UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Feuille d'exercices 5

Continuité et dérivabilité

1 Limites

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \qquad \lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x}) \qquad \lim_{x\to +\infty} (x^3+1)^{1/3} - (x+1)$$

Exercice 2
Soit f une fonction périodique telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 3
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est bornée sur tout intervalle non vide fermé borné :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = l.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Indications : Pour un réel suffisamment grand, considérer une partie entière et sommer un nombre fini d'inégalités.

Exercice 4
Soient $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ admettant, en tout point de $[0;1]$, une limite finie et ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{array}$$

Montrer que ϕ est continue sur $[0;1]$.

2 Continuité

Exercice 5

1. Donner un exemple de fonction f discontinue sur tout $\mathbb{R}$, telle que $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de fonction $f : [0;1] \to [0;1]$ bijective et discontinue en tout point de $[0;1]$.

Exercice 6

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}^+$ et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x_0) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f(x)$.

Exercice 7

Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \mapsto \sup\{f(x), g(x)\}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le fait que f et g soient dérivables n'implique pas que $x \mapsto \sup\{f(x), g(x)\}$ soit dérivables.

Exercice 9

Soient $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sup\{f(t) \mid t \in [0,x]\} \end{array}$$

Montrer que ϕ est bien définie croissante et continue sur $[0;1]$.

Exercice 10

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_*^+$ tel que :

$$e^{u_n} = 1 + u_n + \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Exercice 11

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n + 2x^2 + x - 1 \end{array}$$

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique nombre réel x_n dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout réel $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et convergente.
3. Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n^n = 0$. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3 Dérivabilité

Exercice 12

1. Montrer que les fonctions :

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = x\sin(1/x) \text{ si } x \neq 0,\ g(0) = 0.$$

   sont continues mais non dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$f(0) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Exercice 14

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$ telle que :

$$f(a) = f(b) = 0,\ f'(a) < 0,\ f'(b) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 15

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = l.$$

Montrer que f est dérivable en 0 de dérivée l.

Indication : on pourra écrire :

$$f(x) - f(\frac{x}{2^n}) = \sum_{p=1}^{n} f(\frac{x}{2^{p-1}}) - f(\frac{x}{2^p})$$

Exercice 16

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)/2.$$

Exercice 17

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Exercice 18
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Montrer que, pour tout $c \in]a,b[$, il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(d).$$

Indication : Considérer $g(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{1}{2}K(x-a)(x-b)$.

Exercice 19
Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ qui s'annule en $n+1$ points de $[a,b]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 20
Soit $f :]-1,1[\mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Soit P_n le polynôme défini par :

$$P_0 = 1, \qquad P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (2n+1)XP_n.$$

Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Exercice 21
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel.
2. Etudier les suites $\left(f(\frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$ et $\left(f(\frac{\sqrt{2}}{n})\right)_{n\geq 1}$
3. Que peut-on conclure sur la continuité de f en 0 ?

Exercice 22
Soient f et g les applications définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \ln x$ et $g(x) = 4 - \ln x - x$.

1. Etudier les variations f et g.
2. Montrer que l'intervalle $[2, e^2]$ est stable par f. On rappelle : $2 < e < 9$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera l. Montrer : $2 < l < e^2$.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall\, x \in [2,e^2],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall\, x \in [2,e^2],\ \forall\, y \in [2,e^2], |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$
5. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 \in [2,e^2]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \in [2,e^2]$ pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer que, pout tout entier naturel n, $|u_n - l| \leq 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
   (c) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (d) Expliquer comment obtenir une approximation de l à 10^{-2} près.