UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupes 22.1 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Corrigé feuille d'exercices 1

Introduction au langage mathématique

Exercice 1

1. Cette implication est vraie car la fonction $x :\mapsto \sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Cette implication est vraie, il faut penser à ($P \implies Q \iff P$ est fausse ou Q est vraie), le fait que Q soit vraie explique le résultat.
3. L'implication est encore vraie, en reprenant le 2., sauf qu'ici on a P est fausse.
4. L'implication est fausse, en effet, si on a P est vraie et Q est fausse la proposition ($P \implies Q$ est fausse).
5. L'implication est vraie, il faut prendre cette implication comme un relation de cause-conséquence. C'est à dire, si on prend $x \in]-\infty, -4[$ alors $x^2 + 3x - 4 > 0$. Pour répondre, on peut étudier la fonction $x :\mapsto x^2 + 3x - 4$ ou voir que -4 est la plus petite racine du polynôme $P(x) = x^2 + 3x - 4$, on conclut en dissant que le polynôme est du signe du coffecient du mônome de degré 2 à l'extérieur des racines.
6. L'équivalence est fausse. On a montré dans 5. que l'implication $\Leftarrow$ est vraie. On peut considérer $x = 5$ par exemple, pour conclure que l'autre implication est fausse.
7. Cette implication est vraie si n est pair n et $n + 2$ sont multiples de 2 donc le produit des deux est multiple de 4.

Exercice 2 Si on a son permis de conduire alors c'est qu'on a plus de 18 ans. Par contre, toute personne de plus de 18 ans n'a pas de permis de conduire. On a par conséquent $P \implies Q$ mais $Q \implies P$ est fausse, on conclut que les deux propositions ne sont pas équivalentes.

Exercice 3

a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. (Identité remarquable)
b) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$. (Calculer le discriminant)
c) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = 0$. (équation du premier degré)
d) $\exists\, x \in \mathbb{N},\ x \leq \pi$. ($x = 3$ marche)
e) $\nexists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$. (Calculer le discriminant $\nexists$ à éviter si possible)
f) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \neq 0$.

Exercice 4

1. $\exists\, x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$. Vrai
2. $\forall\, x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$. Faux la négation est $\exists\, x \in \mathbb{N},\ x^2 \leq 7$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, y \in \mathbb{N},\ y > x^2$. Vrai
4. $\exists\, x \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in \mathbb{N},\ y > x^2$. Faux la négation $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, y \in \mathbb{N},\ y \leq x^2$.
5. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x \geq 0)$ ou $(x \leq 0)$. Vrai
6. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x \geq 0)$ et $(x \leq 0)$. Faux la négation $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (x < 0)$ ou $(x > 0)$.
7. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (x \geq 0)$ et $(x \leq 0)$. Vrai
8. $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, y \in \mathbb{N},\ x = y^2$. Faux la négation $\exists\, x \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in \mathbb{N},\ x \neq y^2$.

Exercice 5

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ N \geq x$.

2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ N < x$ ou il existe un réel x strictement inférieur à N pour tout entier naturel N.

Exercice 6 a) $(x \neq 2)$ ou $((x+y \neq 5)$ et $(y < 3))$.
b) $\exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - l| > \epsilon$.
c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \epsilon$.
d) $\forall k > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ |sin(x) - sin(y)| > k|x-y|$.
e) Il faut réécrire la proposition : Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $1 \in I$ et $I \cap]1,2[= \emptyset$. La négation devient : Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ $1 \notin I$ ou $I \cap]1,2[\neq \emptyset$ que l'on peut réécrire : Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ $1 \in I \implies I \cap]1,2[\neq \emptyset$.
f) Il faut réécrire la proposition : Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $1 \in I$ et $I \cap]1,2[= \{1\}$. La négation devient : Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ $1 \notin I$ ou $I \cap]1,2[\neq \{1\}$ que l'on peut réécrire : Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ $1 \in I \implies I \cap]1,2[\neq \{1\}$.
g) Je ne fais pas un métier qui me plait et je suis heureux.
h) Ma mémoire est parfaite et je ne me souviens pas de tout.

Exercice 7 1. Pour toute droite D, et pour tout point M du plan, si M n'appartient pas à D alors il existe une droite Δ parallèle à D telle que M appartienne à Δ.

2. Il existe une droite D et un point M du plan, M n'appartenant pas à D, telle que pour toute droite Δ, M n'appartient pas à Δ ou D et Δ sont sécantes.

$$\exists D \in \mathcal{D},\ \exists M \in \mathcal{P},\ ((M \notin D) \text{ et } (\forall \Delta \in \mathcal{D},\ ((M \notin \Delta) \text{ ou } (D \cap \Delta \neq \emptyset)))).$$

Exercice 8 Par la contraposée, c'est à dire on va montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$((x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)) \implies x = y.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \implies xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \implies xy - x + y - 1 - xy - x + y + 1 = 0 \implies 2(y-x) = 0 \implies (y-x) = 0 \implies y = x$

Exercice 9 Un produit d'entiers relatifs est un entier relatif, une somme d'entiers est entière. Il suffit de montrer que $6n^2 - 4n + 1$ est positif sur $\mathbb{R}$. On calcule le discriminant puis on conclut en disant que $6 > 0$.

Exercice 10 Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x = 2$, $|x-2| = 0$ et $x^2 - 2x + 3 = 3 > 0$, donc l'inégalité est vraie si $x = 2$.

Supposons maintenant que $x > 2$, $|x-2| = x - 2$, il faut montrer que : $x - 2 < x^2 - 2x + 3 \iff 0 < x^2 - 3x + 5$. On calcule encore le discriminant, il est négatif ce qui entrane que $p(x) = x^2 - 3x + 5$ est du signe de 1 donc strictement positif, ce qui est exactement ce qu'il fallait démontrer.

Supposons, enfin que $x < 2$, $|x-2| = -x + 2$, il faut montrer que : $-x + 2 < x^2 - 2x + 3 \iff 0 < x^2 - x + 1$. On peut calculer le discriminant... On peut aussi voir que, si $0 < x < 2$ alors $0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 < x^2 - x + 1$ et si $x \leq 0$ alors $0 < x^2 + 1 < x^2 - x + 1$. On conclut que l'inégalité est vraie pour ce dernier cas et donc l'inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe n entier naturel non nul tel que $n^2 + 1$ soit le carré d'un entier.

Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 + 1 = k^2$. On a $n^2 < k^2 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Comme la fonction $x :\mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, $n < k < (n+1)$. Donc, k est un entier strictement compris entre un entier et son successeur ce qui est absurde.

Exercice 12 Il suffit de donner un contre-exemple en prenant $n = 3$, on a $2^3 + 3^3 = 35$ qui est divisible par 5, la proposition est donc fausse.

Exercice 13 a) On raisonne par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n =$ "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$". On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisation. $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité. On suppose que la proposition P_n est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$, d'aprés l'hypothése de récurrence, on a $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$. On factorise l'intérieur de la parenthèse on trouve $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion. La proposition P_n est vraie au rang initial $n=0$ et de plus la proposition P_n est héréditaire par conséquent, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n=0$, $n! = 1$ donc la première inégalité est vraie si $n=0$. Maintenant, supposons que $n \in \mathbb{N}^*$, $(n-1)! > 1$ et $n \geq 1$ ceci implique que $n(n-1)! \geq n$ ce qui équivaut à $n! \geq n$. La première inégalité est ainsi démontrée.

Pour montrer la deuxième inégalité, on va raisonner par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n =$"$n^n \geq n!$".

Initialisation. $n=0$. Par continuité de l'exponentielle et du logarithme on peut poser $n^n = 1$, en effet $\exp(n \ln n) \to 1$ quand $n \to 0$. on obtient que $1 = n! \leq n^n = 1$. P_0 est donc vraie.

Hérédité. Supposons que P_n est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. D'après, l'hypothèse de récurrence, $n^n \geq n!$, $n+1$ est positif donc $(n+1)n^n \geq (n+1)!$. Or pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x :\mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, ceci entraine que $n^n \leq (n+1)^n$ d'où $(n+1)(n+1)^n \geq (n+1)!$ et finalement $(n+1)^{(n+1)} \geq (n+1)!$ ce qui était l'inégalité recherchée.

Conclusion. P_n est héréditaire et P_0 est vraie donc, d'après le principe de récurrence P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i \times i! = \sum_{i=0}^{n}(i+1-1) \times i! = \sum_{i=0}^{n}(i+1) \times i! - i! = \sum_{i=0}^{n}(i+1) \times i! - \sum_{i=0}^{n} i! = \sum_{i=0}^{n}(i+1)! - \sum_{i=0}^{n} i! =$
$1! + 2! + \cdots + n! + (n+1)! - (1 + 1 + 2! + \cdots + (n-1)! + n!) = (n+1)! - 1.$

d) Il s'agit encore une fois d'une récurrence....

Exercice 14 1. On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie en utilisant une récurrence double.

Initialisation. Pour $n=0$, $u_0 = 2$ et $1+2^0 = 1+1 = 2$, pour $n=1$, $u_1 = 3$ et $1+2^1 = 1+2 = 3$. P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité. Supposons que pour un certain rang n, P_n et P_{n+1} sont vraies et montrons que P_{n+2} est vraie. $n \in \mathbb{N}$ donc $n+2 \geq 2$ et $u_{n+2} = -2u_n + 3u_{n+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+2} = -2(1+2^n) + 3(1+2^{n+1})$ ceci implique que $u_{n+2} = -2 + -(2^{n+1}) + 3 + 3*(2^{n+1}) \implies u_{n+2} = 1 + 2*(2^{n+1}) = 1 + 2^{n+2})$. Donc P_{n+2} est vraie.

Conclusion. P_0 et P_1 sont vraies et P_n et P_{n+1} vraies $\implies$ P_{n+2} vraie, donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Supposons que pour un certain rang $n \geq 2$, Q_n et Q_{n+1} sont vraies et montrons que Q_{n+2} est vraie. $n \geq 2$, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+2} = -2(2^n) + 3(2^{n+1}) = (3-1)*(2^{n+1}) = 2^{n+2}$. Q_{n+2} est par conséquent vraie. La proposition "pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est vraie" est cependant fausse car $u_0 = 2 \neq 2^0$.

Exercice 15 Soient $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}+a^n) = 1 + a - a + a^2 - a^2 + \cdots + a^n - a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}$. Comme $a \neq 1$, on peut diviser par $1-a$ et on retrouve la formule demandée. Si $a = 1$, dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k$ il y a $n+1$ termes et par conséquent on ajoute $n+1$ fois 1 donc la somme devient $n+1$.

Exercice 16 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n :\ \forall x \geq -1,\ (1+x)^n \geq 1+nx$. On va montrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $n=0$, soit $x \geq -1$, $(1+x)^0 = 1$ et $1+0x = 1$, P_0 est donc vraie.

Hérédité. Supposons que P_n est vraie pour un certain rang n et montrons que P_{n+1} est vraie. Soit $x \geq 1$, d'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geq 1+nx$, or $1+x \geq 0$, on en déduit que $(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \implies (1+x)^{n+1} \geq (1+x+nx+nx^2)$ et $nx^2 \geq 0$ ceci implique que $(1+x+nx+nx^2) \geq 1 + x(1+n)$ et on conclut que P_{n+1} est vraie.

Conclusion. P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $3n(n+1)$ est un multiple de 3 et de plus, si n est pair, $3n$ est multiple de 6 et si n est impair, $n+1$ est pair et donc $3n(n+1)$ est un multiple de 6.
3. On peut démontrer que, pour tout $n^3 - n$ est multiple de 6 par récurrence et utiliser le 2)
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{6} = \dfrac{n^3 + 2n + 3n^2}{6} = \dfrac{n^3 - n + n + 2n + 3n^2}{6} = \dfrac{n^3 - n + 3n(n+1)}{6}$ et on utilise les deux questions précédentes.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est impair alors n^2 est impair, il suffit juste de calculer.... Il reste à montrer alors que n^2 impair $\implies n$ impair, une proposition qu'on démontre par la contraposée.
6. On peut faire un raisonnement par récurrence... Mais on peut aussi utiliser la fonction logarithme. En effet, comme $x :\mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{n+1} > (n+1)^n \iff (n+1)\ln n > n\ln(n+1) \iff \dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)}$. On pose maintenant pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Il suffit donc de montrer que f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2}$ et par conséquent $f'(x) < 0 \iff 1 - \ln(x) < 0 \iff x > e$. Finalement, f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$ donc pour tout $n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} \iff n^{n+1} > (n+1)^n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1)$ est le produit des facteurs impairs appartenant à $\{1, \ldots, 2n-1\}$ et $(2n)! = 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times P$ où P est le produit des facteurs pairs appartenant à $\{1, \ldots, 2n\}$. Par conséquent, $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{P}$. Comme il y a n facteurs pairs dans P on peut factoriser par 2^n, les éléments pairs de $\{1, \ldots, 2n\}$ divisés par 2 sont $1, 2, 3\ldots, n$ donc tous les nombres de 1 à n et finalement $P = (2^n \times n!)$. D'où, $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.