

Représentation compacte de triangulations à bord

Luca Castelli Aleardi

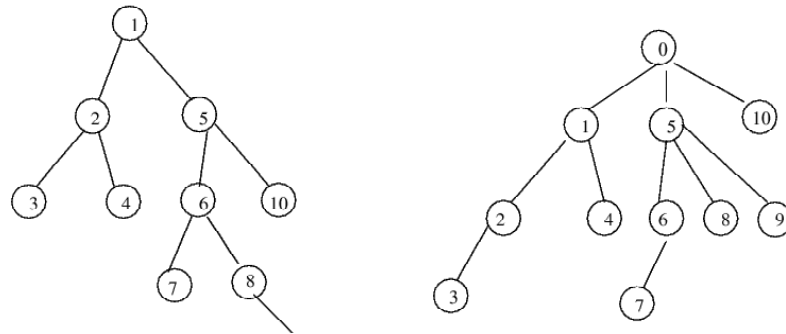
mars 2005

(en collaboration avec Olivier Devillers et Gilles Schaeffer)



Codage: compression et représentations compactes

Un exemple: arbres enracinés à n sommets



énumération des arbres binaires à n noeuds:

$$\|\mathcal{B}_n\| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \approx 2^{2n} n^{-\frac{3}{2}}$$

Codage: compression et représentations compactes

rep. implicite (compression)

- taille: $\log_2 \|\mathcal{B}_n\| = 2n + O(\lg n)$
- pas de navigation

rep. explicite par pointeurs

- taille: $2n \lg n$
- navigation en temps constant

rep. compacte (Jacobson 89, Munro et Raman 2001)

- taille: $2n + o(n)$
- navigation en temps constant

Motivations et préliminaires

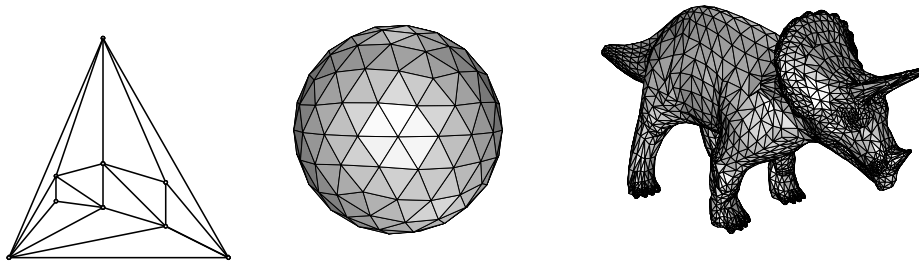
- Finalité: description de structures (asymptotiquement) optimales en espace ($O(n)$ bits), qui supportent des opérations de navigation en temps $O(1)$
- Structures: triangulations
- Opérations: Requêtes d'adjacences, navigation.
- Modèle: machine RAM avec des opérations en temps constant sur des mots binaires de longueur $O(\log m)$ (m taille de la structure)

Représentations compactes: état de l'art

- **arbres statiques** à n noeuds (Jacobson FOCS89):
espace $2n + o(n)$, navigation en temps $O(\lg n)$
- **arbres binaires dynamiques** à n noeuds (Munro et al. SODA01):
espace $2n + o(n)$, navigation en temps $O(1)$, temps de mise à jour $O(\lg^2 m)$
- **arbres binaires dynamiques** à n noeuds (Raman et al. ICALP03):
espace $2n + o(n)$, navigation en temps $O(1)$, temps de mise à jour $O(\lg \lg^{1+\varepsilon} m)$
- **graphes planaires** à n sommets et e arêtes (Munro et al. FOCS97):
espace $8n + 2e$, adjacence entre sommets et degré
- **graphes planaires 3-connexes** (Chuang et al. ICALP98): espace $7m + o(m)$, adjacence entre sommets et degré
- **graphes séparables** à n sommets (Blandford et al. SODA03):
espace $O(n)$, navigation en temps constant

Entropie de Tutte (cas triangulaire)

(borne inférieure pour la longueur moyenne du code)

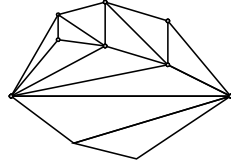


énumération des triangulations planaires enracinées à n sommets:

$$\Psi_n = \frac{2(4n + 1)!}{(3n + 2)!(n + 1)!} \approx \frac{16}{27} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} n^{-5/2} \left(\frac{256}{27}\right)^n$$

entropie de Tutte (1962):

$$e = \frac{1}{n} \log_2 \Psi_n \approx \log_2\left(\frac{256}{27}\right) \approx 3.2451 \text{ bits/sommet}$$



k-gone ayant $n + 1$ sommets internes, $m = 2n + k$ faces

$$f(n, k) = \frac{2 \cdot (2k - 3)! (2k + 4n - 1)!}{(k - 1)! (k - 3)! (n + 1)! (2k + 3n)!}$$

$$f'(m, k) = \frac{2 \cdot (2k - 3)! (2m - 1)!}{(k - 1)! (k - 3)! \left(\frac{m-k}{2} + 1\right)!} \quad (1)$$

entropie de l'ensemble des triangulations avec bord à m faces

$$F(m) = \lg\left(\sum_{k \geq 3}^m f'(m, k)\right) \approx 2.175m$$

Notre contribution

Représentation compacte de triangulations

- structure: triangulations à bord à m triangles
- opérations en temps $O(1)$: navigation entre triangles adjacents
- **taille de la structure:**

$$2.175m + O\left(m \frac{\lg \lg m}{\lg m}\right) = 2.175m + o(m)$$

Surfaces de genre g :

$$2.175m + 36(g - 1) \lg m + O\left(m \frac{\lg \lg m}{\lg m} + g \lg \lg m\right)$$

Optimalité pour $g = o\left(\frac{m}{\lg m}\right)$

Idée intuitive

Decomposition en sous-structures

Énumération exhaustive

Codage optimal

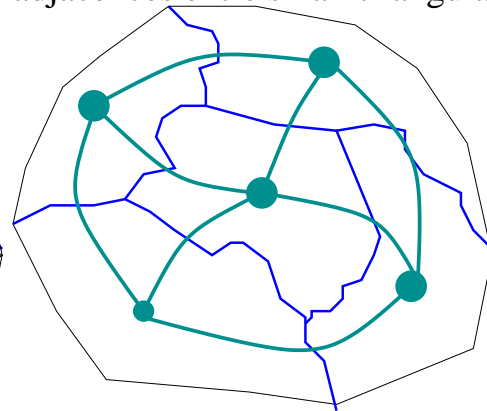
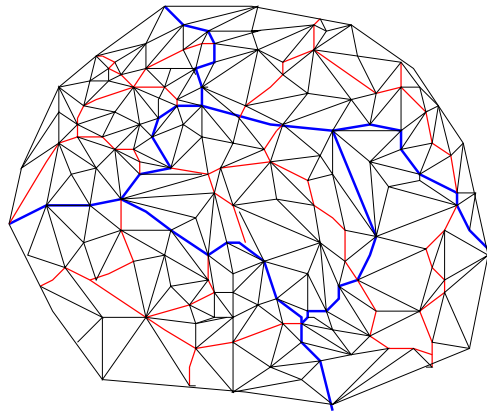
Partage de l'information

Idée: décomposition de \mathcal{T} en sous triangulations

- **small triangulations** ayant entre $\frac{1}{3} \lg^2 m$ et $\lg^2 m$ triangles;
- **tiny triangulations** ayant entre $\frac{1}{12} \lg m$ et $\frac{1}{4} \lg m$ triangles.

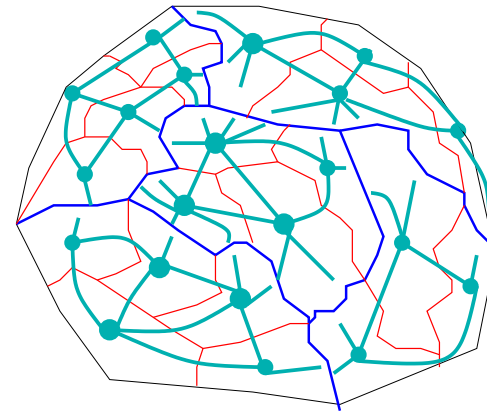
Graphe F

adjacences entre small triangulations

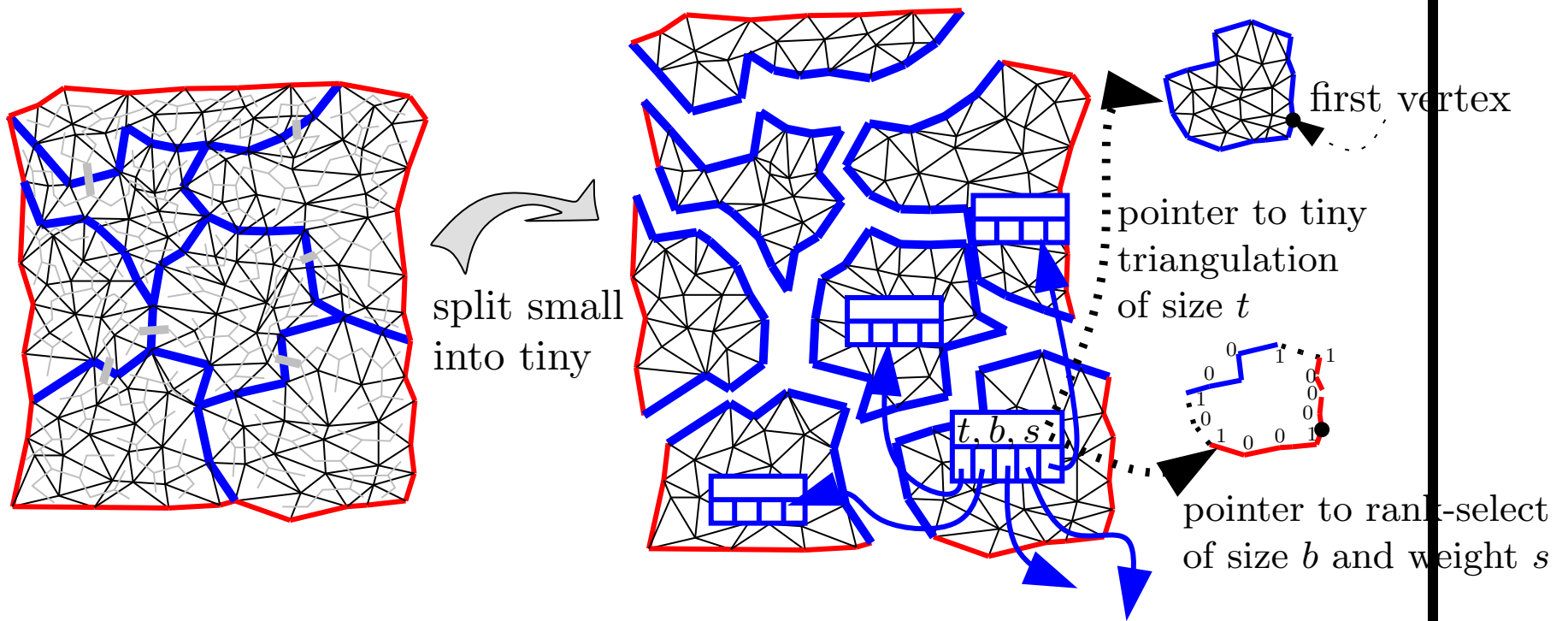


Graphes G_i

adjacences entre tiny triangulations

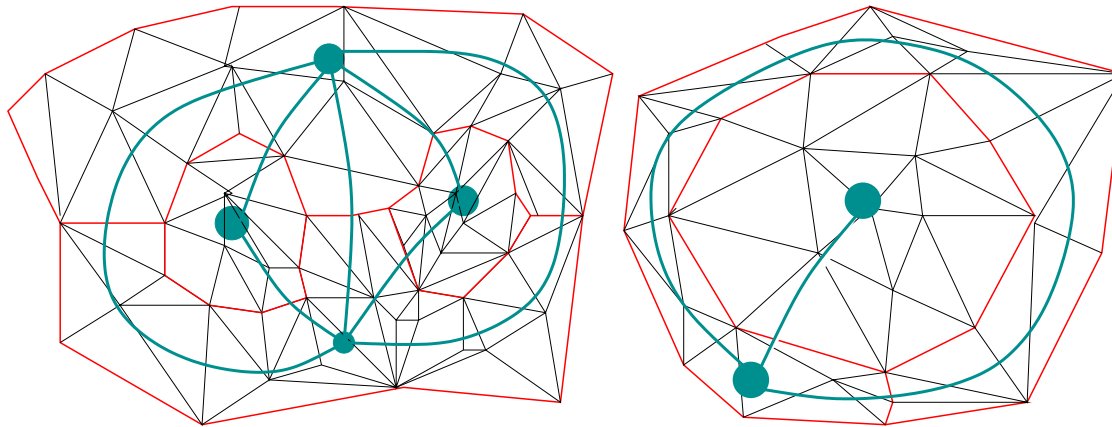


Overview de la structure



Graph G_i des relations d'adjacence entre sub-block

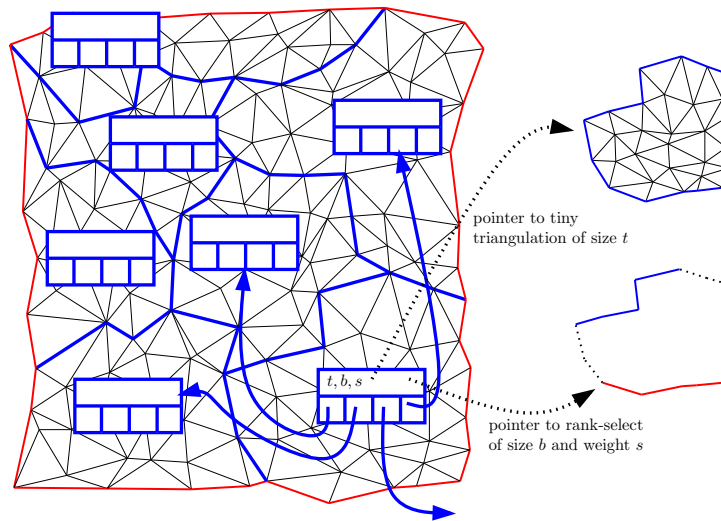
- G_i possède un noeud pour chaque sub-block et une arête entre deux sub-blocks adjacents;
- G_i est une carte planaire dont toutes les faces ont degré au moins 3 (arêtes multiples et boucles sont admises);



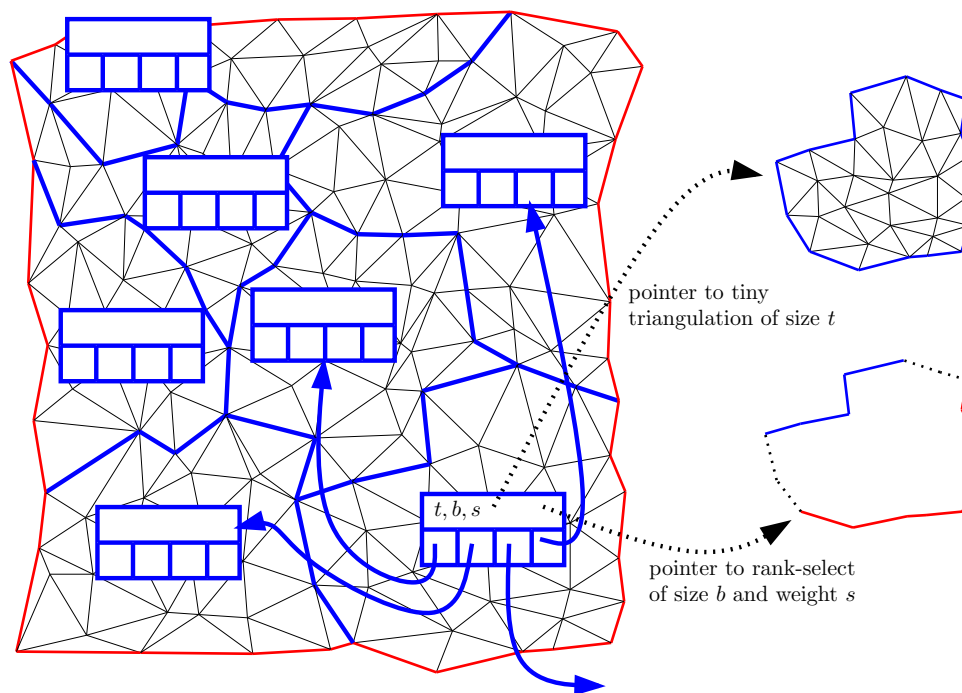
Graph G_i des relations d'adjacence entre tiny triangulations

- le nombre total d'arêtes de tous les graphs G_i est:

$$\sum_i \|E(G_i)\| = O\left(\frac{n}{\lg n}\right)$$



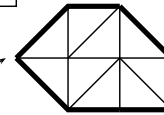
Grphe G_i des relations d'adjacence entre tiny triangulations (dans un small triangulation)



Representation d'un graphe G_i

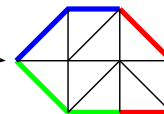
liste des $\Theta(\lg m)$
noeuds de G_i

n_0 n_1 ... n_j ...



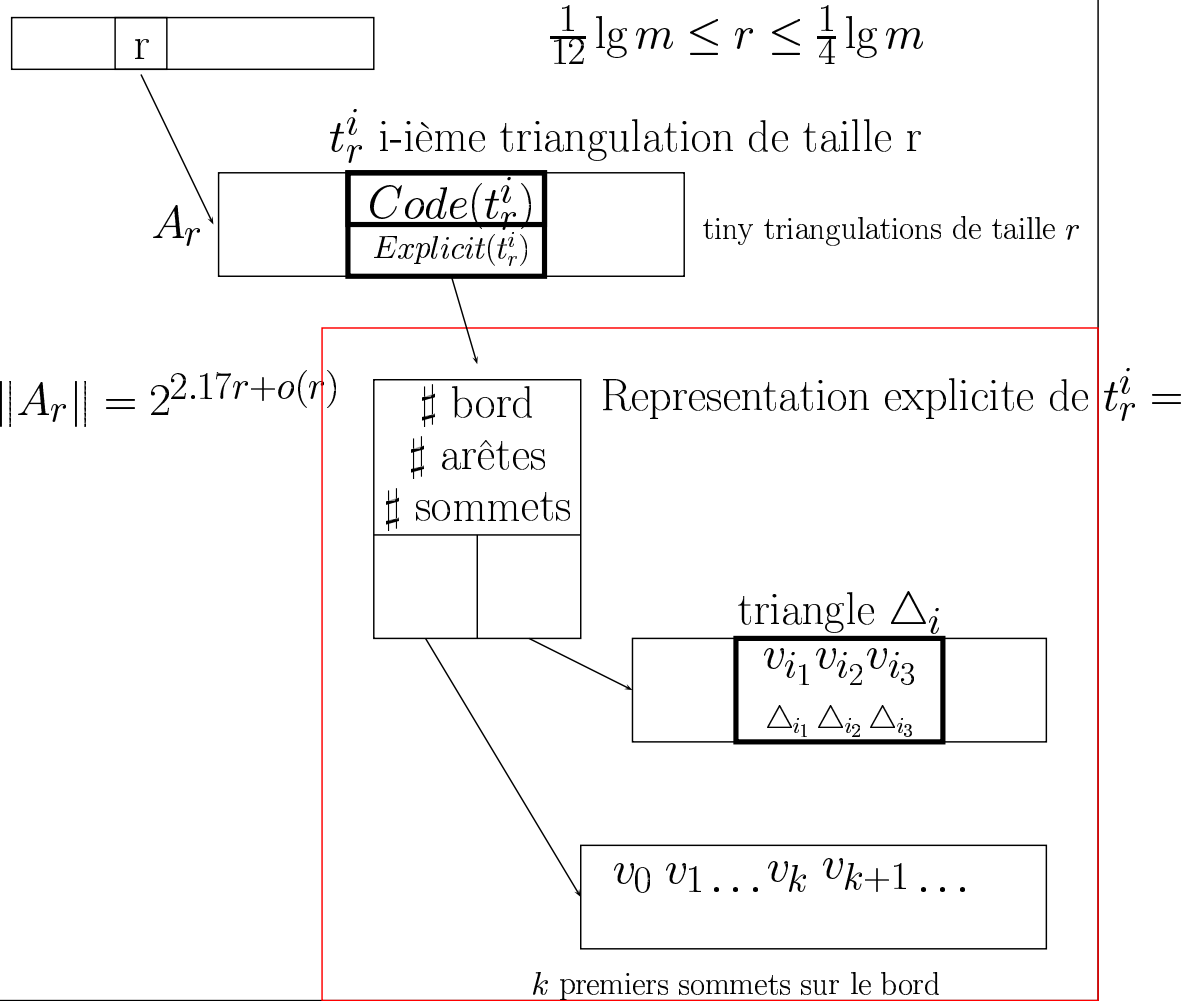
repres. d'un noeud n_j

	#voisins	$A(t)$		
	#bord	$RS(t)$		
	n_{j_0}	n_{j_1}	n_{j_2}	...
	l_{j_0}	l_{j_1}	l_{j_2}	...

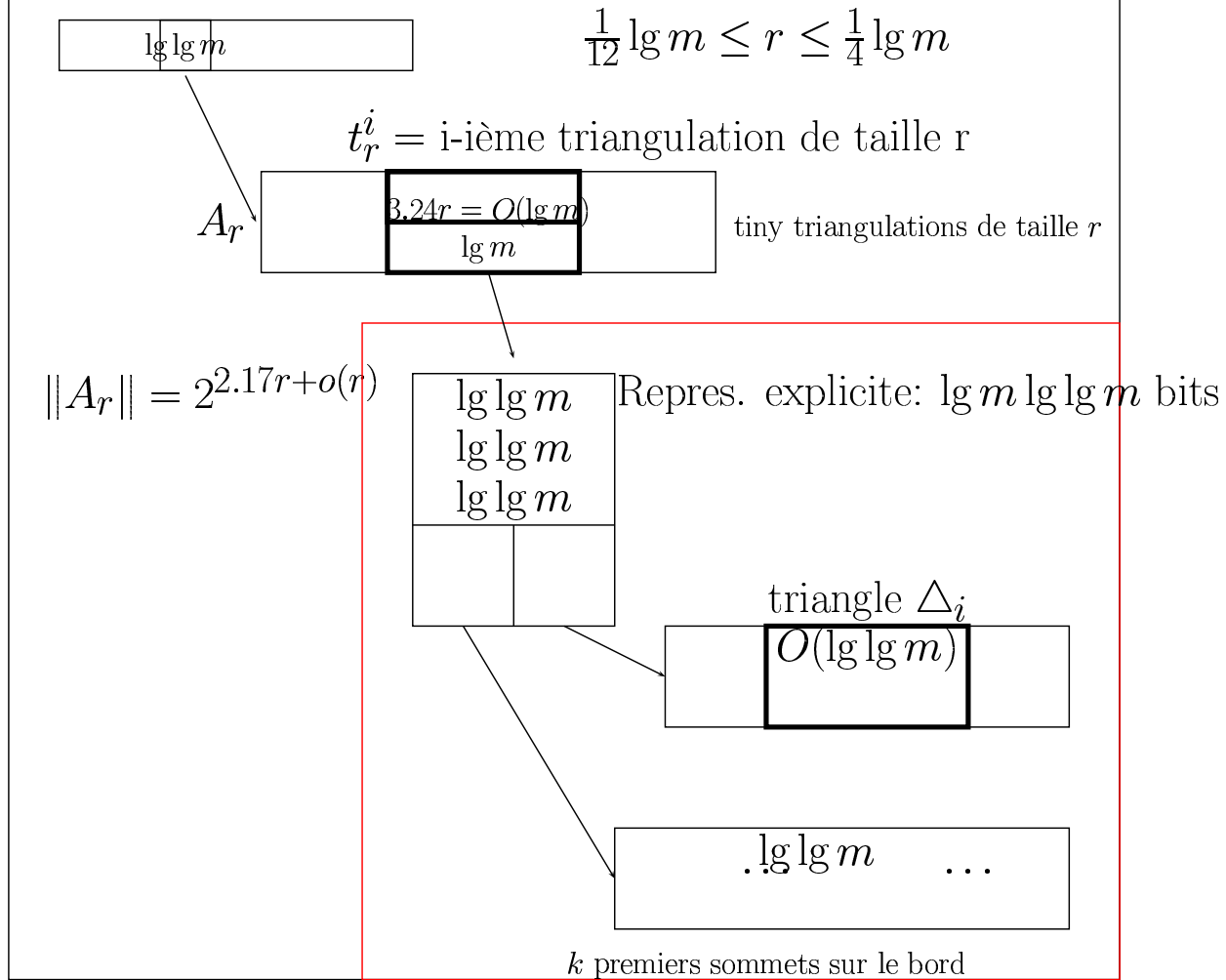


$O(\lg^2 m)$ bits

Tableau A de toutes les tiny triangulations



Espace utilisé pour stocker A



Coût des graphes G_i

- liste des voisins, degré, et taille des noeuds

$$O\left(m \frac{\lg \lg m}{\lg m}\right)$$

- pointeurs vers tableaux A_r

$$2.17m + O(\lg m)$$

- pointeurs "Rank/Select"

$$O\left(m \frac{\lg \lg m}{\lg m}\right)$$

Espace total utilisé: récapitulatif

- tableaux contenant toutes les tiny triangulations

$$O(m^{\frac{1}{4}2.17} \lg^2 m \lg \lg m) = o(m)$$

- tableaux des bit-vectors (avec Rank/Select)

$$O(m^{\frac{1}{4}2.17} \lg m \lg \lg m) = o(m)$$

- graphe F

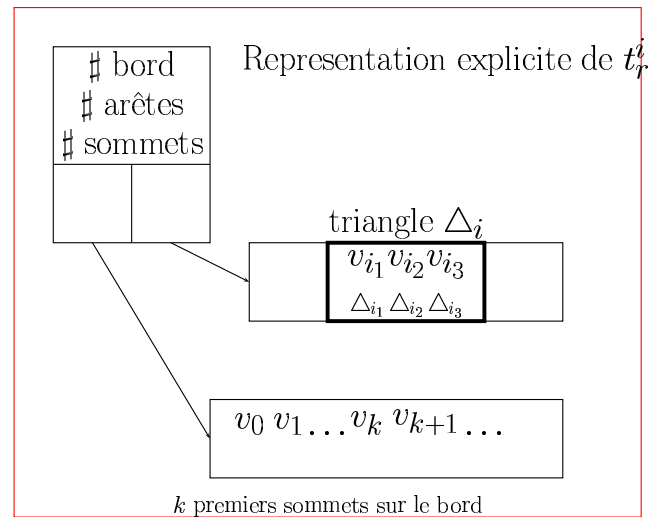
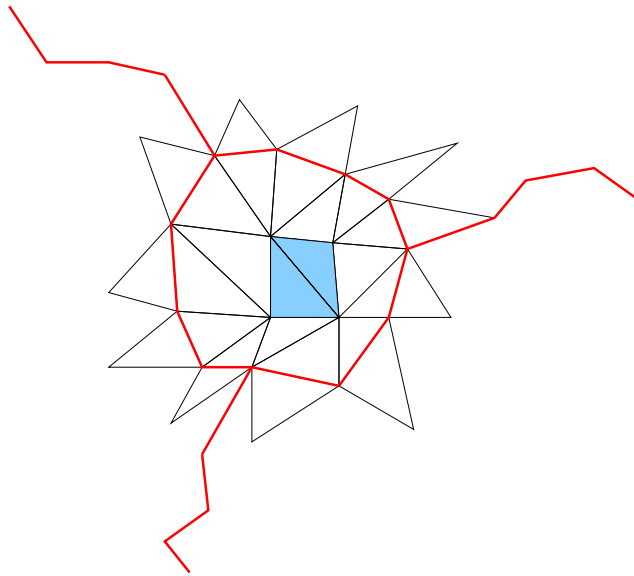
$$O\left(\frac{m}{\lg^2 m} \lg m\right) = o(m)$$

- graphes G_i

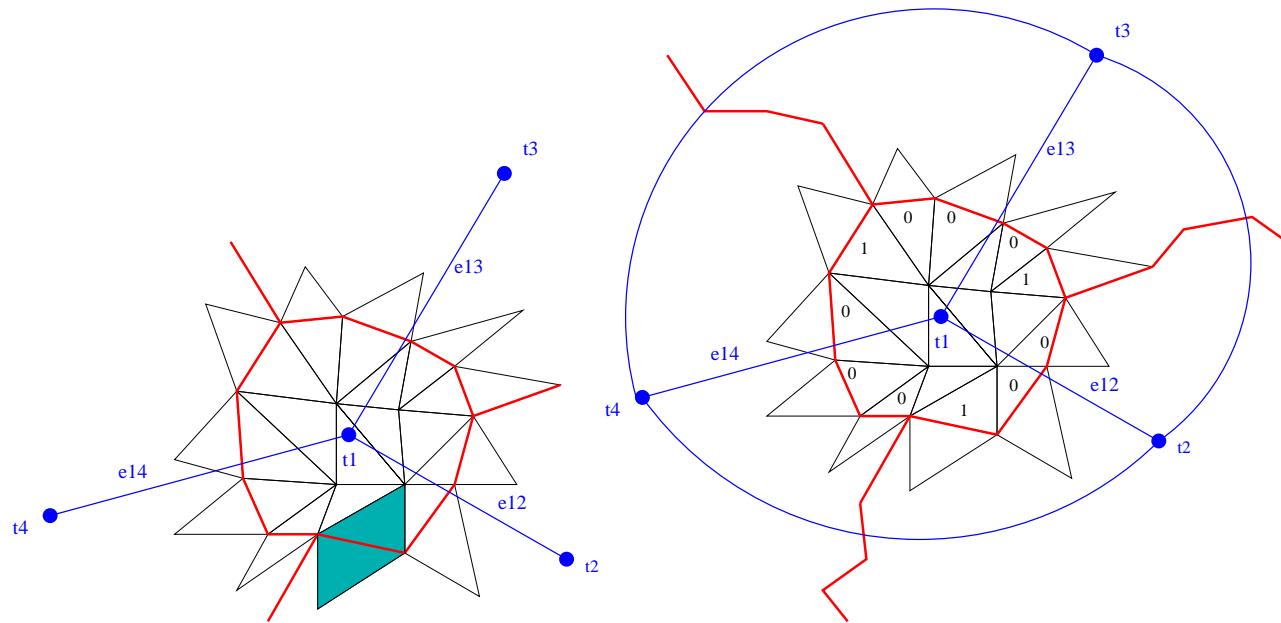
$$2.17m + O\left(m \frac{\lg \lg m}{\lg m}\right)$$

Navigation: dans une tiny triangulation

(entre triangles internes)

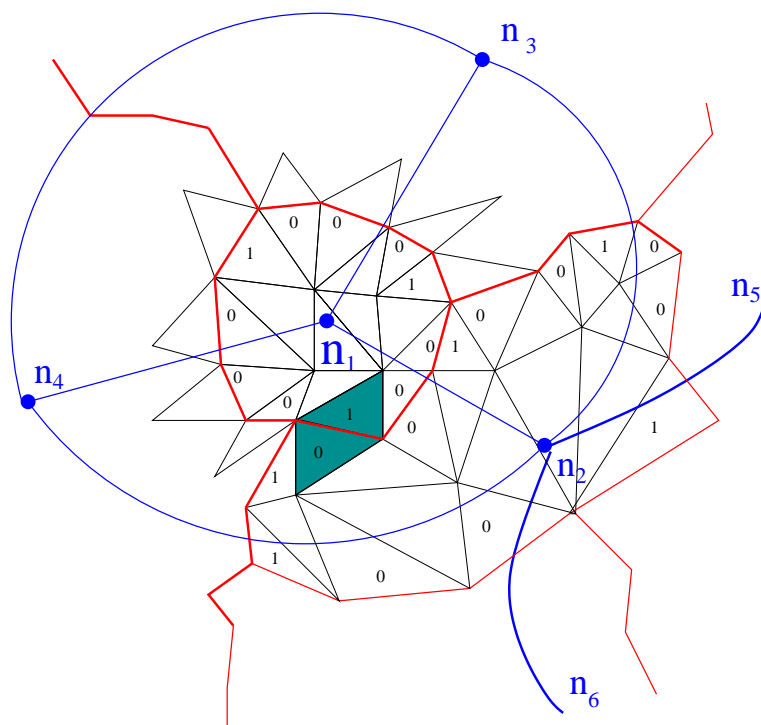


Navigation: dans une small triangulation
(triangles dans tiny triangulations adjacentes)



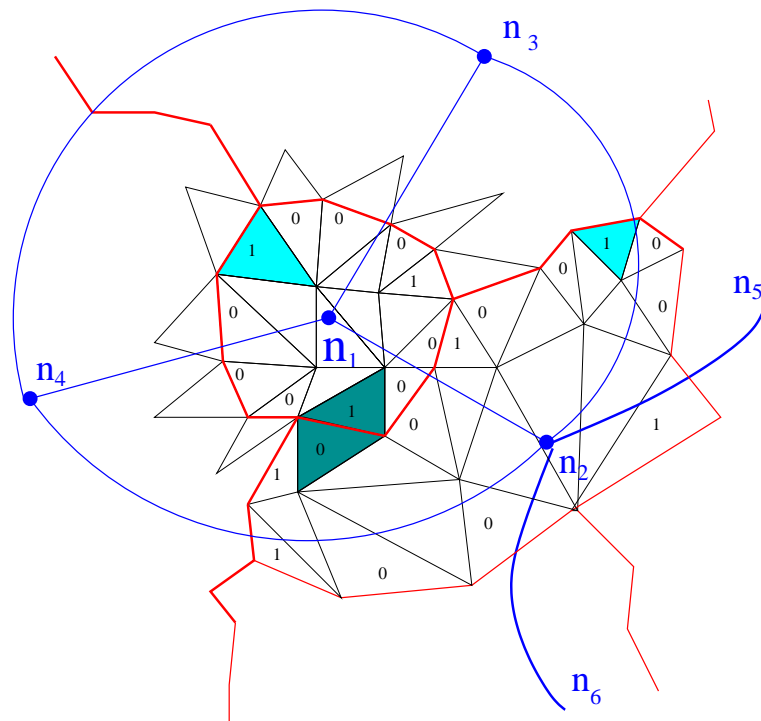
Navigation: dans une small triangulation

(tiny triangulations étiquetées)



Navigation: dans une small triangulation

(tiny triangulations étiquetées et enracinées)



n_1	#voisins= 3	
	#bord= 11	
n_4	n_2	n_3
	2	

n_2	#voisins=5			
	#bord=13			
n_2	n_1	n_4	n_6	n_5
	2			

Perspectives et travaux futurs

Extension au cas dynamique

But: implementer en temps $\Theta(\lg^2 m)$ les opérations de mise à jour
de la triangulation

insertion/suppression sommets degré 3

flip d'arête

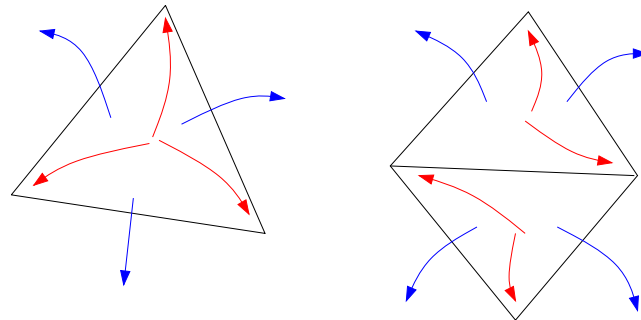
Extension au cas 3-connexe

Bijection entre $G \cup G^*$ et les quadriangulations

Perspectives et travaux futurs

Implementation pratique

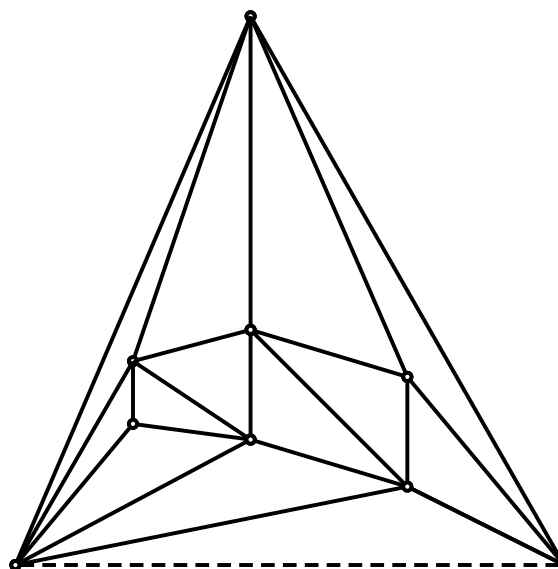
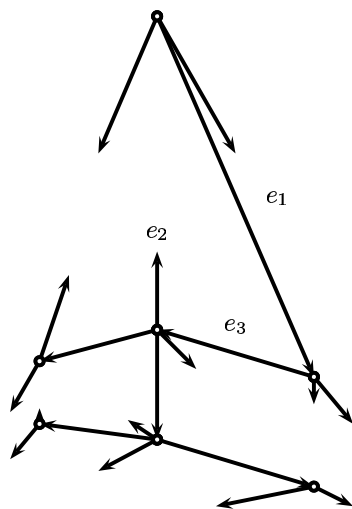
Idée: paquets de 1/2 triangles (triangles + quad)



Perspectives et travaux futurs

Représentation compacte des triangulations à bord triangulaire

Idée: stratégie de décomposition + bijection avec arbres bourgeonnants (Poulalhon et Schaeffer ICALP03)



Perspectives et travaux futurs

Triangulations 3D

Idée: ?