Aspects algorithmiques de la combinatoire

Examen du 4 décembre 2015
(Correction)

Problème 1 : Suite totale et parcours eulériens

Soit $n \geqslant 1$. Une *suite totale d'index n* est un mot $x_1 x_2 \ldots x_\ell$ sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$, de longueur $\ell = n(n-1)$, tel que pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, le facteur ij apparaît exactement une fois cycliquement. Autrement dit, $x_1 x_2 \ldots x_\ell$ est une suite totale si et seulement si pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, \ldots, n\}^2$ tel que $i \neq j$, il existe un unique h tel que $x_h = i$ et $x_{h+1} = j$, en adoptant la convention $x_{\ell+1} = x_1$. Pour s'affranchir des symétries, on supposera de plus que toute suite totale commence par le préfixe 12. Par exemple, le mot 123213 est une suite totale d'index 3. Dans cet exercice, on se propose de déterminer le nombre de suites totales d'index n pour $n \geqslant 1$.

Question 1 Reformuler ce problème comme un problème d'énumération de parcours eulériens dans un graphe dirigé.

Question 2 En déduire une formule close pour le nombre de suites totales d'index n.

Problème 2 : Énumération et génération aléatoire d'arbres 2-bourgeonnants

Un arbre 2-bourgeonnant est un arbre planté enraciné tel que chaque noeud interne est incident à exactement 2 feuilles. La taille d'un arbre bourgeonnant est son nombre de noeuds internes. On note $\mathcal{T}$, la classe combinatoire des arbres 2-bourgeonnants et $T(x)$ leur série génératrice. Pour illustration, on a représenté sur la Figure 1(a), les 3 2-arbres bourgeonnants de taille 2 et sur la Figure 1(b) un arbre bourgeonnant de taille 7.

(a) Les 3 arbres 2-bourgeonnants de taille 2 (b) Un arbre bourgeonnant de taille 7

Figure 1 – Exemple d'arbres 2-bourgeonnants

Question 1 En utilisant la décomposition des arbres 2-bourgeonnants obtenue en supprimant leur racine, écrire une décomposition de la classe combinatoire des arbres 2-bourgeonnants et en déduire une équation pour $T(x)$.

▷ *En supprimant la racine d'un arbre 2-bourgeonnant, on obtient un triplet de forêts d'arbres bourgeonnants (les deux feuilles incidentes à la racine partitionnent en effet les autres enfants de la racine en trois ensembles). On obtient donc* $\mathcal{T} = \mathcal{Z} \star \left(\mathrm{Seq}(\mathcal{T})\right)^3$*, d'où on déduit* $T(x) = \frac{x}{(1-T(x))^3}$

Question 2 Déduire de la question précédente que le nombre t_n d'arbres bourgeonnants de taille n est égal à $\frac{1}{n}\binom{4n-2}{n-1}$.

▷ *On utilise la formule d'inversion de Lagrange avec $\phi(y) = \frac{1}{(1-y)^3}$. On obtient donc :*

$$[x^n]\Big(F(x)\Big) = \frac{1}{n}[y^{n-1}]\frac{1}{(1-y)^{3n}}$$

En appliquant la formule du binôme généralisé (avec $\alpha = -3n$), on obtient :

$$\begin{aligned}[x^n]\Big(F(x)\Big) &= \frac{1}{n!}3n(3n+1)\dots(4n-2)\\ &= \frac{1}{n!}\frac{(4n-2)!}{(3n-1)!}\\ &= \frac{1}{n}\binom{4n-2}{n-1}\end{aligned}$$

Question 3 Proposer un codage des arbres 2-bourgeonnants à n noeuds internes par des mots sur l'alphabet $\{a, \bar{a}, f\}$, comprenant $n-1$ fois la lettre a, $n-1$ fois la lettre $\bar{a}$ et $2n$ fois la lettre f.

▷

- *La première fois qu'on parcourt une arête entre deux noeuds internes, on la code par a.*
- *La deuxième fois qu'on parcourt une arête entre deux noeuds internes, on la code par $\bar{a}$.*
- *La première fois qu'on parcourt une arête entre un noeud internet et une feuille, on la code par f. La deuxième fois, on ne fait rien.*

Par exemple le codage du premier arbre de la Figure 1(a) est $aff\bar{a}ff$.

Question 4 Montrer que la famille de mots obtenus à la question précédente est en bijection avec la famille des mots w ayant $n-1$ a et $3n-1$ b et tels que pour tout préfixe u de w :

$$3|u|_a \geqslant |u|_b - 2,$$

où $|u|_a$ et $|u|_b$ désignent respectivement le nombre de a et le nombre de b de u.

▷ *On commence par prouver que si on remplace tous les f et les $\bar{a}$ par des b dans le mot de contour alors on ne perd pas d'information. Étant donnée une occurence de a dans un mot w, on peut lui associer le sommet interne atteint lorsqu'on parcourt l'arête correspondante à ce a pour la première fois. Comme ce sommet interne est incident à deux feuilles, on associe à cette occurence de a, les deux occurences de f correspondant à ces deux feuilles. Ces deux occurences de f apparaissent avant l'occurence de $\bar{a}$ codant la même arête que a.*
Si l'on remplace tous les f par des b, on peut donc retrouver où étaient les f avec une stratégie "gloutonne". Lorsqu'un a est suivi par trois b consécutifs, les deux premiers b sont en fait des f et le 3ème est un $\bar{a}$. On peut ensuite itérer.
D'après la description que l'on vient de donner, chaque b de w correspond soit à une feuille incidente à la racine de l'arbre, soit correspond à un a et apparaît après lui dans w, on obtient donc l'inégalité demandée.

Question 5 À l'aide de la caractérisation obtenue à la question précédente, retrouver la formule d'énumération pour les arbres 2-bourgeonnants obtenue précédemment.

▷ *Le codage des arbres 2-bourgeonnants par des mots w avec $n-1$ a et $3n-1$ b peut se traduire en un codage par des chemins à $4n-2$ pas ayant $n-1$ pas $(1,3)$ et $3n-1$ pas $(1,-1)$ et qui restent au dessus de la ligne d'ordonnée -2.*
Ces chemins sont en bijection avec les chemins à $4n-1$ pas ayant $n-1$ pas $(1,3)$ et $3n$ pas $(1,-1)$ et qui restent au dessus de la ligne d'ordonnée -2 à part pour leur dernier pas qui descend de -2 à -3. Grâce au lemme cyclique, le nombre de tels chemins est égal à :

$$\frac{3}{4n-1}\binom{4n-1}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{4n-2}{n-1}$$

Question 6 Décrire l'algorithme de génération uniforme pour un arbre bourgeonnant de taille n obtenu à l'aide de la spécification de la question 1 par la méthode récursive. Quelle est sa complexité (on n'oubliera pas de mentionner la complexité pour le calcul des coefficients) ?

Question 7 En utilisant le codage des arbres bourgeonnants par des mots tel que décrit à la question 4, proposer un algorithme de génération aléatoire de ces mots en utilisant un algorithme de type "tir tendu" (ou "target method") ?
Quelle est sa complexité ?

Problème 3 : Énumération de triangulations

On dit qu'une face d'une carte est *simple* si elle est incidente exactement une fois à chacun de ses sommets. Une carte planaire enracinée est une *triangulation d'un k-gone* si sa face racine est simple et de degré k, et toutes ses autres faces de degré 3. Si $k = 3$, on parle simplement de *triangulation.*

Question 1 Comment sont reliés les nombres de sommets, faces et arêtes d'une triangulation ? Et ceux d'une triangulation de k-gone ?

Soit $\mathcal{T}^{(k)}$ la famille des triangulations d'un k-gone *sans boucle*, $\mathcal{T}$ l'union des $\mathcal{T}^{(k)}$ pour $k \geqslant 2$. On considère la série génératrice multivariée $T(x, y, z, u)$ où le coefficient de $x^m y^n z^p u^k$ est le nombre d'éléments de $\mathcal{T}^{(k+2)}$ à $m + 1$ sommets, $n + 1$ arêtes et $p + 1$ faces.

En particulier, la plus petite triangulation de polygone est la carte réduite à une arête, qui appartient à $\mathcal{T}^{(2)}$, et dont le poids est x.

Question 2 (quelques évaluations particulières)

(a). Comment sont reliés les ensembles $\mathcal{T}^{(2)}$ et $\mathcal{T}^{(3)}$?

(b). En déduire une expression d'une série génératrice des triangulations à l'aide d'une évaluation particulière de $T(x, y, z, u)$.

(c). Comment $T(x, 1, 1, 0)$, $T(1, y, 1, 0)$ et $T(1, 1, z, 0)$ sont-elles reliées ?

▷ *les éléments de $\mathcal{T}^{(2)}$ sont des triangulations dont l'arête racine a été doublée. Autrement dit, $\mathcal{T}^{(2)}$ contient la carte réduite à une arête, plus des clones des éléments de $\mathcal{T}^{(3)}$.*
donc $T(x, y, z, 0)$ compte, au choix, les éléments de $\mathcal{T}^{(2)}$, ou les triangulations, y compris la triangulation vide.
Vu les relations entre nb de sommets, arêtes et racine, $y^3 T(1, y, 1, 0) = T(y^3, 1, , 1, 0)$ et $z^2 T(1, 1, z, 0) = T(z^2, 1, 1, 0)$.

Question 3 (mise en équation)

(a). En considérant les différents cas possibles lors de la suppression de l'arête racine d'une triangulation de polygone, écrire une décomposition récursive de la classe $\mathcal{T}$ utilisant $\mathcal{T}^{(2)}$.

▷
$$\mathcal{T} = \{-\} + \{-\} \times \mathcal{T}^2 + \{-\} \times (\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^{(2)})$$

(b). En déduire une équation pour $T(x, y, z, u)$.

▷
$$T(x, y, z, u) = x + y^2 u T(...)^2 + \frac{yz}{u}(T(...) - T(x, y, z, 0))$$

(c). Justifier que cette équation admet une unique solution parmi les séries formelles.

Par abus de notation, soit $T(y,u) = T(1,y,1,u)$. On considère la spécialisation de l'équation obtenue en (b) qui relie $T(y,u)$ et $T(y,0)$.

Question 4 (résolution) À l'aide de la méthode générale de résolution des équations à une variable catalytique, montrer que

$$T(y,0) = (1 - U(y)^3)(1 + 2U^3(y))$$

où le paramètre $U(y)$ est une série (d'arbres) que l'on précisera.
Pour cela, on introduira la série formelle $U(y)$ comme racine d'une équation bien choisie, puis la série $V(y) = T(y, U(y))$. On observera en particulier que $U(y) = yV(y)$.

▷ *on réécrit :*

$$uT(y,u) = u + y^2u^2T(y,u)^2 + y(T(y,u) - T(y,0))$$

on dérive par rapport à u :

$$(2y^2u^2T(u) + y - u)\frac{\partial T(y,u)}{\partial u} + (1 + 2y^2uT(u)^2 - T(u)) = 0$$

soit $U(y)$ racine de $2y^2u^2T(u) + y - u$, et $V(y) = T(y, U(y))$.
On obtient le système :

$$2yU^2V + y - 1 = 0 \tag{1}$$

$$2yUV^2 + y - V = 0 \tag{2}$$

$$yU + yU^2V^2 + (y-U)V = yT(y,0) \tag{3}$$

par (1) et (2), on a $U = yV = y(1 + 2U^3)$. Puis en injectant dans (3) (et en moulinant), on obtient $T = (1 - U^3)(1 + 2U^3)$.

Par inversion de Lagrange, on obtient l'expression suivante pour le nombre de triangulations sans boucle de taille n :

$$T_n = \frac{2^n\,(3n)!}{(n+1)!\,(2n+1)!}.$$

Soit maintenant $\mathcal{S}$ la classe des triangulations *simples*, c'est-à-dire sans boucle ni arêtes multiples, et soit $S(t)$ la série génératrice de $\mathcal{S}$ selon le nombre (total) d'arêtes. Par un deuxième abus de notation, on note $T(y) = T(y,0)$.

Question 5 (substitution)

(a). Décrire une application bijective permettant de décomposer toute triangulation sans boucle en une triangulation simple et des triangulations sans boucle.

(b). En déduire une équation reliant $T(y)$ et $S(t)$.

(c). En posant $t = yT(y)$, en déduire une expression de $S(t)$ paramétrée par une série d'arbres.

▷ *Par substitution $T(y) = S(yT(y))$; on pose $t = yT(y)$, ce qui donne $t = U(y)(1 - U(y)^3) = \tilde{U}(t)(1 - \tilde{U}(t))$ (et toujours $S(t) = (1 - U^3)(1 + 2U^3)$).*

Par inversion de Lagrange, on obtient que le nombre de triangulations simples de taille n est :

$$\frac{2\,(4n+1)!}{(n+1)!\,(3n+2)!}$$