

# Cours MPRI 2-38-1 Algorithmique et combinatoire des graphes géométriques 2024-2025

Devoir maison 2 (pour le mercredi 13 novembre à 8h45)

Luca Castelli Aleardi

23 octobre 2024

Tous les arguments devraient être exprimés de manière rigoureuse et claire. Ces devoirs doivent être faits essentiellement individuellement, et en mentionnant clairement si vous vous êtes fait aider pour une question ou pour une autre. Les devoirs sont à rendre en version papier ou en version numérique par email à [amturing@lix.polytechnique.fr](mailto:amturing@lix.polytechnique.fr) (de préférence au format **pdf**).

## Exercice 1 – Schnyder woods

Considérons  $\mathcal{T}$  une triangulation planaire munie d'un Schnyder wood  $(T_0, T_1, T_2)$ , ayant pour face (externe) racine  $f = (V_0, V_1, V_2)$ . On dénote par  $\overline{T}_0$  l'arbre obtenu en ajoutant à  $T_0$  les deux arêtes  $(V_1, V_0)$  et  $(V_2, V_0)$  (orientées vers  $V_0$ ). Considérons le parcours préfixe de l'arbre  $\overline{T}_0$  obtenu en visitant en sens anti-horaire les arêtes de l'arbre en partant de  $(V_0, V_1)$ . Un tel parcours induit un ordre  $\pi = \{1, 2, \dots, n\}$  sur les sommets de  $\mathcal{T}$  tel que  $\pi(V_0) = 1$ ,  $\pi(V_1) = 2$  et  $\pi(V_2) = n$ , comme illustré par les images de la Figure 1.

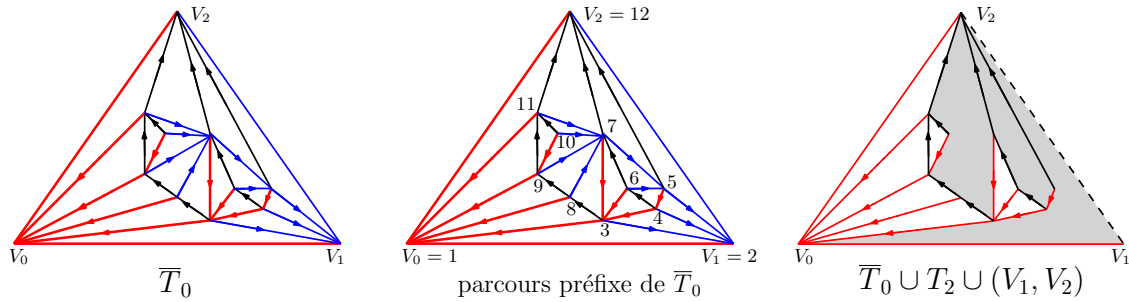


Figure 1: Une triangulation munie d'un Schnyder wood: l'étiquetage des sommets correspond au parcours préfixe en sens anti-horaire de l'arbre  $\overline{T}_0$ .

Nous allons montrer quelques propriétés de l'ordre  $\pi$  qu'on vient de définir.

**Question 1.1.** Montrer que si un sommet  $u$  est un descendant de  $v$  dans l'arbre  $T_i$ , alors  $u$  ne peut être un descendant ou ancêtre de  $v$  dans les arbres  $T_{i+1}$  et  $T_{i-1}$  (tous les indices sont calculés modulo 3).

**Question 1.2.** Considérons une arête  $(u, v)$  dans l'arbre  $T_1$  (bleu) orientée vers  $v$ . Montrer que  $\pi(u) > \pi(v)$ . De manière similaire, soit  $(w, z)$  une arête dans l'arbre  $T_2$  (noir) orientée vers  $z$ . Montrer que  $\pi(w) < \pi(z)$ .

**Question 1.3.** Montrer que l'ordre  $\pi$  défini par un parcours préfixe de  $\overline{T}_0$  (comme illustré ci-dessus) est un ordre canonique de la triangulation  $\mathcal{T}$  (pour la définition d'un ordre canonique, voir les transparents de l'amphi 4).

Il s'avère que l'information donnée par les arêtes de l'arbre  $T_1$  est redondante, comme exprimé par la question suivante.

**Question 1.4.** Considérons la carte  $G = \overline{T}_0 \cup T_2 \cup (V_1, V_2)$  obtenue en supprimant les arêtes de couleur 1 et en ajoutant l'arête externe  $(V_1, V_2)$ . Montrer qu'à partir uniquement de la carte  $G$  on peut retrouver le Schnyder wood  $(T_0, T_1, T_2)$  sans connaître la triangulation  $\mathcal{T}$  de départ.

## Exercice 2 – Triangulation d'un graphe planaire

Dans cet exercice on va concevoir et analyser un algorithme qui, étant donné un graphe planaire  $G$  à  $n$  sommets, triangule les faces de  $G$  de manière incrémentale: le résultat est une triangulation planaire  $\mathcal{T}(G)$  qui possède les mêmes sommets de  $G$  et qui est *simple* (pas de boucles ni d'arêtes multiples)

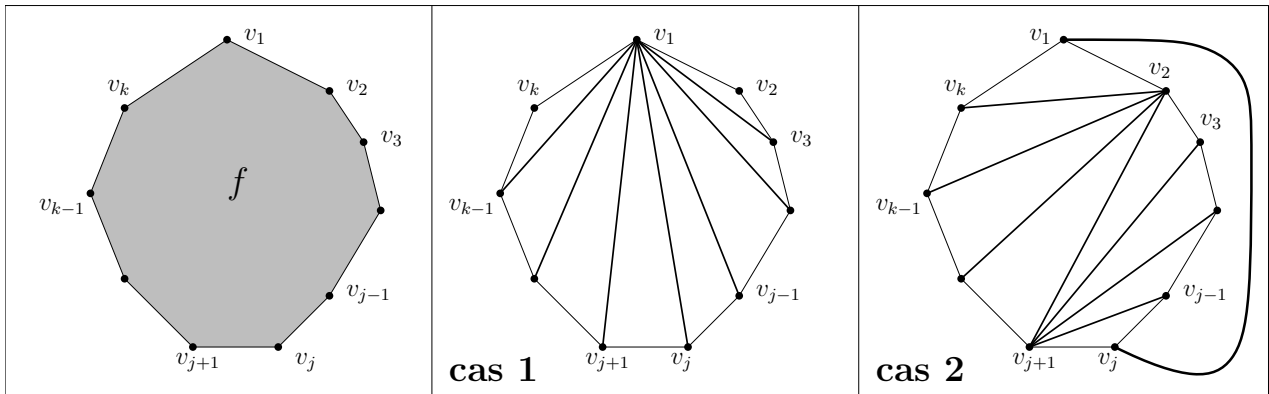


Figure 2: Une triangulation munie d'un Schnyder wood: l'étiquetage des sommets correspond au parcours préfixe en sens anti-horaire de l'arbre  $\overline{T_0}$ .

L'idée de l'algorithme est la suivante: on va trianguler les faces du graphe  $G$  les unes après les autres, de manière à jamais créer d'arêtes multiples. Pour ce faire, on va trianguler une face  $f = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  en ajoutant des arêtes, comme illustré par la Figure 2. Plus précisément, soit  $v_1 \in f$  un sommet de degré minimal dans une face  $f$  de degré  $k$ : dénotons par  $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)$  les sommets de  $f$  listés en sens horaire et distinguons deux cas:

**cas 1:** si aucun des sommets  $v_3, v_4, \dots, v_{k-1}$  n'est adjacent à  $v_1$ , alors on ajoute à  $G$  les arêtes

$$(v_1, v_3), (v_1, v_4) \dots (v_1, v_{k-1})$$

**cas 2:** sinon, en dénotant par  $v_j$  un voisin de  $v_1$ , on ajoute le zigzag d'arêtes

$$(v_2, v_k), (v_2, v_{k-1}), \dots, (v_2, v_{j+1}), (v_{j+1}, v_3), \dots, (v_{j+1}, v_{j-1})$$

**Question 2.1.** Soit  $G$  un graphe planaire 3-connexe. Montrer que le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en triangulant une face avec la procédure ci-dessus est simple: pas d'arêtes multiples.

**Question 2.2.** Montrer que si  $G$  est un graphe planaire simple à  $n$  sommets alors:

$$\sum_{f \in G} \min_{v \in f} \{deg(v)\} = O(n)$$

Pour trianguler le graphe  $G$  il suffit de réitérer la procédure décrite ci-dessus en triangulant chacune des faces de degré plus que 3: on fera bien attention à toujours choisir un sommet  $v_1$  de degré minimal (ce qui est crucial pour que l'algorithme soit efficace).

**Question 2.3.** Analyser la complexité en temps de l'algorithme décrit ci-dessus (la réponse devrait dépendre de  $n$ , la taille de  $G$ ).

**Hint:** On vous suggère d'écrire le pseudo-code de l'algorithme et d'analyser toutes ses étapes. Montrer que l'algorithme ci-dessus a une complexité  $\sum_{f \in G} (deg(f) + \min_{v \in f} \{deg(v)\})$  et en déduire une borne qui dépend de  $n$ .

**Question 2.4.** Que se passe-t-il si le graphe  $G$  de départ est 2-connexe, mais pas 3-connexe?

L'algorithme analysé ci-dessus est simple à implémenter mais a le défaut suivant: le degré de certains sommets dans  $\mathcal{T}(G)$  pourraient avoir un degré qui est  $O(n)$ , même si dans le graphe de départ les sommets ont degré borné.

**Question 2.5.** Montrer qu'il existent des graphes  $G$  de taille  $n$  dont les sommets ont degré borné par une constante, mais pour lesquels l'algorithme ci-dessus produit une triangulation  $\mathcal{T}(G)$  avec des sommets dont le degré est linéaire en  $n$ .