Quelques outils de calcul formel pour les récurrences

Frédéric Chyzak

journée « ANR Différences » du 6 septembre 2021

Quelques sujets de cette présentation

- Complexité du calcul des termes d'une suite
- Résolution dans des classes bien identifiées
- Les récurrences, une bonne structure de données
- Polynomialisation des récurrences

- Algorithmes : seront suggérés, mais pas explicités
- Absents : factorisation d'équations linéaires, récurrences non linéaires, théorie de Galois à différence, récurrences selon l'écriture en chiffres…
- Remarque : une partie se transpose au monde différentiel

Première partie

Motivations

Quelques problèmes qui ont une solution algorithmique

Est-il vrai que $u_n := \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \right)^3 = \frac{n}{2} 8^n + 8^n - \frac{3n}{4} 2^n \binom{2n}{n}$?

[Oui : résoudre $(n+2)u_{n+3} - 12(2n+3)u_{n+2} + 192(n+1)u_{n+1} - 256(2n+1)u_n = 0$.]

La somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ peut-elle s'exprimer comme quotient de puissances et factorielles ?

[Non : montrer l'absence de solutions rationnelles d'une récurrence auxiliaire.]

Que vaut le coefficient de X^{2N} dans $p := (1 - X + X^2 + 2X^3 - 5X^4)^N$ pour $N = 202122$?

[Ça se fait : trouver une récurrence sur les coefficients c_k de p et calculer juste c_N.]

Le nombre $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$ peut-il s'écrire p/q pour des entiers p et q ?

[Oui : une étape cruciale est de trouver une récurrence commune à deux sommes.]

Theorem (Apéry, 1978)

$\zeta(3) := 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots \notin \mathbb{Q}$. « $\zeta(3)$ est irrationnel ».

Preuve : Les deux suites

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \right)$$

$$\text{et} \qquad b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

satisfont à

$$n^3 a_n - (2n-1)(17n^2 - 17n + 5) a_{n-1} + (n-1)^3 a_{n-2} = 0 \qquad (n \geq 2).$$

À l'ordinateur, cette récurrence peut être :

- *devinée de façon non prouvée une fraction de seconde,*
- *découverte de façon prouvée, en quelques secondes pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en une fraction de seconde pour $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$!*

Séries génératrices

suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	série formelle $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$
récurrence à coefficients constants	série « rationnelle », $A = P/Q$
récurrence à coefficients polynomiaux en n	équa. diff. à coefficients polynomiaux en X

(équations linéaires)

Deuxième partie

Complexité du calcul des termes d’une suite

Récurrences à coefficients constants, suites récurrentes linéaires

Définition

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels est une *suite récurrente linéaire* d'ordre d si elle vérifie une récurrence donnée par des rationnels p_i fixés sous la forme

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+d} = p_{d-1}a_{n+d-1} + \cdots + p_0 a_n.$$

$P = X^d - p_{d-1}X^{n+d-1} - \cdots - p_0$ est un *polynôme caractéristique* de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

- la suite de Fibonacci (ordre 2) : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$
- toute suite $(uM^n v)_{n\in\mathbb{N}}$ pour une ligne u, une matrice M, et une colonne v fixées,
- toute suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour un polynôme fixé F,
- la suite des longueurs de la suite *Look-and-Say* de Conway (ordre 72) :

$$|1| = 1,\ |11| = 2,\ |21| = 2,\ |1211| = 4,\ |111221| = 6,$$
$$|312211| = 6,\ |13112221| = 8,\ |1113213211| = 10,\ \ldots$$

Calcul du n-ième terme (complexité arithmétique)

par calcul direct selon la récurrence $O(dn)$

$$a_n = p_{d-1}a_{n-1} + \cdots + p_0 a_{n-d}$$

par représentation matricielle et exponentiation binaire $O(\mathrm{MM}(d)\ln n)$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1-d} & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-d} & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} C, \qquad C^n = \dots$$

par représentation modulo un polynôme et exponentiation modulaire $O(\mathrm{M}(d)\ln n)$

$$a_{n+1-d}\cdot 1 + \cdots + a_n \cdot x^{d-1} = \operatorname{rem}\left((a_{n-d}\cdot 1 + \cdots + a_{n-1}\cdot x^{d-1})\cdot x, P\right), \qquad \operatorname{rem}(x^n, P) = \dots$$

$\boxed{\text{Trois représentations du décalage}}$

$$dn \quad \to \quad d^{2,81}\ln n \quad \to \quad d\ln d \ln n$$

Calcul des n premiers termes (complexité arithmétique)

interprétation comme série rationnelle et méthode de Newton $O(\mathsf{M}(n))$

- d non fixé, bon sous la contrainte $d \leq n$
- pour la série génératrice $A = Q/P$, on introduit la suite d'approximations $U_{k+1} := \mathrm{rem}(2U_k - U_k P U_k, X^{2^k})$

utilisation directe de la récurrence $O(dn)$

- mieux que Newton pour d fixé

par calcul (modulaire) de tranches successives de longueur d $O(n\mathsf{M}(d)/d)$

- d fixé
- multiplications successives modulo P par $\mathrm{rem}(x^d, P)$

$$n \ln n \quad \to \quad dn \quad \to \quad n \ln d$$

Récurrences à coefficients polynomiaux, suites P-récursives

Définition (venue du folklore combinatoire)

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels est *polynomialement récursive (P-récursive)* si elle vérifie une équation de récurrence linéaire pour des coefficients fixés p_j de $\mathbb{Q}[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_r(n)a_{n+r} + \cdots + p_0(n)a_n = 0.$$

$$r = \text{ordre} \qquad d = \max_i \deg p_i = \text{degré}$$

Propriété (Stanley, 1980)

Ce sont exactement les suites de coefficients de séries génératrices $A(X)$ *différentiellement finies (D-finies)*, c'est-à-dire vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en X :

$$q_s(X)A^{(s)}(X) + \cdots + q_0(X)A(X) = 0.$$

Calcul du n-ième terme (complexité binaire)

par calcul direct selon la récurrence $O(rn^2 \mathsf{M}_{\mathbb{Z}}(d \ln n))$

les multiplications déséquilibrées nous pénalisent

par factorielle de matrice et scindage binaire $O(\mathsf{MM}(r)\mathsf{M}_{\mathbb{Z}}(dn \ln n) \ln n)$

- la matrice C dépend de n et on voudrait $C(n-1) \cdot C(n-2) \cdot \dots \cdot C(0)$
- calcul récursif du produit $P(a, b) := C(b-1) \cdot C(b-2) \cdot \dots \cdot C(a)$ sous la forme $P(a, b) = P(a, m)P(m, b)$ pour $m = \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$

formule de Stirling : $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + O(1)$, quand $n \to \infty$

$$\boxed{\text{taille binaire de } a_n = O(dn \ln n + \ln r)}$$

$$rdn^2 \ln d \ln n \quad \to \quad r^{2,81} dn \ln^2 n \ln(dn)$$

Applications : fast high-precision computation of constants

Many constants

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \pi = 4 \operatorname{atan}(1) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{4}{2p+1},$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{53360\sqrt{640320}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!\,(13591409 + 545140134n)}{n!^3 (3n)!\,(8 \cdot 100100025 \cdot 327843840)^n} \qquad \text{(Chudnovsky}\times\text{2, 1987).}$$

$e = \exp(1)$ to 10^{-N} — $O(\mathsf{M}_{\mathbb{Z}}(N) \ln N)$

Define $e_n = 1 + \cdots + 1/n!$, so that $0 < e - e_n < 1/(n\,n!)$.
From $e_{n+1} - e_n = 1/(n+1)!$ follows $(n+2)e_{n+2} - (n+3)e_{n+1} + e_n = 0$, then

$$\begin{pmatrix} e_{n+1} \\ e_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+2} \begin{pmatrix} 0 & n+2 \\ -1 & n+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ e_{n+1} \end{pmatrix}.$$

As $n = O(N/\ln N)$ is enough, the complexity follows.

Much more involved : evaluation of (D-finite) functions at *any* point of the complex plane (requires controlled analytic continuation).

A glimpse to inequality decision problems

(Kenison, Klurman, Lefaucheux, Luca, Moree, Ouaknine, Whiteland, Worrell, 2021)

For sequences $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ given by second-order recurrences with coefficients in $\mathbb{Q}(n)$, the Positivity Problem reduces to the Minimality Problem.

Positivity : $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$.

Minimality : for all $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution to the same recurrence, if (u_n) and (v_n) are independent over $\mathbb{Q}$ and u_n/v_n tends to 0, then (u_n) is *minimal*.

Troisième partie

Résolution dans des classes bien identifiées

Small equations can have very large polynomial/rational solutions

Two equations

$$(3n^2 - 12115n + 12231101)\, y_1(n+1) = (3n^2 + 11n + 9)\, y_1(n)$$

$$(3n^2 + 11n + 9)\, y_2(n+1) = (3n^2 - 12115n + 12231101)\, y_2(n)$$

Two solutions

$$y_1(n) = (3n^2 + 5n + 1)^{\underline{2021}} = \langle 12561D \rangle + \cdots + \langle 965D \rangle n^{4042}$$

$$y_2(n) = \left((3n^2 + 5n + 1)^{\underline{2021}} \right)^{-1} = \frac{1}{\langle 12561D \rangle + \cdots + \langle 965D \rangle n^{4042}}$$

$$u^{\underline{k}} = u(u-1)\dots(u-k+1) \quad \text{“falling factorial”}$$

$\boxed{\text{“Hidden” parameter } N \rightarrow \text{sols with degree } O(N) + \text{coeffs of size } O(N \log N)}$

The general solving strategy

Solve a linear recurrence equation for its *rational solutions* $y(n) = \frac{N(n)}{D(n)}$

$\downarrow$

Find a common multiple $B(n)$ of their denominators $D(n)$ ("denominator bound")

$\downarrow$

Change of unknown function, from $y(n)$ to $P(n) = B(n)y(n)$

$\downarrow$

Solve a linear recurrence equation for its *polynomial solutions* $P(n)$

$\downarrow$

Choose a suitable polynomial basis ("binomial basis"), $P(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \binom{n}{k}$

$\downarrow$

Solve a linear *recurrence* equation for its *solutions* (c_k) *with finite support*

Possibly represent solutions without expanding them !
"compact representation"

Supports finis, bornes sur les degrés, bornes sur les dénominateurs

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ q_s(k)c_{k+s} + \cdots + q_0(k)c_k = 0$$

Borne supérieure/Borne sur les degrés

Si $c_K \neq 0$ et $0 = c_{K+1} = c_{K+2} = \ldots$, alors K est un zéro entier de $q_0(k)$.

Borne inférieure

Si $c_K \neq 0$ et $0 = c_{K-1} = c_{K-2} = \ldots$, alors K est un zéro entier de $q_s(k-s)$.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ p_r(n)y(n+r) + \cdots + p_0(n)y(n) = 0$$

Borne sur le dénominateur (Abramov, 1995)

- Idée de base (incomplète) : $D(n) \mid p_0(n),\ D(n+r) \mid p_r(n)$.
- Repose sur l'étude des différences entières entre zéros de $p_0(k)$ et $p_r(k-r)$.
- Calculs par résultants et pgcd.

Suites hypergéométriques

Définition (cas particulier des suites polynomialement récursives)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *hypergéométrique* (à coefficients dans $\mathbb{C}$) s'il existe deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\; Q(n)u_{n+1} = P(n)u_n.$$

Exemples

- $\gamma^{n+1} = \gamma \cdot \gamma^n$ for each fixed $\gamma \in \mathbb{C}$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
- $u_n = \binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ satisfies $(n+1)^2 \cdot u_{n+1} = (2n+1) \cdot u_n$

Hypergeometric solutions of a recurrence : the problem

The problem

Find all hypergeometric-term solutions $u(n)$ of a given linear recurrence equation

$$a_r(n)u(n+r) + \cdots + a_0(n)u(n) = 0.$$

$$u(n+1) = \frac{P(n)}{Q(n)}u(n) \quad \to \quad u(n+\ell) = \frac{P(n+\ell-1)}{Q(n+\ell-1)} \cdots \frac{P(n)}{Q(n)}u(n)$$

Necessarily,

$$a_r(n)\underbrace{P(n+r-1)P(n+r-2)\cdots P(n)}_{\text{only term without } Q(n+r-1)} + \cdots + a_0(n)\underbrace{Q(n+r-1)\cdots Q(n)}_{\text{only term without } P(n)} = 0,$$

so we need to consider all $\gcd\big(P(n), Q(n+\ell)\big)$, which are too loosely constrained.

Gosper–Petkovšek decomposition, Petkovsek's algorithm (1992)

Lemma (Petkovsek, 1992)

Given a rational function $P/Q \in \mathbb{C}(n)$, there exists a unique tuple $(\zeta, A, B, C) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}[n]^3$ with monic A, B, and C, and satisfying

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \zeta \frac{A(n)}{B(n)} \frac{C(n+1)}{C(n)},$$

with $\gcd\big(A(n), C(n)\big) = \gcd\big(B(n), C(n+1)\big) = \gcd\big(A(n), B(n+i)\big) = 1$ for $i \in \mathbb{N}$.

Combining

$$\zeta^r a_r(n) \underbrace{A(n+r-1)A(n+r-2)\cdots A(n)C(n+r)}_{\text{only term without } B(n+r-1)} + \cdots + a_0(n) \underbrace{B(n+r-1)\cdots B(n)C(n)}_{\text{only term without } A(n)} = 0,$$

with $\gcd\big(A(n), C(n)\big) = \gcd\big(B(n), C(n+1)\big) = \gcd\big(A(n), B(n+i)\big) = 1$ for $i \in \mathbb{N}$ yields

$$A(n) \mid a_0(n), \qquad B(n+r-1) \mid a_r(n).$$

Exponential algorithm : for each choice of A and B, solve for C (and ζ).

Quatrième partie

Les récurrences, une bonne structure de données

Identités de Cassini–Catalan–Vajda sur les nombres de Fibonacci

$$\begin{aligned}
&\text{(Cassini)} && \forall n \in \mathbb{Z}, \quad F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \\
&\text{(Catalan)} && \forall n, r \in \mathbb{Z}, \quad F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2 \\
&\text{(Vajda)} && \forall i, j, k \in \mathbb{Z}, \quad F_{k+i}F_{k+j} - F_kF_{k+i+j} = (-1)^k F_iF_j
\end{aligned}$$

Preuve de l'identité de Cassini par calcul

Définitions/Modélisation :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1$$

$$S_{n+1} = -S_n, \qquad S_0 = 1$$

$$Z_n := F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 + S_n$$

Preuve :

$$Z_n = -F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1} + F_n^2 + S_n$$

$$Z_{n+1} = F_{n+1}^2 - F_nF_{n+1} - F_n^2 + S_n$$

$$Z_{n+1} + Z_n = 0, \qquad Z_0 = 0$$

$\boxed{\text{Peut-on généraliser au cas à coefficients non constants ?}}$

$$p_d(n)a_{n+d} + \cdots + p_0(n)a_n = 0 \longrightarrow a_{n+d} = \ast\, a_{n+d-1} + \cdots + \ast\, a_n$$

$$a_{n+d+1} = \ast\, a_{n+d} + \cdots + \ast\, a_{n+1} = \ast\, a_{n+d-1} + \cdots + \ast\, a_n, \quad \text{and so on}$$

Addition

Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be given by linear recurrences of respective orders r and s. For $0 \le i \le r+s$, write :

$$f_{n+i} + g_{n+i} = \ast\, f_n + \cdots + \ast\, f_{n+r-1} + \ast\, g_n + \cdots + \ast\, g_{n+s-1}.$$

Find a linear dependency by (polynomial) linear algebra in dimension $r+s$.

Product

Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be given by linear recurrences of respective orders r and s. For $0 \le i \le rs$, write :

$$f_{n+i}g_{n+i} = \ast\, f_n g_n + \cdots + \ast\, f_{n+r-1}g_n + \cdots + \ast\, f_n g_{n+s-1} + \cdots + \ast\, f_{n+r-1}g_{n+s-1}.$$

Find a linear dependency by (polynomial) linear algebra in dimension rs.

Plus sur les algorithmes de clôtures

Algorithmes complets : tenir compte des conditions initiales (premiers termes).

Analogues multivariés : a besoin du formalisme qui suit
(bases de Gröbner non commutatives).

Cinquième partie

Polynomialisation des récurrences

Polynomialisation des récurrences univariées (linéaires)

Exemple : des équations pour $n!$,

$$u(n+1) - (n+1)u(n) = 0,$$

$$2nu(n+1) - 2n(n+1)u(n) = 0, \qquad 3u(n+2) - 3(n+2)u(n+1) = 0,$$

$$3u(n+2) - (n+5)u(n+1) - (2n+1)(n+1)u(n) = 0,$$

et les « opérateurs » linéaires qui vont avec,

$$S - (n+1),$$

$$2nS - 2n(n+1) = (2n)(S - (n+1)), \qquad 3S^2 - 3(n+2)S = (3S)(S - (n+1)),$$

$$3S^2 - (n+5)S - (2n+1)(n+1) = (3S + 2n + 1)(S - (n+1)).$$

Relation de commutation entre « multiplication par n » et « décalage S » :

$$(Sn)(u(n)) = S(nu(n)) = (n+1)u(n+1) = (n+1)S(u(n)) \quad \to \quad Sn = (n+1)S$$

$\mathbb{Q}(n)\langle S\rangle$: polynômes « tordus » (« skew ») en la variable S, à coefficients dans $\mathbb{Q}(n)$ (fractions rationnelles en n).

Pgcd de polynômes tordus (Ore, 1933)

Polynômes classiques de $\mathbb{Q}[X]$

- division euclidienne : $6 \cdot X^{21} + \cdots = (3 \cdot X^7 + \cdots)(2 \cdot X^{14} + \cdots) + (* \cdot X^{13} + \cdots)$
- algo. d'Euclide : pgcd = dernier reste non nul de la suite de divisions euclidiennes
- pgcd : $p = ag$, $q = bg$; idéaux : $(g) = (p) + (q)$; solutions : $\mathrm{S}(g) = \mathrm{S}(p) \cap \mathrm{S}(q)$
- relation de Bézout : $g = up + vq$; si $g = 1$, v est un inverse modulo p
- ppcm : $l = sp = tq$; idéaux : $(l) = (p) \cap (q)$; solutions : $\mathrm{S}(l) = \mathrm{S}(p) \cup \mathrm{S}(q)$

Polynômes tordus de $K\langle S\rangle$ pour $K = \mathbb{Q}(n)$

- division euclidienne *à droite* :
  $2n(n+17) \cdot S^{21} + \cdots = (2n \cdot S^7 + \cdots)((n+10) \cdot S^{14} + \cdots) + (* \cdot S^{13} + \cdots)$
- algo. d'Euclide, pgcd *à droite*, idéaux *à gauche*, ppcm *à gauche*, inverse *à gauche*
- solutions dans des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$: $\mathrm{S}(g) = \mathrm{S}(p) \cap \mathrm{S}(q)$, $\mathrm{S}(l) = \mathrm{S}(p) + \mathrm{S}(q)$

Application à la clôture par addition

Le ppcm de deux polynômes tordus annule toute somme de solutions de l'un et l'autre.

Polynomialisation des récurrences multivariées (linéaires)

Pour des suites $(u_{n,k})_{n,k}$, on introduit une algèbre où :

$$S_n n = (n+1) S_n, \qquad S_k k = (k+1) S_k$$

Deux choix (selon les besoins de l'application) :

coefficients rationnels	coefficients polynomiaux
$\mathbb{Q}(n,k)\langle S_n, S_k\rangle$	$\mathbb{Q}[n,k]\langle S_n, S_k\rangle$

$\boxed{\longrightarrow \text{ généralisation non commutative de la théorie des bases de Gröbner}}$

Exemple de sommation par élimination polynomiale non commutative

Soit à montrer

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{n,k} = U_n, \qquad \text{par exemple} \qquad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{n}$$

$$(k-2n-1)^2(k-2n-2)^2 u_{n+1,k} + 4(n+1)^2(2n+1)^2 u_{n,k} = 0$$

$$(k+1)^2 u_{n,k+1} + (k-2n)^2 u_{n,k} = 0$$

$$(k^4 - 8k^3n + 24k^2n^2 - 32kn^3 + 16n^4 + \cdots)S_n + (16n^4 + \cdots)$$

$$(k^2+2k+1)S_k + (k^2 - 4kn + 4n^2)$$

Par élimination non commutative de k dans $\mathbb{Q}[n,k]\langle S_n, S_k\rangle$, on trouve :

$$(4n+3)(2n+3)(n+2)S_n^2 - (\ldots)S_n + 16(4n+7)(2n+1)(n+1) + (S_k - 1)(\text{poly}(n,k,S_n))$$

$$(4n+3)(2n+3)(n+2)u_{n+2,k} - (\ldots)u_{n+1,k} + 16(4n+7)(2n+1)(n+1)u_{n,k} = \text{☁}_{n,k+1} - \text{☁}_{n,k}$$

Après sommation pour k sur $\mathbb{Z}$, il reste juste à résoudre l'équation :

$$(4n+3)(2n+3)(n+2)U_{n+2} - 2(4n+5)(8n^2+20n+11)U_{n+1} + 16(4n+7)(2n+1)(n+1)U_n = 0$$

Plus sur la sommation

Sommation par bases de Gröbner

Pas complètement algorithmique, et très lent tel que décrit.

Sommation par l'algorithme de Zeilberger (1991) et variantes

- Trouve ☁$_{n,k}$ par résolution rationnelle d'une équation auxiliaire.
- On peut vouloir éviter de calculer ☁$_{n,k}$, qui est très gros, pour le jeter ensuite.
  Divers travaux en cours (Bostan, Chyzak, Lairez, Salvy ; van der Hoeven ; ...).

Sommation des « sommes binomiales » (Bostan, Lairez, Salvy, 2016)

Développe un calcul efficace par représentation des séries génératrices de sommes binomiales comme termes constants de fractions rationnelles.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}t^n = \mathrm{Cst}_{z_1,z_2}\,\frac{1+z_2}{1+z_1-z_1z_2}\left(1-t\frac{(1+z_1)(1+z_2)^2}{z_1z_2}\right)^{-1}$$

Sixième partie

Conclusion

Conclusion

Analogue en différentiel

- mène à des algorithmes d'intégration symbolique pour les intégrales paramétrées

Récurrences selon l'écriture en chiffres

- opérateur de Mahler ($y(x) \mapsto y(x^2)$) / opérateurs de section (parties paire/impaire)
- dichotomie rationnel/transcendant
- lien avec la théorie des automates
- intérêt de la communauté des théories de Galois des équations fonctionnelles