. *De plus, pour tout surréel x,* $\ln \omega^{\omega^x} = \omega^{h(x)}$.

avec
$$h(x) = \left[0, h(x') \;\middle|\; h(x''), \frac{\omega^x}{n} \right]$$

Nombres log-atomiques, $\mathbb{L}$

Définition

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbf{No} \;\middle|\; \begin{array}{c} x \text{ est purement infiniment grand} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a \in \mathbf{No} \qquad \ln_n x := \underbrace{\ln \cdots \ln}_{n \text{ fois}} x = \omega^a \end{array} \right\}$$

Exemple

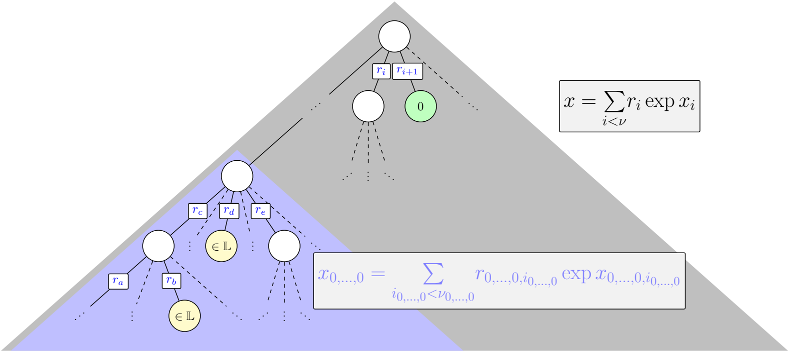
ω est un log-atomique : $\ln_n \omega = \omega^{\frac{1}{\omega^n}}$

Nouvelle écriture pour les surréels

Les nombres de la forme ω^a sont exactement les exponentielles de nombres purement infiniment grands.

Nouvelle écriture pour les surréels

Les nombres de la forme ω^a sont exactement les exponentielles de nombres purement infiniment grands.



κ-nombres

Définition

Pour x un nombre surréel, on définit

$$\kappa_x = [\exp_n 0, \exp_n \kappa_{x'} \mid \log_n \kappa_{x''}]$$

κ-nombres

Définition

Pour x un nombre surréel, on définit

$$\kappa_x = [\exp_n 0, \exp_n \kappa_{x'} \mid \log_n \kappa_{x''}]$$

Ce sont des représentants « canoniques » d'une relation de comparaison d'exponentielles et logarithmes itérés.

κ-nombres

Définition

Pour x un nombre surréel, on définit

$$\kappa_x = \left[\exp_n 0, \exp_n \kappa_{x'} \;\middle|\; \log_n \kappa_{x''}\right]$$

Ce sont des représentants « canoniques » d'une relation de comparaison d'exponentielles et logarithmes itérés.

Exemple

- $\kappa_0 = \omega$
- $\kappa_{-1} = \omega^{\frac{1}{\omega^\omega}}$
- $\kappa_1 = \varepsilon_0$

Rang de troncature

Définition (Berarducci, Mantova, [2], définition 4.27)

Le rang de troncature de $x \in \mathbf{No}$ est défini par

$$\mathrm{NR}(x) = \sup \{ \mathrm{NR}(y) + 1 \mid y \lhd x \}$$

où sup est l'opérateur usuel sur les ordinaux.

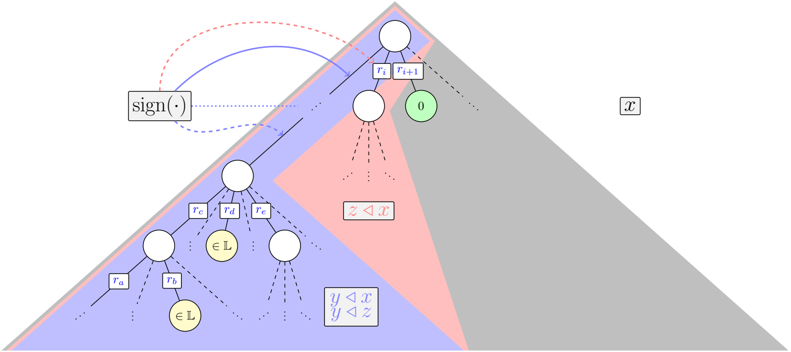
Rang de troncature

Définition (Berarducci, Mantova, [2], définition 4.27)

Le rang de troncature de $x \in \mathbf{No}$ est défini par

$$\mathrm{NR}(x) = \sup\{\, \mathrm{NR}(y) + 1 \mid y \lhd x \}$$

où sup est l'opérateur usuel sur les ordinaux.



Plan

Dérivation des surréels

Dériver un surréel

On peut « dériver » des nombres surréels.

Dériver un surréel

On peut « dériver » des nombres surréels.

Proposition (Berarducci, Mantova [2, corollaires 6.24 et 6.29, propositions 6.26 et 6.28])

- $\forall x \in \mathbf{No} \qquad \partial x = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- *Si la somme* $\sum_{i<\alpha} x_i$ *fait sens, alors* $\partial \sum_{i<\alpha} x_i = \sum_{i<\alpha} \partial x_i$. *En particulier, cette somme a aussi du sens.*
- $\forall x \in \mathbf{No} \qquad \partial \exp x = \exp(x) \partial x.$
- $\forall x, y \in \mathbf{No} \qquad \partial(xy) = x\partial y + y\partial x$

Comparaison de dérivées

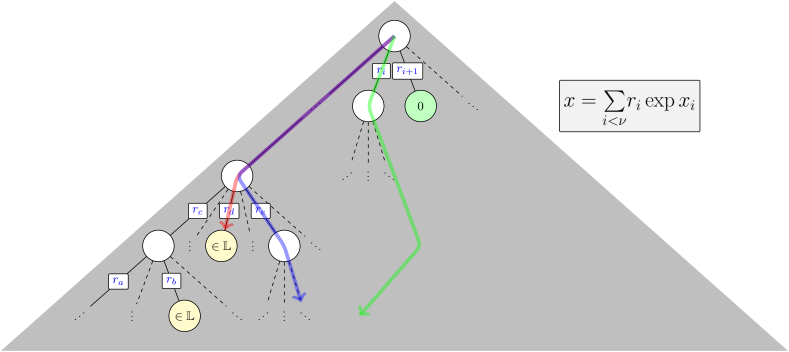
Proposition (Berarducci, Mantova [2], proposition 6.4)

On a

- $\forall x, y \in \mathbb{K} \qquad 1 \not\asymp x \succ y \Rightarrow \partial x \succ \partial y$
- $\forall x, y \in \mathbb{K} \qquad 1 \not\asymp x \sim y \Rightarrow \partial x \sim \partial y$
- $\forall x, y \in \mathbb{K} \qquad 1 \not\asymp x \asymp y \Rightarrow \partial x \asymp \partial y$

Idée

Sommer les contributions de chaque chemin dans l'arbre de la racine à une feuille dans $\mathbb{L}$.



Plan

Intégration

Intégration asymptotique

Proposition (Berarducci, Mantova [2, propositions 7.4 et 7.6])

Pour tout surréel x, il existe une primitive asymptotique y telle que $\partial y \sim x$. En particulier, il existe une fonction « simple » A qui à x associe un terme tel que $\partial A(x) \sim x$.

Intégration

Lemme (Aschenbrenner, van den Dries, van der Hoeven [1, corollary 1.4])

*Soit Φ fortement linéaire définie sur un corps $\mathbb{K} \subseteq$ **No**. Si pour tout monôme $\omega^a \in \mathbb{K}$ on a $\Phi(\omega^a) \prec \omega^a$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi^i(x)$ a du sens en tant que nombre surréel. De plus si cette somme est un élément de $\mathbb{K}$ pour tout x,*

$$(\mathrm{id} - \Phi)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi^i$$

Intégration

Lemme (Aschenbrenner, van den Dries, van der Hoeven [1, corollary 1.4])

*Soit Φ fortement linéaire définie sur un corps $\mathbb{K} \subseteq$ **No**. Si pour tout monôme $\omega^a \in \mathbb{K}$ on a $\Phi(\omega^a) \prec \omega^a$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi^i(x)$ a du sens en tant que nombre surréel. De plus si cette somme est un élément de $\mathbb{K}$ pour tout x,*

$$(\mathrm{id} - \Phi)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi^i$$

Pour intégrer on peut alors prend $\Phi = \mathrm{id} - \partial \circ \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ est l'opérateur fortement linéaire associé à $A_{|\omega^{\mathbf{No}}}$

La primitive est donnée par $\mathcal{A} \circ \sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi^i$.

Plan

Travail sur un sous-corps de nombres surréels

Résultats

- Majoration de la longueur de la série de ∂x en fonction de $\mathrm{NR}(x)$.
- Conditions de stabilité par exp et ln. Exemple de construction.
- Forme explicite de l'antidérivée asymptotique.
- Support de la primitive d'un terme, majoration de sa longueur.
- Identification un corps de surréels « raisonnable » stable par exp ln, ∂ et anti-dérivation.

Majorer la longueur de la dérivée

Proposition

Pour tout $x \in \mathbf{No}$, *l'ensemble* $\mathcal{P}_{\mathbb{L}}(x)$ *muni de* $\sqsubset$ *est bien ordonné avec pour type d'ordre* $\beta < \omega^{\omega^{\omega(\mathrm{NR}(x)+1)}}$. *En particulier,*

$$\nu(\partial x) < \omega^{\omega^{\omega(\mathrm{NR}(x)+1)}}$$

Corollaire

Pour λ *un* ε*-nombre, si* $\mathrm{NR}(x) < \lambda$ *alors* $\nu(\partial x) < \lambda$

Stabilité par exponentielle et logarithme

Proposition

Soit λ un ε-nombre et Γ un sous-groupe additif abélien de **No***. Alors $\mathbb{R}_\lambda^\Gamma$ est stable par* exp *et* ln *si et seulement si $\Gamma = \mathbb{R}_\lambda^{g\left(\Gamma_+^*\right)}$.*

Proposition

Soit λ un ε-nombre et $(\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes abéliens de **No***. Alors $\mathbb{R}_\lambda^{(\Gamma_i)_{i\in I}}$ stable par* exp *et* ln *si et seulement si $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i = \bigcup_{i\in I}\mathbb{R}_\lambda^{g\left(\Gamma_+^*\right)}$.*

Construction d'un exemple

Γ un sous-groupe abélien de **No**

λ un ε-nombre. Soit α tel que $\lambda = \varepsilon_\alpha$. On a

$$\lambda = \sup \left(e_\beta \right)_{\beta < \gamma_\lambda}$$

avec $\gamma_\lambda = \begin{cases} \omega & \beta + 1 = \alpha \\ \alpha & \alpha \in \mathbf{Lim} \end{cases}$

Construction d'un exemple

Γ un sous-groupe abélien de **No**
λ un ε-nombre. Soit α tel que $\lambda = \varepsilon_\alpha$. On a

$$\lambda = \sup \left(e_\beta\right)_{\beta < \gamma_\lambda}$$

avec $\gamma_\lambda = \begin{cases} \omega & \beta + 1 = \alpha \\ \alpha & \alpha \in \mathbf{Lim} \end{cases}$

On pose $\Gamma^{\uparrow\lambda}$ la familles de groupes $\left(\Gamma_\beta\right)_{\beta<\gamma_\lambda}$ définie comme suit :

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_{\beta+1}$ est le groupe généré par Γ_β, $\mathbb{R}_{e_\beta}^{g\left((\Gamma_\beta)_+^*\right)}$ et $\left\{ h(a_i) \;\middle|\; \sum\limits_{i<\nu} r_i \omega^{a_i} \in \Gamma_\alpha \right\}$
- Pour β un ordinal limite, $\Gamma_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \Gamma_\gamma$.

Construction d'un exemple

Corollaire

Soit Γ *un sous-groupe abélien de* **No** *et* λ *un* ε*-nombre. Alors,* $\mathbb{R}_{\lambda}^{\Gamma^{\uparrow\lambda}}$ *est stable par* exp *et* ln*.*

Construction d'un exemple

Corollaire

Soit Γ *un sous-groupe abélien de* **No** *et* λ *un* ε*-nombre. Alors,* $\mathbb{R}_{\lambda}^{\Gamma\uparrow\lambda}$ *est stable par* $\exp$ *et* $\ln$*.*

Il est aussi stable par ∂ (pour un choix raisonnable de Γ)

Explicitation de l'anti-dérivée asymptotique

Proposition

Soit x un surréel non nul. Écrivons $|x| = \partial u \exp(\varepsilon)$ avec $u = \ln_n \kappa_{-\alpha} = \lambda_{-\omega\alpha-n}$ et $\omega\alpha + n$ minimal tel que $\varepsilon \not\sim -\ln u$. Alors,

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{t}{s} & \varepsilon \succ \ln u \\[2ex] \dfrac{ut}{(r+1)\partial u} & \varepsilon = r \ln u + \eta \quad r \neq -1, \eta \prec \ln u \end{cases}$$

où t est le terme dominant x et s celui de $\partial\varepsilon$.

Primitive

Rappel : $\mathcal{A}$ est l'opérateur fortement linéaire associé à A.

$$\Phi(x) = x - \partial\mathcal{A}(x)$$

Corollaire

$\mathrm{id} - \Phi$ *est inversible d'inverse* $\sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi^i$. *De plus,* $\mathcal{A} \circ \sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi^i$ *est bien défini et a tout surréel* x *associe une primitive de* x.

Majoration de la longueur du support

Proposition

Soit x un surréel. Soit γ le plus petit ordinal tel que $\kappa_{-\gamma} \prec^K P(k_P)$ pour tout chemin $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(x)$. Soit λ le plus petit ε-nombre strictement supérieur à $\mathrm{NR}(x)$ et γ. Alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \Phi^i(x)$ est inversement bien ordonné de type d'ordre strictement plus petit que $\omega^{\omega^{\lambda+2}}$.

Majoration de la longueur du support

Proposition

Soit x un surréel. Soit γ le plus petit ordinal tel que $\kappa_{-\gamma} \prec^K P(k_P)$ pour tout chemin $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(x)$. Soit λ le plus petit ε-nombre strictement supérieur à $\mathrm{NR}(x)$ et γ. Alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \Phi^i(x)$ est inversement bien ordonné de type d'ordre strictement plus petit que $\omega^{\omega^{\lambda+2}}$.

La preuve est longue et technique.

Majoration de la longueur du support

Proposition

Soit x un surréel. Soit γ le plus petit ordinal tel que $\kappa_{-\gamma} \prec^K P(k_P)$ pour tout chemin $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(x)$. Soit λ le plus petit ε-nombre strictement supérieur à $\mathrm{NR}(x)$ et γ. Alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} \Phi^i(x)$ est inversement bien ordonné de type d'ordre strictement plus petit que $\omega^{\omega^{\lambda+2}}$.

La preuve est longue et technique.
Idée clé : l'étude par cas et le fait que les cas sont stables.

Un corps stable

Théorème

Soient α un ordinal limite et $\eta < \varepsilon_\alpha$. Soit $(\Gamma_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite de sous-groupes abéliens de **No** *telle que*

- $\forall\beta < \alpha \quad \forall\gamma < \beta \qquad \Gamma_\gamma \subseteq \Gamma_\beta$
- $\forall\beta < \alpha \qquad \omega^{(\Gamma_\beta)^*_+} \succ^K \kappa_{-\varepsilon_\beta}$
- $\forall\beta < \alpha \quad \forall\gamma < \varepsilon_\beta \qquad \kappa_{-\gamma} \in \omega^{\Gamma_\beta}$
- $\forall\beta < \alpha \quad \exists\eta_\beta < \varepsilon_\beta \quad \forall x \in \omega^{\Gamma_\beta} \qquad \mathrm{NR}(x) < \eta_\beta$

Alors $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{R}_{\varepsilon_\beta}^{\Gamma_\beta^{\uparrow\varepsilon_\beta}}$ *est stable par* exp, ln, ∂ *et anti-dérivée.*

Exemple

Pour $\alpha = \omega$ et $n < \omega$, posons

$$\Gamma_n = \{x \in \mathbf{No}_{<\varepsilon_n} \mid \mathrm{NR}(\omega^x) < \varepsilon_{n-1}\}$$

avec $\varepsilon_{-1} := \omega$. En appliquant le théorème précédent $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_{\varepsilon_n}^{\Gamma_n^{\uparrow \varepsilon_n}}$ est stable par exp, ln, ∂ et anti-dérivée.

Exemple

Pour $\alpha = \omega$ et $n < \omega$, posons

$$\Gamma_n = \{ x \in \mathbf{No}_{<\varepsilon_n} \mid \mathrm{NR}(\omega^x) < \varepsilon_{n-1} \}$$

avec $\varepsilon_{-1} := \omega$. En appliquant le théorème précédent $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_{\varepsilon_n}^{\Gamma_n^{\uparrow \varepsilon_n}}$ est stable par exp, ln, ∂ et anti-dérivée.

Remarquons que $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_{\varepsilon_n}^{\Gamma_n^{\uparrow \varepsilon_n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_{\varepsilon_n}^{\mathbf{No}_{<\varepsilon_n}^{\uparrow \varepsilon_n}}$$

Plan

Représentations

Représenter les nombres surréels

Plusieurs possibilités :

Représenter les nombres surréels

Plusieurs possibilités :

- La suite de signes

Représenter les nombres surréels

Plusieurs possibilités :

- La suite de signes
- Les séries de Hahn

Représenter les nombres surréels

Plusieurs possibilités :

- La suite de signes
- Les séries de Hahn (demande une notation des coefficients et des exposants)

Représenter les nombres surréels

Plusieurs possibilités :

- La suite de signes
- Les séries de Hahn (demande une notation des coefficients et des exposants)
- Une notation basée que la définition historique de Conway

Représenter les nombres surréels

Plusieurs possibilités :

- La suite de signes
- Les séries de Hahn (demande une notation des coefficients et des exposants)
- Une notation basée que la définition historique de Conway

Proposition

Toutes ces représentations sont toutes « équivalentes ». Les opérations de corps et l'ordre sont calculables.

Matthias Aschenbrenner, Lou van den Dries, and J. van der Hoeven.
Differentially algebraic gaps.
Selecta Mathematica, 11(2) :247–280, 2005.

Alessandro Berarducci and Vincenzo Mantova.
Surreal numbers, derivations and transseries.
Journal of the European Mathematical Society, 20(2) :339–390, Jan 2018.

D.H.J de Jongh and Rohit Parikh.
Well-partial orderings and hierarchies.
Indagationes Mathematicae (Proceedings), 80(3) :195 – 207, 1977.

Harry Gonshor.
An Introduction to the Theory of Surreal Numbers.
London Mathematical Society. Cambridge University Press, 1986.

Diana Schmidt.
Well-Partial Orderings and their Maximal Order Types, pages 351–391.
01 2020.

Lou van den Dries and Philip Ehrlich.
Fields of surreal numbers and exponentiation.
Fundamenta Mathematicae - FUND MATH, 167 :173–188, 01 2001.

Andreas Weiermann.
A computation of the maximal order type of the term ordering on finite multisets.
pages 488–498, 07 2009.

Plan

Détails

Pourquoi des bornes en $\omega^{\omega^{(\cdot)}}$?

Proposition ([7, Weiermann,corollaire 1])

Soient Γ un groupe abélien ordonné et $S \subseteq \Gamma_+$ un sous-ensemble bien ordonné de type d'ordre α. Alors le monoïde généré par S, $\langle S \rangle$, est bien lui-même bien ordonné avec pour type d'ordre au plus $\omega^{\widehat{\alpha}}$ où, en écrivant α en forme normale de Cantor

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} n_i$$

on a

$$\widehat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha'_i} n_i$$

et

$$\beta' = \begin{cases} \beta + 1 & \text{si } \beta \text{ est un } \varepsilon\text{-nombre} \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, $\langle S \rangle$ a pour type d'ordre au plus $\omega^{\omega\alpha}$ (où la multiplication est celle de Hessenberg).

Pourquoi des bornes en $\omega^{\omega^{(\cdot)}}$?

Théorème ([3, de Jongh, Parikh, théorème 3.11] et [5, Schmidt, théorème 2.9])

Soit $(X, \leq)$ *un ensemble bien ordonné de type d'ordre* α. *Soit* X^* *l'ensemble des suites finies* X. *Alors le type d'ordre de* X^*, β, *satisfait*

$$\beta \leq \begin{cases} \omega^{\omega^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \text{ est fini} \\ \omega^{\omega^{\alpha+1}} & \text{si } \varepsilon \leq \alpha < \varepsilon + \omega \text{ pour un certain } \varepsilon\text{-nombre } \varepsilon \\ \omega^{\omega^{\alpha}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Surreal operations : Addition, example

$$
\begin{array}{rcccl}
x & = & \omega + \frac{3}{4} & = & \left[\mathbb{N}, \omega, \omega + \frac{1}{2} \;\middle|\; \omega + 1\right] \\
y & = & -\frac{7}{2} & = & [-4 \mid 0, -1, -2, -3]
\end{array}
$$

Surreal operations : Addition, example

$$\begin{array}{rcccl} x & = & \omega + \frac{3}{4} & = & \left[\mathbb{N}, \omega, \omega + \frac{1}{2} \;\middle|\; \omega + 1 \right] \\ y & = & -\frac{7}{2} & = & [-4 \mid 0, -1, -2, -3] \end{array}$$

Then $$\begin{cases} L_x + y & = & \{-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, \ldots\} \\ x + L_y & = & \{\omega - \frac{13}{4}\} \\ R_x + y & = & \{\omega - \frac{5}{2}\} \\ x + R_y & = & \{\omega + \frac{3}{4}, \omega - \frac{1}{4}, \omega - \frac{5}{4}, \omega - \frac{9}{4}\} \end{cases}$$

Surreal operations : Addition, example

$$\begin{array}{rcccl} x & = & \omega + \frac{3}{4} & = & \left[\mathbb{N}, \omega, \omega + \frac{1}{2} \;\middle|\; \omega + 1\right] \\ y & = & -\frac{7}{2} & = & [-4 \mid 0, -1, -2, -3] \end{array}$$

Then $\left\{\begin{array}{rcl} L_x + y & = & \{-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, \ldots\} \\ x + L_y & = & \{\omega - \frac{13}{4}\} \\ R_x + y & = & \{\omega - \frac{5}{2}\} \\ x + R_y & = & \{\omega + \frac{3}{4}, \omega - \frac{1}{4}, \omega - \frac{5}{4}, \omega - \frac{9}{4}\} \end{array}\right.$

$$x + y = \left[\omega - \frac{13}{4} \;\middle|\; \omega - \frac{5}{2}\right]$$

Surreal operations : Addition, example

$$\begin{array}{ccccc} x & = & \omega + \frac{3}{4} & = & \left[\mathbb{N}, \omega, \omega + \frac{1}{2} \;\middle|\; \omega + 1\right] \\ y & = & -\frac{7}{2} & = & [-4 \mid 0, -1, -2, -3] \end{array}$$

Then $\left\{ \begin{array}{lcl} L_x + y & = & \{-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, \ldots\} \\ x + L_y & = & \{\omega - \frac{13}{4}\} \\ R_x + y & = & \{\omega - \frac{5}{2}\} \\ x + R_y & = & \{\omega + \frac{3}{4}, \omega - \frac{1}{4}, \omega - \frac{5}{4}, \omega - \frac{9}{4}\} \end{array} \right.$

$$x + y = \left[\omega - \frac{13}{4} \;\middle|\; \omega - \frac{5}{2}\right]$$

$$x + y = [(+)^{\omega} - - - - + + \mid (+)^{\omega} - - - +]$$

Surreal operations : Addition, example

$$\begin{array}{rcccl} x & = & \omega + \frac{3}{4} & = & \left[\mathbb{N}, \omega, \omega + \frac{1}{2} \;\middle|\; \omega + 1\right] \\ y & = & -\frac{7}{2} & = & [-4 \mid 0, -1, -2, -3] \end{array}$$

Then $\begin{cases} L_x + y & = & \{-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, \ldots\} \\ x + L_y & = & \{\omega - \frac{13}{4}\} \\ R_x + y & = & \{\omega - \frac{5}{2}\} \\ x + R_y & = & \{\omega + \frac{3}{4}, \omega - \frac{1}{4}, \omega - \frac{5}{4}, \omega - \frac{9}{4}\} \end{cases}$

$$x + y = \left[\omega - \frac{13}{4} \;\middle|\; \omega - \frac{5}{2}\right]$$

$$x + y = [(+)^\omega - - - - + + \mid (+)^\omega - - - +]$$

Basically we have to choose between

$$(+)^\omega - - - - + + + \qquad \text{and} \qquad (+)^\omega - - - + -$$

Surreal operations : Addition, example

$$\begin{aligned} x &= \omega + \tfrac{3}{4} &&= \left[\mathbb{N}, \omega, \omega + \tfrac{1}{2} \;\middle|\; \omega + 1 \right] \\ y &= -\tfrac{7}{2} &&= [-4 \mid 0, -1, -2, -3] \end{aligned}$$

Then $\begin{cases} L_x + y &= \{-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, \ldots\} \\ x + L_y &= \{\omega - \frac{13}{4}\} \\ R_x + y &= \{\omega - \frac{5}{2}\} \\ x + R_y &= \{\omega + \frac{3}{4}, \omega - \frac{1}{4}, \omega - \frac{5}{4}, \omega - \frac{9}{4}\} \end{cases}$

$$x + y = \left[\omega - \frac{13}{4} \;\middle|\; \omega - \frac{5}{2} \right]$$

$$x + y = [(+)^\omega - - - - + + \mid (+)^\omega - - - +]$$

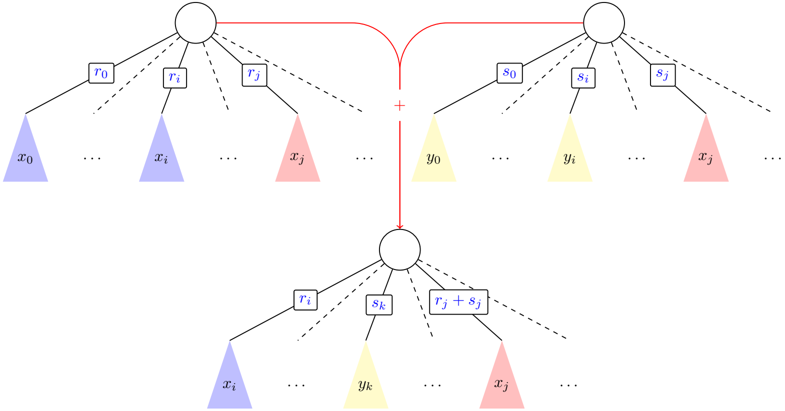
Basically we have to choose between

$$(+)^\omega - - - - + + + \qquad \text{and} \qquad (+)^\omega - - - + -$$

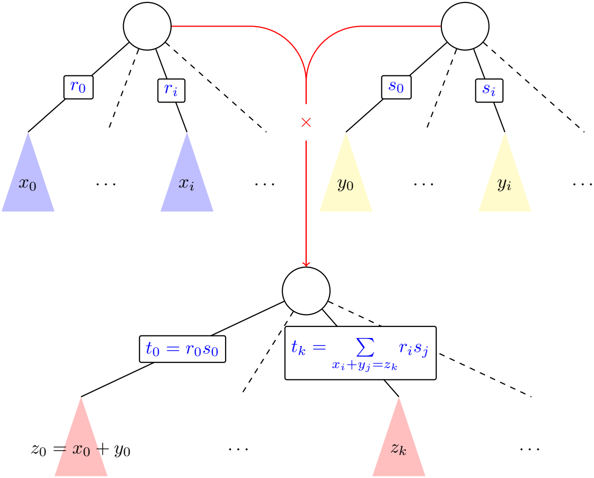
Simplicity property :

$$x + y = (+)^\omega - - - + - = \omega - \frac{11}{4}$$

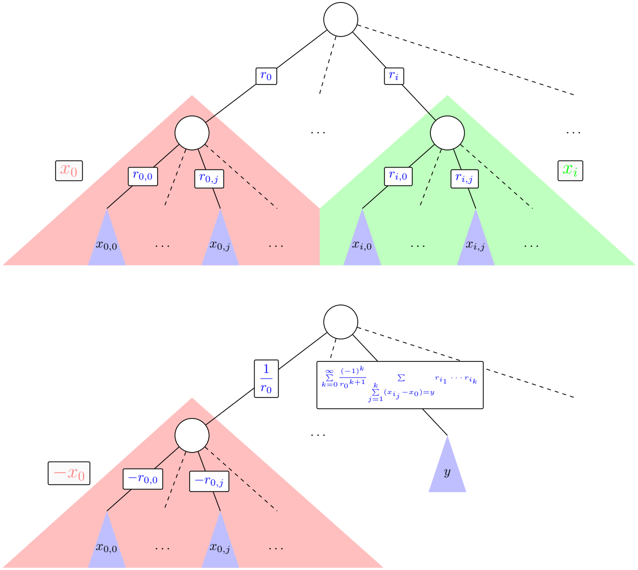
Addition



Multiplication

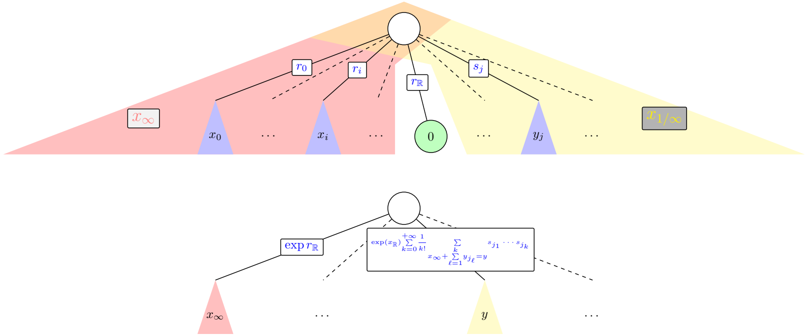


Inverse



r_0
r_i
$\dots$
$\dots$
x_0
$r_{0,0}$
$r_{0,j}$
$r_{i,0}$
$r_{i,j}$
x_i
$x_{0,0}$ $\dots$ $x_{0,j}$ $\dots$
$x_{i,0}$ $\dots$ $x_{i,j}$ $\dots$
$\frac{1}{r_0}$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{r_0{}^{k+1}} \sum_{\sum_{j=1}^{k}(x_{i_j}-x_0)=y} r_{i_1} \cdots r_{i_k}$
$\dots$
$-x_0$
$-r_{0,0}$
$-r_{0,j}$
y
$x_{0,0}$ $\dots$ $x_{0,j}$ $\dots$

Exponentielle



Étude du cas $\varepsilon \preceq \ln u$

Lemme

Supposons que $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon = r \ln u + \eta$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$. *Soit* $b \in \operatorname{supp} \Phi(\omega^a)$. *Alors il existe un chemin* $P \in \mathcal{P}(\eta)$ *tel que*

$$\omega^b \asymp \partial u \exp \left(r \ln u + \eta - \sum_{m=n+2}^{+\infty} \ln_m \kappa_{-\alpha} - \sum_{\substack{\beta > \alpha,\, m \in \mathbb{N}^* \\ \beta \mid \kappa_{-\beta} \succeq^K P(k_P)}} \ln_m \kappa_{-\beta} + \sum_{i=0}^{+\infty} \ln |P(i)| \right)$$

Étude du cas $\varepsilon \preceq \ln u$

Proposition

Supposons que $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon = r \ln u + \eta$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$. *Il existe un ensemble* E *définissable à partir de* η *tel que pour* $b \in \bigcup_{\ell=0}^{+\infty} \operatorname{supp} \Phi^\ell(\omega^a)$, *il existe* $y \in \langle E \rangle$ *tel que*

$$\omega^b \asymp \partial u \exp(r \ln u + \eta + y)$$

Étude du cas $\varepsilon \preceq \ln u$

Proposition

Supposons que $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon = r \ln u + \eta$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$*. Il existe un ensemble* E *définissable à partir de* η *tel que pour* $b \in \bigcup_{\ell=0}^{+\infty} \operatorname{supp} \Phi^\ell(\omega^a)$*, il existe* $y \in \langle E \rangle$ *tel que*

$$\omega^b \asymp \partial u \exp(r \ln u + \eta + y)$$

Soit γ *le plus petit ordinal tel que* $\kappa_{-\gamma} \prec^K P(k_P)$ *pour tout chemin* $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(\eta)$*. Soit* λ *le plus petit* ε*-nombre strictement supérieur à* $\mathrm{NR}(x)$ *et* γ *alors* E *est inversement bien ordonné avec pour type d'ordre au plus* $2\lambda + \omega(\gamma+1)$*, puis,* $\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} \operatorname{supp} \Phi^\ell(\omega^a)$ *est inversement bien ordonné de type d'ordre au plus* $\omega^{\omega(2\lambda+\omega(\gamma+1)+1)}$.

Étude du cas $\varepsilon \succ \ln u$

Lemme

Soit $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \succ \ln u$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$*. Soit* $b \in \operatorname{supp} \Phi(\omega^a)$*.*
Alors, l'un des cas suivants est vérifié :

- *Il existe un chemin* $P \in \mathcal{P}(\eta)$ *et* $i \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\omega^b \asymp \partial u \exp \left(\varepsilon - \sum_{\substack{\beta \geq \alpha,\, m \in \mathbb{N}^* \\ \beta \,\mid\, P_0(k_{P_0}) \succ^K \kappa_{-\beta} \succeq^K P(k_P)}} \ln_m \kappa_{-\beta} + \sum_{j=0}^{+\infty} \ln \left| \frac{P(i+j)}{P_0(j)} \right| \right)$$

et $\qquad \forall j \in [\![0\ ;\ i-1]\!] \qquad P(j) = P_0(j)$

Étude du cas $\varepsilon \succ \ln u$

Lemme

Soit $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \succ \ln u$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$. *Soit* $b \in \operatorname{supp} \Phi(\omega^a)$.
Alors, l'un des cas suivants est vérifié :

- ...
- *Il existe un couple* $(\beta, m) <_{lex} (\alpha, n)$ *tel qu'il existe* $\eta \prec \ln_m \kappa_{-\beta}$ *tel que* $\omega^b \asymp \partial(\ln_m \kappa_{-\beta}) \exp \eta$ *avec* $\eta = \varepsilon + \eta'$ *et* η' *dépendant uniquement de* α, β, n, m *et* P_0*, le chemin dominant* ε *:*

$$\eta' = \sum_{\substack{(\zeta, p) >_{lex} (\beta, m) \\ \zeta \,|\, \kappa_{-\zeta} \succeq^K P_0(k_{P_0})}} \ln_p \kappa_{-\zeta} - \sum_{(\beta,m) <_{lex} (\zeta,p) <_{lex} (\alpha,n)} \ln_p \kappa_{-\zeta} - \sum_{i=0}^{+\infty} \ln |P_0(i)|$$

ou

$$\eta' = \sum_{\substack{(\zeta, p) \geq_{lex} (\alpha, n) \\ \zeta \,|\, \kappa_{-\zeta} \succeq^K P_0(k_{P_0})}} \ln_p \kappa_{-\zeta} - \sum_{i=0}^{+\infty} \ln |P_0(i)|$$

Étude du cas $\varepsilon \succ \ln u$

Proposition

Supposons que $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \succ \ln u$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$. *Il existe des ensembles* $E^{(\beta,m)}$ *et définissables à partir de* ε, β *et* m, *avec* $(\beta, m) \leq_{lex} (\alpha, n)$, *et* $H^{(\beta,m)}$ *finis définissables à partir du chemin dominant de* ε, *de* β *et de* m, *tels que pour* $b \in \bigcup_{q=0}^{+\infty} \operatorname{supp} \Phi^q(\omega^a)$, *il existe* $\eta \in H^{(\beta,m)}$ *et* $y \in \left\langle E^{(\beta,m)} \right\rangle$ *tels que*

$$\omega^b \asymp \partial(\ln_m \kappa_{-\beta}) \exp(\varepsilon + \eta + y)$$

pour un certain couple $(\beta, m) \leq_{lex} (\alpha, n)$.

Étude du cas $\varepsilon \succ \ln u$

Proposition

Supposons que $x = \omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \succ \ln u$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$. *Il existe des ensembles* $E^{(\beta,m)}$ *et définissables à partir de* ε, β *et* m, *avec* $(\beta, m) \leq_{lex} (\alpha, n)$, *et* $H^{(\beta,m)}$ *finis définissables à partir du chemin dominant de* ε, *de* β *et de* m, *tels que pour* $b \in \bigcup_{q=0}^{+\infty} \operatorname{supp} \Phi^q(\omega^a)$, *il existe* $\eta \in H^{(\beta,m)}$ *et* $y \in \left\langle E^{(\beta,m)} \right\rangle$ *tels que*

$$\omega^b \asymp \partial(\ln_m \kappa_{-\beta}) \exp(\varepsilon + \eta + y)$$

pour un certain couple $(\beta, m) \leq_{lex} (\alpha, n)$.

Corollaire

Supposons que $\omega^a = \partial u \exp \varepsilon$ *avec* $\varepsilon \succ \ln u$ *et* $u = \ln_n \kappa_{-\alpha}$. *Soit* γ *le plus petit ordinal tel que* $\kappa_{-\gamma} \prec^K P(k_P)$ *pour tout chemin* $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(\varepsilon)$. *Soit* λ *le plus petit* ε*-nombre strictement supérieur à* $\mathrm{NR}(x)$ *et* γ. *Alors,* $\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} \operatorname{supp} \Phi^\ell(\omega^a)$ *est inversement bien ordonné de type d'ordre au plus* $\omega^{\omega(2\lambda+\omega(\gamma+1)+1)}$.

Relations sur les ordres de grandeur

Définition

Pour $x = \sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$ et $y = \sum_{i<\nu'} s_i \omega^{b_i}$,

- $x \prec y \iff y \neq 0 \wedge (x = 0 \vee a_0 < b_0)$
  $\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad n|x| < |y|$
- $x \asymp y \iff (x = y = 0) \vee (a_0 = b_0)$
  $\iff \exists n \in \mathbb{N} \quad -n|x| \leq |y| \leq n|x|$
- $x \preceq y \iff x \prec y \vee x \asymp y$
  $\iff \exists n \in \mathbb{N} \quad |x| \leq n|y|$
- $x \sim y \iff (x = y = 0) \vee (a_0 = b_0 \wedge r_0 = s_0)$
  $\iff x - y \prec 1$

Dérivée d'un log-atomique

Définition

Soit $x \in \mathbb{L}$.

$$\partial_{\mathbb{L}} x = \exp\left(- \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ \beta \mid \kappa_{-\beta} \succeq^{K} x}} \ln_m \kappa_{-\beta} + \sum_{m \in \mathbb{N}} \ln_m x \right)$$

Chemins

Définition

Soit x un surréel. Un chemin de x est une suite telle que

- $P(0)$ est un terme de x
- $P(n+1)$ est un terme purement infiniment grand de $\ln|P(n)|$.

On note $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des chemin de x.

Chemins

Définition

Soit x un surréel. Un chemin de x est une suite telle que

- $P(0)$ est un terme de x
- $P(n+1)$ est un terme purement infiniment grand de $\ln|P(n)|$.

On note $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des chemin de x.
Chemin dominant de x : P tel que $P(0)$ est le terme dominant de x et pour tout entier n, $P(n+1)$ est le terme dominant de $\ln|P(n)|$.

Dérivée d'un chemin

Définition (Berarducci, Mantova, [2, définition 6.13])

Soit P un chemin. On définit la quantité $\partial P \in \mathbb{R}\omega^{\mathbf{No}}$ par

$$\partial P = \begin{cases} P(0) \cdots P(k-1) \partial_{\mathbb{L}} P(k) & P(k) \in \mathbb{L} \\ 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} & P(k) \notin \mathbb{L} \end{cases}$$

Notation

Soit
$$\mathcal{P}_{\mathbb{L}}(x) = \{ P \in \mathcal{P}(x) \mid \partial P \neq 0 \}$$
k_P désigne le pus petit entier tel que $P(k_P) \in \mathbb{L}$.

Dérivée d'un surréel

Définition (Berarducci, Mantova [2, définition 6.21])

Pour x un surréel, $$\partial x = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(x)} \partial P$$

Troncature

Définition (Berarducci and Mantova, [2], définition 4.3)

- $x \trianglelefteq_0 y$ si $x = \sum_{i<\nu} r_i \omega^{a_i}$ et $y = \sum_{i<\nu'} r_i \omega^{a_i}$ quand $\nu < \nu'$.
- $x \trianglelefteq_{n+1} y$ s'il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{J}^*$ tels que $x = u + \operatorname{sign}(r)\exp(\gamma)$ et $y = u + r\exp(\delta) + v$ où $\operatorname{supp} u \succ \exp\gamma$, $\operatorname{supp} u \succ \exp\delta \succ v$, $r \in \mathbb{R}$ et $\gamma \trianglelefteq_n \delta$.

$x \trianglelefteq y$ *ssi* $x \trianglelefteq_n y$ pour un certain entier naturel n.