Examen 1ère période MPRI

Vendredi 25 Novembre 2016

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On précisera en tête de copie ET sur chaque feuille son nom et son prénom. Les notes de cours sont autorisées.

Les exercices, plus proches du cours, représentent une partie importante de la note.

1 Exercice 1 : formule de Cayley

On se propose de redémontrer de manière combinatoire la formule vue en cours pour le nombre d'arbres étiquetés à n sommets enracinés (non plans), que l'on rappelle : $t_n = n^{n-1}$.

Une *forêt enracinée* sur $[1..n]$ est un graphe acyclique F sur $[1..n]$ tel que chaque composante connexe de F est munie d'un sommet distingué appelé sa *racine*. Pour $n, k \geq 1$ on note $f_{n,k}$ le nombre de forêts enracinées sur $[1..n]$ ayant k composantes connexes.

Question 1 Que vaut $f_{n,n}$?
Corrigé: ça fait 1

Question 2 Quel est le nombre $m(n, k)$ d'arêtes d'une forêt sur $[1..n]$ ayant k composantes connexes ?
Corrigé: pour un arbre il y a une arête de moins que de sommets, en sommant sur toutes les cc on a donc $m(n, k) = n - k$.

Question 3 Pour $k \geq 1$, montrer en raisonnant combinatoirement que $m(n, k)f_{n,k}$ est égal à $nkf_{n,k+1}$.
Corrigé: D'un côté, on a une arête marquée. En l'enlevant, on a une cc de plus (donc $k + 1$) avec un sommet marqué (parmi n) et une racine marquée (parmi les k restantes). Attention ici c'est important de choisir d'abord le sommet et ensuite la racine, si on commence par la racine on ne sait plus comment continuer !

Question 4 En déduire l'expression de $f_{n,k}$, et retrouver la formule vue en cours pour $t_n = f_{n,1}$.
Corrigé: $f_{n,k} = \frac{nk}{n-k} \dots \frac{n(n-1)}{1} f_{n,n} = n^{n-k} \frac{(n-1)\dots k}{(n-k)\dots 1} = n^{n-k}\binom{n-1}{k-1}$. Pour $k = 1$ on a bien $f_{n,1} = n^{n-1}$ donc tout va bien.

2 Exercice 2

On fixe un entier $m \geq 1$. On note $\mathcal{A}$ la classe combinatoire formée des arbres plans enracinés dont tous les sommets ont un nombre d'enfants multiple de m. Pour $n \geq 1$ on note a_n le nombre de tels arbres ayant n sommets.

Question 5 Écrire une décomposition combinatoire de la classe $\mathcal{A}$, et en déduite que la série génératrice $A(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ satisfait l'équation :

$$A(x) = \frac{x}{1 - A(x)^m}.$$

Corrigé: OK

Question 6 Rappeler la démonstration (vue en TD) du fait que

$$[v^k]\frac{1}{(1-v)^\ell} = \binom{k+\ell-1}{k}.$$

Corrigé: On compte les ℓ-uplets de suites à k éléments en tout, on peut voir ça comme un mot de longueur $k+\ell-1$ sur $\{|, \bullet\}$ avec $\ell-1$ lettres $|$ (séparateurs).

Question 7 En comptant les arêtes d'un arbre de deux façons différentes, montrer que si $a_n \neq 0$ alors n est de la forme $n = mk+1$ avec k entier.
Corrigé: Un arbre à n sommets a $n-1$ arêtes et chacun des sommets internes contribue pour un nombre multiple de m, on a $\sum_{v \in V_{inn}} k_v \cdot m = n-1$.

Question 8 Déduire des questions précédentes une formule close pour le nombre a_n et vérifier la réponse dans le cas $m = 1$.
Corrigé: On applique Lagrange. $[x^n]A = 1/n[u^{n-1}](1-u^m)^{-n}$. On trouve (comme attendu) 0 si $n-1$ n'est pas multiple de m. Sinon, en écrivant $n = 1+km$ ce coeff est égal à $1/n[v^k](1-v)^{-n}$ qui vaut (cf question précédente) $\binom{k+n-1}{k}$. Au final on trouve donc :

$$a_{mk+1} = \frac{1}{mk+1}\binom{(m+1)k}{k}.$$

Pour $m = 1$ on a $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}Cat(k)$ qui est bien le nombre d'arbres plans à $k+1$ sommets.

Question 9 Pour $k \geq 1$ on note maintenant b_n le nombre d'arbres $(m+1)$-aires ayant n nœuds internes. Montrer que la série $B(x) = \sum_{k\geq 1} b_k x^k$ satisfait :

$$B(x) = x(1+B(x))^{m+1}$$

En déduire une formule close pour b_k.
Corrigé: La décomposition est claire, puis on applique lagrange $[x^k]B(x) = 1/k[u^{k-1}](1+u)^{(m+1)k} = 1/k\binom{(m+1)k}{k-1} = \frac{1}{(m-1)k+1}\binom{(m+1)k}{k}$. On peut aussi dire que cette formule est un cas paritculier de la formule vue en cours pour les ape de passeport fixé.

Question 10 Donner une preuve bijective directe que $b_k = a_{mk+1}$.
Corrigé: Ça doit se faire par induction ? Du genre, étant donné un truc compté par a_{mk+1}, si les sous-arbres sont $T_1, T_2, \ldots$ (il y en a un multiple de m, alors je définis $\phi(T)$ par induction en attachant une racine à$\phi(T_1), \phi(T_2), \ldots, \phi(T_m), \phi(T_{m+1}, \ldots)$.

3 Exercice 3 : déterminants et chemins

Question 11 Soit M la matrice $n \times n$ définie par $M_{i,j} = \mathrm{Cat}(i+j)$, avec $1 \leq i, j \leq n$. Montrer que $\det M = (n+1)$. On pourra utiliser une interprétation en termes de systèmes de chemins.
Corrigé: On considère le graphe ayant pour sommets $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ et comme arêtes $\{(i,j),(i+1,j+1)\}$ $\{(i,j),(i+1,j-1)\}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ (resp. $\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^+$). Par Gessel-Viennot (le graphe étant orienté et acyclique, on est en train de compter des systèmes de chemins de Dyck de $\{-1,-3,\ldots,-2n+1\}$ à $\{2,4,\ldots,2n-2\}$. On montre (par induction sur n) que les seuls systèmes non évitants sont formés de $(n-i)$ "montagnes" et i "montagnes avec un coin enfoncé" (faire un dessin). On a le choix libre de $i \in [0..n]$, soit $n+1$ choix.

4 Exercice 4 : surjections et ménages

Question 12 Pour $n \geq 1, k \geq 1$, on note $s(k,n)$ le nombre de surjections de $[1..k]$ dans $[1..n]$, c'est-à-dire le nombre d'applications $[1..k] \longrightarrow [1..n]$ dont l'image est $[1..n]$ tout entier. Montrer que

$$s(k,n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Indication : on considèrera l'ensemble S de toutes les fonctions de $[1..k]$ dans $[1..n]$, et on caractérisera les surjections comme les fonctions qui nient un ensemble $P_1, \ldots, P_n$ de propriétés bien choisies.

Corrigé: On pose P_i : i n'est pas dans l'image. Si on impose exactement j telles contraintes alors le nombre de fonctions est $(n-j)^k$, puis c'est gagné par inclusion exclusion.

Question 13 **(*)** Au dîner de gala des jeux olympiques, chaque pays a envoyé deux athlètes : une marathonienne et une pongiste. Il y a $n \geq 1$ pays, et on veut faire asseoir les invitées sur une table de longueur $2n$ de sorte que : i/ marathoniennes et pongistes alternent ; ii/ deux athlètes d'un même pays ne sont jamais assises côte-à-côte. Montrer que le nombre de façons de faire asseoir les athlètes est égal à ;

$$2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

Corrigé: On suppose qu'on commence toujours par une pongiste (ça donnera le facteur 2 à la fin). On numérote les sites pairs de 1 à n et les impairs de 1 à n. On a $n!$ façon de faire assoeir les pongistes. Maintenant on peut encoder par une permutation de $\mathfrak{S}_n$ l'appariement (pongiste, marathonienne) choisi. La propriété que l'on veut sur σ est que pour tout i on ait $\sigma(i) \neq i$ et pour tout $i > 1$ on ait $\sigma(i) \neq i-1$. On considère la propriété $P_j : \sigma(j) \in \{j, j-1\}$ et on veut nier tous les P_j. On applique l'inclusion exclusion. Pour chaque k, la somme de $\sum_{j_1 < j_2 < \ldots, j_k} |P_{j_1} \cap \ldots P_{j_k}|$ s'interprète comme le nombre de configuration avec k mauvaises paires marquées. On peut le compter comme suit : on commence par asseoir les k mauvaises paires marquées : il y a $\binom{2n-k}{k}$ choix (pour voir ça, lire la tablée de G à D et lire "X" pour une mauvaise paire marquée et "Y" pour un convive quelconque ; le mot lu a $2n-k$ lettres dont k X). Ensuite on choisit arbitrairement les autres paires, il y $(n-k)!$ choix ce qui permet de conclure.

5 Problème, partie 1 : orientations Pfaffiennes d'un graphe planaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et sans boucle, avec $V = [1..2n]$. On suppose que G est muni d'une orientation de ses arêtes. On note A la matrice d'adjacence orientée de G, définie par : $a_{i,j} = 1$ si $\{i,j\}$ est une arête orientée de i vers j, $a_{i,j} = -1$ si $\{j,i\}$ est une arête orientée de j vers i, et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$, on note $\epsilon(\sigma)$ sa signature, et on note

$$a_\sigma := a_{i,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{2n,\sigma(2n)}.$$

On dit qu'une permutation σ est *compatible avec* G si $a_\sigma \neq 0$, c'est-à-dire si le graphe de σ est un sous-graphe de G (comme graphes non-orientés). On note $\mathcal{S}_G \subset \mathfrak{S}_{2n}$ l'ensemble des permutations compatibles avec G et qui n'ont que des cycles de longueur paire.

Question 14 Montrer que dans le développement du déterminant $det(A)$ comme somme sur toutes les permutations de $[1..2n]$, la contribution des permutations ayant au moins un cycle de longueur impair est nulle.
Indication : on pourra grouper deux par deux les configurations de telles sorte que les contributions de chaque paire s'annulent
Corrigé: si je retourne un cycle (mettons le cycle de lg impaire qui contient le plus petit élément parmi ceux-ci) alors je ne change pas la signature mais je change le signe de tous les $a_{i,\sigma(i)}$. Comme le cycle est de longueur impaire, j'inverse la contribution.

L'orientation des arêtes de G que nous avons choisie au départ est dite *Pfaffienne* si pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_G$, on a : $\epsilon(\sigma)a_\sigma = 1$. On se propose de montrer que tout graphe planaire sans cut-edge admet une orientation Pfaffienne. On rappelle qu'une *cut-edge* est une arête dont la suppression déconnecte le graphe et qu'une arête *dure* est une arête qui n'est pas une cut-edge.

Question 15 Montrer que tout graphe planaire plongé dans le plan admet une orientation de ses arêtes ayant la propriété suivante : autour de chaque face interne, le nombre d'arêtes dures orientées dans le sens horaire est impair.
Indication : induction sur le nombre de faces internes !
Corrigé: S'il y a zéro faces internes le graphe est une arbre et toutes les arêtes sont des cut-edges, donc il n'y a rien a faire. Sinon, il y a au moins une arête dure incidente à la face externe. On l'enlève : par induction on peut orienter le graphe obtenu comme on veut. En rajoutant l'arête, on peut librement choisir son orientation pour que la propriété voulue soit vraie.

On suppose dorénavant que G **est un graphe planaire sans cut-edge, plongé dans le plan et muni d'une orientation satisfaisant la propriété de la question précédente**.

Question 16 Soit C un cycle simple d'arêtes de G. On note p, q, r le nombre de sommets, d'arêtes, et de faces, présents à l'intérieur de C (sans compter C lui-même).
a) Montrer que $p - q + r = 1$.
Corrigé: Le graphe formé de C et de son intérieur a $p + |C|$ sommets, $q + |C|$ arêtes, et $r + 1$ faces (en comptant la face externe). On lui applique la formule d'Euler et on a gagné.
b) On numérote arbitrairement de 1 à r les faces internes à C et on note c_i le nombre d'arêtes orientées en sens horaire autour de la i-ème face interne de C. Montrer que $\sum_{i=1}^{r} c_i = q + c_0$, où c_0 est le nombre d'arêtes de C orientées dans le sens horaire.
Corrigé: Chaque arête interne est orientée dans le sens horaire pour l'une des deux faces qu'elle jouxte. Donc en sommant les c_i sur les faces internes on compte chaque arête interne 1 fois, et les arêtes externes seulement si elles sont dans le sens horaire.
c) En déduire que $c_0 + 1 \equiv p \mod 2$.
Corrigé: On se rappelle que par le choix de l'orientation chaque c_i est impaire. Donc $\sum c_i \equiv r \mod 2$. Puis on conclut avec a).

Question 17 Déduire des questions précédentes que l'orientation de G ainsi obtenue est Pfaffienne.
Indication : on pourra montrer que $\epsilon(\sigma)a_\sigma = 1$ en montrant que la contribution de chaque cycle de σ est égale à 1, et on pourra se demander combien de sommets sont inscrits dans le plan à l'intérieur d'un cycle donné de σ.

Corrigé: On veut montrer que $\epsilon(\sigma)a_\sigma = 1$ pour toute permutation dans $\mathcal{S}_G$. Il suffit de montrer que la contribution de chaque cycle est 1, et puisque la signature d'un cycle de longueur paire est impaire, il suffit de montrer que le produit des $a_{i,\sigma(i)}$ sur chaque cycle est égal à -1, c'est à dire que le cycle contient un nombre impair d'arêtes orientées en sens inverse. On remarque que cette propriété ne change pas si on retourne le cycle (car la longueur est paire), on peut donc supposer que le cycle (appelons-le C) est en sens antihoraire. Ensuite, puisque la permutation σ est dans $\mathcal{S}_G$, et puisque le graphe est dessiné dans le plan, le nombre de sommets internes à C est nécessairement pair ! (car les sommets de l'intérieur sont eux-mêmes couverts par un certain nombre de cycles de σ, tous de longueur paire). Par la question précédente, le nombre d'arête en sens horaire est donc impair, cqfd.

Question 18 En déduire une expression du nombre d'éléments de $\mathcal{S}_G$.
Corrigé: Puisque seuls les éléments de $\mathcal{S}_G$ contribuent au développement de $\det(A)$, et puisque $\epsilon(\sigma)a_\sigma$ vaut toujours 1 pour ces éléments, on a $|\mathcal{S}_G| = \det(A)$.

Question 19 Soit G un graphe plan biparti sans cut-edge, dont toutes les faces ont degré congru à 2 modulo 4. Comment construire une orientation Pfaffienne de G ?
Corrigé: On oriente juste de noir vers blanc. Quand on tourne dans le sens horaire autour d'une face de degré $4k + 2$ on a donc $2k + 1$ arête dans chaque sens et par les questions précédentes, l'orientation est Pfaffienne.

6 Problème, partie 2 : couplages parfaits

Un couplage parfait de G est un sous ensemble d'arêtes $S \subset E$ que tout sommet de G est incident à exactement une arête de S.

Question 20 Montrer que les paires de couplages parfaits sont en bijection avec les éléments de $\mathcal{S}_G$. En déduire, que le nombre de couplages parfaits de G (toujours en supposant que G est muni d'une orientation Pfaffienne) est égal à $\sqrt{\det A}$.
Corrigé: En superposant deux couplages, j'obtiens un sous-graphe où tous les sommets ont degré 2, c'est donc une union de cycles (en autorisant une arête comme "cycle de longueur 2"). Pour en faire une permutation, il faut juste que j'oriente chaque cycle : pour les cycles de longueur 2, je n'ai rien à faire, pour les autres, je choisis une convention, par exemple j'oriente chaque cycle en partant de son plus petit élément et en allant dans la direction de l'arête qui est dans S (et non dans S'). La réciproque est claire (une arête sur deux dans chaque cycle, et l'orientation du cycle permet de décider quelle moitié est dans S et quelle dans S'). On a $M(G)^2 = |\mathcal{S}_G|$, et la partie précédente permet de conclure.

Question 21 Soit $n \geq 1$ impair, calculer combinatoirement le déterminant de la matrice M de taille $2n \times 2n$ donnée par $M_{i,i+1} = (-1)^i$, $M_{i+1,i} = (-1)^{i+1}$ (avec la convention $2n + 1 = 1$) et $M_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas.
Corrigé: C'est la matrice d'adjacence d'un cycle de longueur $2n$ avec les orientations d'arêtes alternées. Cette orientation est Pfafienne car n est impair, et dans ce cas le determinant vaut $2^2 = 4$ (car il y a deux couplages parfaits !).