SCHNYDER WOODS FOR HIGHER GENUS SURFACES, WITH APPLICATIONS TO GRAPH DRAWING

(SUJET DE STAGE, 2023-24)

LUCA CASTELLI ALEARDI (LIX)

Abstract. L'objet de ce stage sera l'étude combinatoire et algorithmique d'une certaine classe de propriétés caractérisant la notion de planarité des graphes: ces propriétés (connues sous le nom de *forêts de Schnyder*) ont eu dans les trois dernières décennies des fortes répercussions et ont conduit à de nombreuses applications dans plusieurs domaines, notamment le dessin et le codage de graphes. Dans ce stage il s'agira d'étudier les généralisations de ces propriétés et leurs applications au cas de graphes plongés sur des surfaces: en particulier on s'intéressera au problème de dessiner un graphe de genre g sur une grille planaire avec resolution polynomiale (ce problème est ouvert pour $g \geq 2$). Un problème crucial sera celui de fournir une définition satisfaisante, permettant de bien décrire et caractériser la structure des graphes plongés sur des surfaces: cela nous conduira ainsi à explorer des questions très profondes et intéressantes faisant intervenir des propriétés topologiques, combinatoires et algorithmiques de ces objets.

Thématiques: combinatoire, algorithmique, graphes.
Laboratoire d'accueil: LIX (Ecole Polytechnique), équipe "Combinatoire".
Responsables: Luca Castelli Aleardi (`amturing@lix.polytechnique.fr`).

Ordres canoniques et forêts de Schnyder

Les *forêts de Schnyder* (et les *ordres canoniques* qui y sont associés) fournissent des jolies structures combinatoires permettant de comprendre de manière fine et profonde la notion de planarité d'un graphe. L'une des premières applications conduit à des algorithmes de dessin, très simples et élégants [6, 3, 5] (voir Fig. 1 pour un exemple), permettant de dessiner un graphe planaire à n sommets sur une grille de taille $O(n) \times O(n)$ en temps linéaire.

Il existe plusieurs définitions possibles des forêts de Schnyder. L'une des formulations plus connues est probablement celle donnée pour la famille des graphes plans maximaux, aussi connus sous le nom de *triangulations planaires*, pour lesquelles la caractérisation de Schnyder s'exprime de la manière suivante (voir Fig. 1 pour un exemple): les arêtes internes d'une telle triangulation peuvent se partitionner en 3 arbres couvrants de l'ensemble des sommets, chacun ayant comme racine l'un des trois sommets incidents à la face externe.

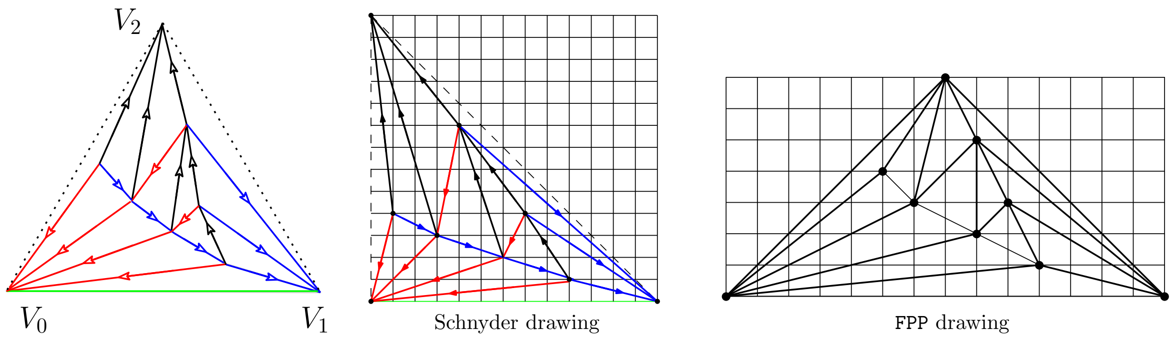

Figure 1. (gauche) Une triangulation planaire de taille 9 munie d'une forêt de Schnyder (3-orientation et coloration des arêtes internes). (centre) Dessin de Schnyder sur une grille de taille $(2n-5 \times 2n-5)$. (droite) Dessin FPP sur une grille de taille (14×7).

Objectifs du stage: dessin de graphes de genre supérieur

Ce stage aura pour but l'étude des généralisations des propriétés mentionnées ci-dessus au cas des graphes de genre supérieur [1]. On s'interessera à des travaux récents [1, 4, 2] où l'on propose des généralisations des forêts de Schnyder et des ordres canoniques au cas de triangulations toriques et de genre supérieur: la Figure 2 illustre les propriétés des forêts de Schnyder toriques. En particulier, les formulations proposées dans ces travaux ont permis d'étendre les algorithmes de dessin au cas cylindrique et torique (genre 1).

Dans le cas des surfaces, de nombreux problèmes restent ouverts:
- peut-on construire des forêts de Schnyder pour des graphes de genre $g \geq 2$? [2]
- peut-on dessiner un graphe de genre $g = 2$ avec une résolution polynomiale et en temps linéaire?
- pour le cas $g = 1$, peut-on garantir l'existence de forêts de Schnyder toriques telles que les trois couleurs définissent des graphes connexes? Peut-on les calculer en temps linéaire? Peut-on garantir l'existence de 3 cycles non contractibles qui se croisent mutuellement?

La résolution de ces problèmes nous conduira ainsi à explorer des questions très profondes et intéressantes faisant intervenir des propriétés topoligiques, combinatoires et algorithmique des graphes plongés sur des surfaces.

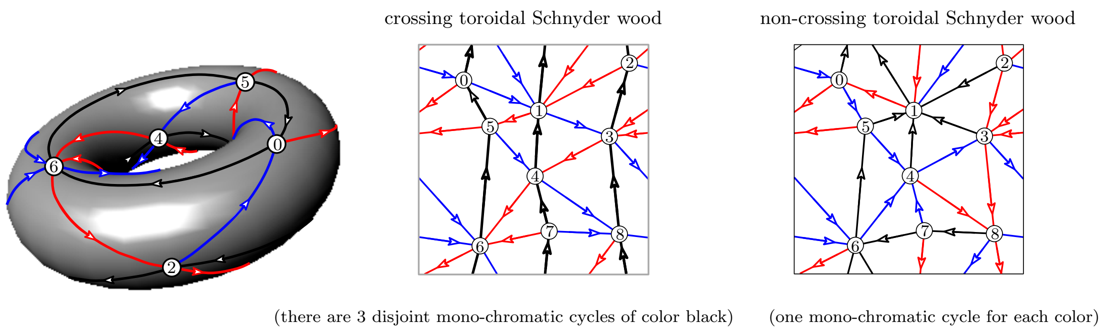

Figure 2. Une triangulation de genre 1 munie de deux forêts de Schnyder toriques (3-orientation et coloration des arêtes internes, respectant partout la règle locale de Schnyder).

References

[1] L. Castelli Aleardi, E. Fusy, and T. Lewiner. Schnyder woods for higher genus triangulated surfaces, with applications to encoding. *Discrete and Computational Geometry*, 42:489–516, 2009. Preliminary version in SoCG08.

[2] Luca Castelli Aleardi, Olivier Devillers, and Éric Fusy. Canonical ordering for graphs on the cylinder, with applications to periodic straight-line drawings on the flat cyclinder and torus. *J. Comput. Geom.*, 9(1):391–429, 2018.

[3] H. De Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack. How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10:41–51, 1990.

[4] D. Goncalves and B. Léveque. Toroidal maps : Schnyder woods, orthogonal surfaces and straight-line representations. *Discrete and Computational Geometry*, 51:67–131, 2014.

[5] Goos Kant. Drawing planar graphs using the canonical ordering. *Algorithmica*, 16(1):4–32, 1996.

[6] Walter Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. In *SoDA*, pages 138–148, 1990.

[1]Le *genre* d'un graphe est le plus petit entier g tel que le graphe peut se dessiner sans croisements sur une surface de genre g (les graphes planaires ont genre 0 car il peuvent se dessiner sur la sphère).

[2]La seule solution existante n'est valide que pour des graphes ayant une très grande *edge-width*