Corrigé feuille d'exercices 3

Nombres réels

Exercice 1

On montre par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ce qui implique que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ et donc $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair, or, un entier et son carré sont des mêmes parités (voir 5) de l'Exercice 16 TD1). D'où p pair et il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2m$ et par conséquent $p^2 = 4m^2$. On en déduit que, $2q^2 = 4m^2$ ce qui implique que $q^2 = 2m^2$ donc q^2 est pair puis que q est pair (cf Exercice 16....). Les entiers p et q sont donc pairs mais premiers entre eux d'où la contradiction.

On conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

On montre par récurrence que :

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété " $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$ ".

Initialisation $n = 1$.

$$(a_1) \left(\frac{1}{a_1} \right) = 1 \geq 1^2 = 1 \text{ La propriété } P(1) \text{ est vraie.}$$

Hérédité Supposons la propriété, $P(n)$ vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = ((\sum_{i=1}^n a_i) + a_{n+1}) \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} & (a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) + (a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_{n+1}} \right) + \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{a_{n+1}} \right) + (a_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \geq n^2 + 1 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{a_{n+1}} \right) + (a_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$$

que l'on peut réécrire,

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \geq n^2 + 1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{n+1}} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{n+1}}{a_i} \right)$$

et encore,

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \geq n^2 + 1 + \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \right) \right)$$

Maintenant, soit $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} = \frac{a_i^2 + a_{n+1}^2}{a_i a_{n+1}}.$$

De plus, $0 \leq (a_i^2 - a_{n+1}^2) = a_i^2 + a_{n+1}^2 - 2a_i a_{n+1}$ d'où, $a_i^2 + a_{n+1}^2 \geq 2a_i a_{n+1}$ et finalement, $\frac{a_i^2 + a_{n+1}^2}{a_i a_{n+1}} \geq 2$ ($a_i a_{n+1}$ est bien non nul puisque a_i et a_{n+1} le sont).

Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \geq 2$ donc $\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \right) \right) \geq 2n$.

En conclusion,

$$(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \geq n^2 + 1 + 2n = (n+1)^2$$

ce qu'il fallait démontrer. La propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété $P(1)$ est vraie, de plus, si pour un certain rang n , $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie, donc par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

1. $x = 0$
2. $x = 0$
3. $-4 \leq x \leq 0$

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$ ce qui implique $nE(x) \leq nx$, comme $E(y)$ est le plus grand entier plus petit que y , on obtient, $nE(x) \leq E(nx)$, puis en divisant par n non nul, on a, $E(x) \leq \frac{E(nx)}{n}$, finalement en utilisant la croissance de $y \mapsto E(y)$ et le fait que $E(y) = y$ si $y \in \mathbb{Z}$, on conclut que $E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.

Par ailleurs, $E(nx) \leq nx$ puis en divisant n non nul, on obtient, $\frac{E(nx)}{n} \leq x$, en utilisant la croissance de $y \mapsto E(y)$, on conclut que, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x)$

A l'aide des deux inégalités, on obtient que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $x \leq x + \frac{k}{n} \leq x + 1$, x étant un entier naturel,

$E\left(x + \frac{k}{n}\right) = x$, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = (n-1+1)x = nx = E(nx) \text{ car } x \in \mathbb{N}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $x \notin \mathbb{N}$.

(a) On effectue la division euclidienne de $E(nx)$ par n , par conséquent il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $E(nx) = np + r$ avec $r < n$. On obtient, $\frac{E(nx)}{n} = p + \frac{r}{n}$. D'après, l'Exercice 4,

$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$, donc $E(x) = E\left(p + \frac{r}{n}\right)$. Or $0 \leq r < n$, on en déduit que $p \leq p + \frac{r}{n} < p + 1$ et ainsi $E(x) = p$.

(b) Par définition de la partie entière, $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$, ce qui revient à $np + r \leq nx < np + r + 1$ ou encore en divisant par n non nul, $p + \frac{r}{n} \leq x < p + \frac{r+1}{n}$.

Soit maintenant, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$p + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < p + \frac{k+r+1}{n} \tag{1}$$

On sait que, comme $0 \leq k < n$ et $0 \leq r < n$, $0 \leq \frac{r+k}{n} < 2$, mais deux cas se présentent :

- i. $\frac{r+k}{n} < 1$ qui équivaut à $r+k < n$ ou encore à $k \leq n-r-1$. On a aussi, comme r, k et n sont entiers, que $r+k \leq n-1$ ce qui implique que $\frac{r+k+1}{n} \leq 1$. La double inégalité (1) devient $p \leq x + \frac{k}{n} < p + \frac{k+r+1}{n} \leq p+1$ et on conclut que $E(x + \frac{k}{n}) = p = E(x)$.
- ii. $\frac{r+k}{n} \geq 1$ qui équivaut à $r+k \geq n$ qui équivaut à $k \geq n-r$. La double inégalité (1) devient $p+1 \leq x + \frac{k}{n} < p + \frac{k+r+1}{n} < p+2$, et on conclut que $E(x + \frac{k}{n}) = p+1 = E(x) + 1$.

(c) Finalement, $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-r-1} E(x) + \sum_{k=n-r}^{n-1} E(x) + 1 = (n-r)E(x) + ((n-1) - (n-r) + 1)(E(x) + 1) = (n-r)E(x) + rE(x) + r = nE(x) - rE(x) + rE(x) + r = nE(x) + r = E(nx)$. (Résultat dû à la division euclidienne).

3. Maintenant, supposons que $x < 0$. $E(-nx)$ est donc positif. En effectuant une division euclidienne de $E(-nx)$ par n , on peut écrire $E(-nx)$ comme $nq + s$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et s entier qui vérifie $0 \leq s < n$.

Comme pour le cas $x \geq 0$, on montre que $q = E(-x)$ (on utilise que $E(\frac{E(-nx)}{n}) = E(-x)$).

On écrit la même double inégalité que pour x positif, $E(-nx) \leq -nx < E(-nx) + 1$ ce qui équivaut à $nq + s \leq -nx < nq + s + 1$, en divisant par n non nul, $q + \frac{s}{n} \leq -x < q + \frac{s+1}{n}$, puis on obtient $-q - \frac{s+1}{n} < x \leq -q - \frac{s}{n}$, en ajoutant $\frac{k}{n}$ où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $-q + \frac{-s-1+k}{n} < x + \frac{k}{n} \leq -q + \frac{-s+k}{n}$, en raisonnant comme pour x positif, on a si $\frac{-s-1+k}{n} < 0$, ce qui revient à $k \leq s$, $E(x + \frac{k}{n}) = -q - 1$ et pour $\frac{-s-1+k}{n} \geq 0$ c'est à dire $k \geq s+1$, $E(x + \frac{k}{n}) = -q$.

Finalement en sommant, $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^s -E(-x) - 1 + \sum_{k=s+1}^{n-1} -E(-x) = -(s+1)(E(-x) + 1) - ((n-1) - (s+1) + 1)E(-x) = -(s+1)E(-x) - (s+1) - (n - (s+1))E(-x) = -(n - (s+1) + (s+1))E(-x) - s - 1 = -nE(-x) - s - 1 = -E(-nx) - 1 = E(nx)$. (On se rappelle que la division euclidienne donnait $E(-nx) = nE(-x) + s$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $E(-y) = -E(y) - 1$, pour s'en convaincre écrire la définition de la partie entière avec les inégalités puis tout multiplier par -1).

Exercice 6

1. A est majoré par 1 et minoré par 0, donc les bornes inférieures et supérieures existent et valent respectivement 0 et 1.
2. B est majoré par 1 et minoré par 0, donc les bornes inférieures et supérieures existent et valent respectivement 0 et 1.
3. C est majoré par 1 et minoré par 0, donc les bornes inférieures et supérieures existent et valent respectivement 0 et 1. En effet, $n \geq 1$ implique $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ puis que $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$ et enfin que $0 < 1 - \frac{1}{n} \leq 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2n} - \sqrt{n+2} = \sqrt{n} \left(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc D n'est pas majoré.

En outre, $n \geq 1$ implique $1 + \frac{2}{n} \leq 3$, et par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$, $\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \geq \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Finalement, on obtient, $\sqrt{n} \left(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right) \geq \sqrt{2} - \sqrt{3}$. D est donc minoré

et la borne inférieure de D existe. Comme, pour $n = 1$, $\sqrt{2n} - \sqrt{n+2} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, la borne inférieure est $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

5. $\mathbb{Q}_-^*$ est majoré par 0 et non minoré, donc la borne supérieure existe et vaut 0.

Exercice 7

1. $\forall a \in \mathbf{A}$, $a \leq M$ et $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in \mathbf{A}$, $M - \epsilon \leq a \leq M$

2. Pour tout $a \in \mathbf{A}_1$, $a \leq \pi$ donc $\mathbf{A}_1$ est majoré, $\mathbf{A}_1$ admet une borne supérieure. Considérons, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 3,1 \dots$ et u_n est le décimal plus grand que 3 qui a pour les mêmes n premières décimales que le nombre π . Les éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $\mathbf{A}_1$ et de plus $0 \leq u_n - \pi \leq 10^{-n}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers π donc π est la borne supérieure de $\mathbf{A}_1$.

Soit $n \geq 1$ entier, $\frac{10}{n} + (-1)^n \leq 10 + 1 = 11$ d'où $\mathbf{A}_2$ est majoré, il possède donc une borne supérieure.

On a, pour $n = 1$, $\frac{10}{n} + (-1)^n = 10 - 1 = 9$ et pour $n \geq 2$ entier, $\frac{10}{n} + (-1)^n \leq 5 + 1 = 6$, donc 9 est la borne supérieure de $\mathbf{A}_2$.

3. Pour tout $a \in \mathbf{A}_1$, $a \geq \frac{5}{4}$ donc $\mathbf{A}_1$ est minoré, $\mathbf{A}_1$ admet une borne inférieure. Comme $\frac{5}{4} = 1,25$, $\frac{5}{4} \in \mathbb{D}$, $\frac{5}{4}$ est la borne inférieure de $\mathbf{A}_1$.

Soit $n \geq 1$ entier, $\frac{10}{n} + (-1)^n \geq 0 - 1 = -1$ d'où $\mathbf{A}_2$ est minoré, il possède donc une borne inférieure. Considérons, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^{2n+1} + \frac{10}{2n+1}$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers -1. La borne inférieure de $\mathbf{A}_2$ est donc -1.

Exercice 8

Pour l'ensemble $\mathbf{A}_2$, il suffit de suivre la méthode de l'ensemble $\mathbf{A}_2$ de l'Exercice 7.

L'ensemble $\mathbf{A}_1$ n'est pas majoré, en effet, on peut considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 2$. Tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $\mathbf{A}_1$ et u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

L'ensemble est minoré par $\sqrt{2}$, il possède donc une borne inférieure. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans l'ensemble des nombres réels, on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} \leq q \leq \sqrt{2} + \epsilon$, ce qui prouve que $\sqrt{2}$ est la borne inférieure de $\mathbf{A}_1$.

Exercice 9

Supposons qu'il existe m_1, m_2 vérifiant (1) tels que $m_1 \neq m_2$. On peut supposer que $m_1 < m_2$, il existe, par conséquent $\eta > 0$, tel que $m_1 \leq m_2 - \eta$. Il existe $a \in A$ tel que $m_1 < m_2 - \frac{\eta}{2} \leq a \leq m_2$. Or, pour tout $a \in A$, $a \leq m_1$ ce qui est absurde et donc $m_1 = m_2$.

Exercice 10

1. Soit $z \in A + B$. Il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $z = a + b$. On a, $b = z - a \in B$, d'où, $z - a \leq \sup(B)$, de plus, $z - \sup(B) \leq a \leq \sup(A)$ ce qui entraîne, $z \leq \sup(A) + \sup(B)$. $A + B$ est donc majorés puisque z est arbitrairement choisi. De plus, comme $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$, on conclut que $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

2. Soit $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} \leq a \leq \sup(A)$ et $\sup(B) - \frac{\epsilon}{2} \leq b \leq \sup(B)$. En ajoutant les deux inégalités, on obtient $\sup(A) + \sup(B) - \epsilon \leq a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$. On conclut, en utilisant 1. et l'Exercice 9 que, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 11

Pour tout $a \in A$, $\inf(A) \leq a$ ceci implique que pour tout $a \in A$, $-a \leq -\inf(A)$ et donc $-A$ est majoré, il admet une borne supérieure, de plus, $\sup(-A) \leq -\inf(A)$ et donc $-\sup(-A) \geq \inf(A)$.

Pour tout $a \in A$, $-a \leq \sup(-A)$ d'où pour tout $a \in A$, $a \geq -\sup(-A)$. On conclut que, $-\sup(-A) \leq \inf(A)$.

Des deux inégalités, on déduit que $-\sup(-A) = \inf(A)$.

Exercice 12

Si $f(1) = 1$, c'est fini, $y = 1$ vérifie $f(y) = y$. On suppose que $f(1) < 1$, (f est à valeurs dans $[0, 1]$). Soit E l'ensemble, $\{y \in [0, 1] \mid f(y) \leq y\}$. Comme $1 \in E$, E est non vide. De plus, $E \subset [0, 1]$, il est donc borné et admet une borne inférieure que l'on note z . Soit $y \in E$, $z \leq y$, comme f est croissante, $f(z) \leq f(y)$, or $y \in E$ d'où, $f(z) \leq f(y) \leq y$. On en déduit que $f(z)$ est un minorant de E et comme z est la borne inférieure de E , z est le plus grand des minorants de E , on obtient, $f(z) \leq z$. Par la croissance de f , on obtient que $f(f(z)) \leq f(z)$, et donc que $f(z) \in E$. Comme z est la borne inférieure de E , $z \leq f(z)$. On conclut, comme $f(z) \leq z$ et $z \leq f(z)$, que $z = f(z)$.

Exercice 13

1. Soit $y_0 \in B$ et soit $x \in A$, $x \leq y_0$. Comme x est arbitrairement choisi, A est majoré par y_0 et donc $\sup(A)$ existe. Soit $x_0 \in A$, et soit $y \in B$, $x_0 \leq y$, y étant arbitrairement choisi, B est minoré et $\inf(B)$ existe.
2. En utilisant les notations de 1., on a $\sup(A) \leq y_0$ car y_0 est un majorant de A . Maintenant, $\sup(A)$ est un minorant, y_0 étant arbitrairement choisi, on conclut que, $\sup(A) \leq \inf(B)$.
3. Il faut montrer deux implications. Supposons que $\sup(A) = \inf(B) = m$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que : $\sup(A) - \frac{\epsilon}{3} = m - \frac{\epsilon}{3} \leq x \leq \sup(A) = m = \inf(B) \leq y \leq m + \frac{\epsilon}{3}$. On a, par conséquent, $|y - x| = y - m + m - x \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$.

Supposons maintenant que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ et $b \in B$ tel que $|x - y| < \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$, et soit $x \in A$ et $y \in B$ tels que $|y - x| = y - x < \epsilon \iff \inf(B) \leq y < x + \epsilon < \sup(A) + \epsilon$. On déduit que $\inf(B) < \sup(A) + \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$. On conclut (cf Exercice 3), que $\inf(B) \leq \sup(A)$, grâce à l'inégalité de 2., on obtient $\inf(B) = \sup(A)$.

4. $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1 \right\}$, $B = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \geq 1 \right\}$ vérifient 3. mais pas 2.

Exercice 14

1. On montre, par récurrence, que $f(n) = n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation $n = 0$. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Le seul nombre égal à son double est 0, donc $f(0) = 0$. La propriété est vraie au rang initial $n = 0$.
Hérédité Supposons, que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = n$ et montrons que $f(n + 1) = n + 1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $f(n + 1) = f(n) + f(1) = n + 1$.
Conclusion On a $f(0) = 0$ et $f(n) = n$ implique que $f(n + 1) = n + 1$, par conséquent, on conclut par le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 = f(0) = f(n - n) = f(n) + f(-n)$ d'où, $f(-n) = -f(n) = -n$. Finalement, si $z \in \mathbb{N}$, $f(z) = z$ et si $z \in \mathbb{Z}$ et $z < 0$, $z = -(-z)$ d'où $f(-(-z)) = -f(-z) = -(-z) = z$.
2. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Il existe $p, r \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tel que $q = \frac{p}{r}$. On a $p = f(p) = f(r \frac{p}{r}) = f(r)f(q) = rf(q)$, d'où, $f(q) = \frac{p}{r} = q$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$, d'où, $f(x) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$. Soient $y, z \in \mathbb{R}$, tels que $z \geq y \iff z - y \geq 0$ d'où, $0 \leq f(z - y) = f(z) + f(-y) = f(z) - f(y)$ (pour y réel, on $f(y - y) = 0$ et donc $f(y) + f(-y) = 0$ et enfin $f(-y) = -f(y)$) puis $f(z) \geq f(y)$ et par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. On peut supposer que $f(x) > x$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) > q > x$. Comme, f est croissante on a $f(q) = q \geq f(x)$ ce qui est absurde d'où $f(x) = x$ pour tout x réel.

Exercice 15

1. G est un groupe non réduit à 0 donc il existe $x \neq 0$ appartenant à G , si $x > 0$, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide (il contient x). Sinon $x < 0$ et comme G est un groupe, $-x \in G$ et $-x > 0$ donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Soit $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ et donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est minoré. Par conséquent, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide et minoré, il admet une borne inférieure.
2. Supposons que $\alpha > 0$, et supposons qu'il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\alpha + \eta < x < 2\alpha$, or $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ et par conséquent, il existe $x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que

$\alpha < x_1 < \alpha + \eta < x < 2\alpha$. G est un groupe donc $-x_1 \in G$, et $x - x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ mais $0 < x - x_1 < \alpha$, ce qui contredit le fait que $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ donc si $\alpha \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x \geq 2\alpha$, mais $2\alpha > \alpha$ car $\alpha > 0$ et encore une fois α ne serait pas la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $\alpha \in G$. Comme $\alpha \in G$ et G est un groupe, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Soit $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha \leq g < (n+1)\alpha$. Si $g > n\alpha$, alors $g - n\alpha \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $g - n\alpha < (n+1)\alpha - n\alpha = \alpha$ ce qui est absurde puisque $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. On conclut que $g = n\alpha$, et par conséquent tout élément $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ s'écrit comme un multiple de α , pour les éléments de $h \in G \cap \mathbb{R}_-^*$, $-h \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $-h$ est un multiple de α . On conclut que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

3. Supposons que $\alpha = 0$. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$, tels que $x < y$, comme $0 = \alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 \leq g \leq y - x$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n-1)g \leq x \leq ng$, ceci implique que $(n-1)g \leq x$ et donc que $ng \leq x + g \leq x + y - x = y$, d'où $x \leq ng \leq y$, et $ng \in G$. Si x, y sont de signes opposés alors $x \leq 0 \leq y$ et $0 \in G$. Et si x, y sont des réels négatifs on applique la première méthode à $-x$ et $-y$.
4. a. $0 \in G_\omega$, il suffit de prendre $a = b = 0$. Soient $x, x' \in G_\omega$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$, tels que $x = a + b\omega$ et $x' = a' + b'\omega$, ainsi $x + x' = (a + a') + (b + b')\omega \in G_\omega$. Soient $x, y, z \in G_\omega$, il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$ et $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3$, $(x + y) + z = (a_1 + b_1\omega + a_2 + b_2\omega) + a_3 + b_3\omega = a_1 + b_1\omega + (a_2 + b_2\omega + a_3 + b_3\omega) = a_1 + b_1\omega + a_2 + b_2\omega + a_3 + b_3\omega$ donc G_ω est associatif. Si $x \in G_\omega$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\omega$, on prend $y = -a + (-b)\omega \in G_\omega$, on a ainsi $x + y = y + x = 0$ donc tout élément admet un opposé.
- b. Soit $g \in G_\omega$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $g = a + b\omega = a + b\frac{p}{q} = \frac{aq + b}{q} \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que $\frac{1}{q} \in G_\omega$. Comme p et q sont premiers, d'après le théorème de Bezout, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aq + bp = 1$, et en divisant par $q \neq 0$, on obtient $a + b\omega = \frac{1}{q}$ et donc $\frac{1}{q} \in G_\omega$.
Pour le lien avec les questions précédentes, si on calcule, la borne inférieure de $G_\omega \cap \mathbb{R}_+^*$, on cherche les entiers a, b tels que $a + b\frac{p}{q} > 0$ et $a + b\frac{p}{q}$ soit le plus petit possible ce qui revient à chercher $\frac{aq + bp}{q} > 0 \iff aq + bp > 0 \iff aq + bp \geq 1 \iff aq + bp = 1$, d'où pour a, b qui conviennent $a + b\frac{p}{q} = \frac{1}{q}$.
- c. Supposons $\omega \notin \mathbb{Q}$. G_ω est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, G_ω est donc de la forme $\beta\mathbb{Z}$ avec $\beta \in \mathbb{R}^*$ ou G_ω est dense dans $\mathbb{R}$ (cf 2, 3). On suppose donc qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^*$ tel que $G_\omega = \beta\mathbb{Z}$. Donc, il existe $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $0 + 1\omega = \beta m$ et $1 + 0\omega = \beta n$, ceci implique que $\beta = \frac{1}{n}$ et $\frac{\omega}{m} = \beta$ et ainsi $\omega = \frac{m}{n}$ ce qui est absurde puisque $\omega \notin \mathbb{Q}$.
En conclusion, G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.