UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupes 22.1 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Corrigé feuille d'exercices 4

Suites

1 Convergence de suites

Exercice 1
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante, si $non(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n)$ est vérifiée c'est à dire : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante si $\exists\, n \in \mathbb{N},$ tel que $u_{n+1} < u_n$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n)$ et donc l'énoncé précédent n'est pas équivalent à celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\dfrac{2n+1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\dfrac{-1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1}$. Soit $\epsilon > 0$. $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \epsilon$ équivaut à $\dfrac{1}{n+1} \leq \epsilon$. Or $\dfrac{1}{n+1} \leq \epsilon \iff \dfrac{1}{\epsilon} \leq n+1 \iff \dfrac{1}{\epsilon} - 1 \leq n$.

Finalement, $\forall\, \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ $(E(\dfrac{1}{\epsilon})$ convient), tel que, $\forall\, n \geq N$, $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \epsilon$.

Exercice 3
Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\dfrac{\ln a}{n})$ Finalement, quand $n \longrightarrow +\infty$, $u_n \longrightarrow 1$.

Exercice 4
On pose $\epsilon = \dfrac{l}{2} > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe donc, $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n - l| \leq \dfrac{l}{2}$. Or $|u_n - l| \leq \dfrac{l}{2}$ équivaut à $-\dfrac{l}{2} \leq u_n - l \leq \dfrac{l}{2}$. On obtient donc, pour $n \geq N_0$, $l - \dfrac{l}{2} \leq u_n$ et finalement, $\dfrac{l}{2} \leq u_n$.

Exercice 5
Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire i.e $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$. Ceci implique que $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0,\ 0 = |u_n - u_{n_0}| \leq \epsilon$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente et à valeurs entières et que la suite ne soit pas stationnaire i.e $\forall\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ u_n \neq u_{n_0}$ ce qui équivaut à $\forall\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ |u_n - u_{n_0}| > 0$ et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières, la dernière proposition est équivalente à $\forall\, n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ |u_n - u_{n_0}| \geq 1$.

Soit $\epsilon = \dfrac{1}{3}$, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on note $l \in \mathbb{R}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $k \geq n_1$, $|u_n - l| \leq \dfrac{1}{3}$. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire donc il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $|u_n - u_{n_0}| \geq 1$. D'où, $1 \leq |u_{n_1} - u_{n_2}| \leq |u_{n_1} - l| + |l - u_{n_2}| \leq \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ d'où la contradiction donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et à valeurs entières implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

De cette équivalence, on déduit que la limite d'une suite convergente à valeurs entières est entière.

Exercice 6

a) 1. Montrons qu'il existe $q, c \in \mathbb{R}$, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - c = q(u_n - c)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - c = q(u_n - c) \iff u_n(a-q) + b + c(q-1) = 0$. Comme q, c ne doivent pas dépendre de n, on peut prendre q tel que $(a-q) = 0$ c'est à dire que $q = a$. On obtient par conséquent, $b + c(a-1) = 0$ c'est à dire $c = \dfrac{-b}{a-1}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \dfrac{b}{a-1}$ est donc géométrique de raison a.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, $v_n = v_0(a)^n$. Si $|a| < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Si $|a| < 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{b}{a-1}$.

b) On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^n u_0 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a^i b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P(n)$ la proposition "$u_n = a^n u_0 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a^i b$".

.Initialisation : On pose $n = 1$, $u_1 = au_0 + b$, or, $a^1 u_0 = au_0$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} a^i b = b$.

La proposition $P(1)$ est donc vraie.

.Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain rang n, montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = au_n + b$, par hypothèse de récurrence, on obtient,

$$u_{n+1} = a(a^n u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b) + b = a^{n+1}u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b + b = a^{n+1}u_0 + \sum_{j=1}^{n} a^j b + b.$$

Finalement, $u_{n+1} = a^{n+1}u_0 + \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a^j b$ et $P(n+1)$ est vraie.

.Conclusion : $P(1)$ est vraie, de plus, $P(n)$ vraie implique que $P(n+1)$ est vraie, donc, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

On réécrit la formule précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et si $a \neq 1$,

$$u_n = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

On conclut que, si $|a| < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{b}{a-1}$, si $a > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ si $\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) > 0$, vers $-\infty$ si $\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) < 0$ et $\dfrac{b}{1-a}$ si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$ (la suite est constante). Si $a < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(u_n - 1) = \dfrac{1}{3}w_n$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

2. Comme $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. On déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 9\dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{2}$ et $S_n = T_n + n + 1$. On conclut que, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{9}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 8

1. On montre, par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $u_n > 1$.

Initialisation Comme, $u_2 = 3 > 1$, la propriété est vraie au rang initial.

Hérédité Supposons que, pour un certain rang $n \geq 2$, $u_n > 1$, montrons que $u_{n+1} > 1$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n > 1$, or $u_n > 1 \implies u_n - 1 > 0 \implies 2(u_n - 1) > 0 \implies 3u_n - 1 - u_n - 1 > 0 \implies 3u_n - 1 > u_n + 1$ et$u_n > 1 \implies \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} > 1 \implies u_{n+1} > 1$.
On conclut que $u_n > 1 \implies u_{n+1} > 1$.
Conclusion La propriété est vraie au rang initial ($u_2 > 1$) et $u_n > 1 \implies u_{n+1} > 1$ donc, par le principe de récurrence, $u_n > 1$ pour tout $n \geq 2$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puisque $u_n > 1 > -1$, pour tout $n \geq 2$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie d'après la question précédente. Soit $n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1} - \dfrac{u_n+1}{u_n-1}$. On en déduit :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{\dfrac{3u_n - 1 + u_n + 1}{u_n + 1}}{3u_n - 1 - u_n - 1} - \frac{u_n + 1}{u_n - 1}.$$
Puis, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{4u_n}{2u_n - 2} - \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} = \dfrac{2u_n - u_n - 1}{u_n - 1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour tout $n \geq 2$, $v_n = n - 2 + v_2 = n - 2 + 2 = n$.
3. Par conséquent, pour $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \implies v_n(u_n - 1) = u_n + 1 \implies u_n(v_n - 1) = v_n + 1 \implies u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$ ($v_n \neq 1$ sinon $u_n + 1 = u_n - 1 \iff -1 = 1$ ce qui evidemment faux). On conclut que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{n+1}{n-1}$ et donc $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.
4. La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est arithmétique de raison 1 donc, pour $n \geq 2$, $S_n = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$, elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a $E(kx) \leq kx \leq E(kx) + 1$ donc $kx - 1 \leq E(kx) \leq kx$.
Par conséquent,
$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}(kx - 1)\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(kx)\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} kx\right)$$
ce qui implique que,
$$\frac{1}{n^2}\left(x\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(kx)\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(x\sum_{k=1}^{n} k\right)$$
puis que,
$$\frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(kx)\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
enfin que,
$$x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(kx)\right) \leq x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right).$$
Or $x\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}\right) - \dfrac{1}{n}$ et $x\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}\right)$ tendent vers $\dfrac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

On conclut, par le théorème de comparaison (théorème des gendarmes), que $\dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)\right)$ tend vers $\dfrac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

Par définition de la partie entière, $E(nx) \leq nx \leq E(nx) + 1$ ce qui entraine, $nx - 1 \leq E(nx) \leq nx$. En divisant par n non nul, on obtient, $x - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{E(nx)}{n} \leq x$. Puis, en faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut en utilisant le théorème de comparaison que, $\dfrac{E(nx)}{n}$ tend vers x quand n tend vers $+\infty$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(nx) \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{E(nx)}{n} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{E(nx)}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers x, et le réel x est limite de rationnels.

Exercice 11

1. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ converge vers $l \geq 0$. Par définition, en posant, $\epsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$ car $l < 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \implies \left|\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| \leq \dfrac{1-l}{2}$ ce qui entraine, pour $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq l + \frac{1-l}{2} = \frac{2l+1-l}{2} = \frac{l+1}{2} \tag{1}$$

De plus, $\dfrac{l+1}{2} < 1$ car $l < 1$.

Soit maintenant, $n \geq n_0$, $|u_n| = \left|\left|\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right|\left|\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right|\cdots\left|\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right|\right|$.

D'où,

$$|u_n| = \left|\prod_{k=0}^{n-n_0-1}\left|\frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0+k}}\right|\right| \tag{2}$$

En utilisant, (1) et (2), on déduit que,

$$|u_n| \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} \tag{3}$$

pour tout $n \geq n_0$. Or $\left(\dfrac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}$ converge vers 0, donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$, (nécessairement $n_1 \geq n_0$) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ implique que $|u_n| \leq \left(\dfrac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} \leq \epsilon$.

On conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Il suffit d'adapter la méthode de 1. En remarquant qu'ici, en posant, $\epsilon = \dfrac{l-1}{2} > 0$, car $l > 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \implies \left|\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| \leq \dfrac{l-1}{2}$ puis que, $-\dfrac{l-1}{2} \leq \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l$ et enfin, $1 < \dfrac{l+1}{2} \leq \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

On montre grâce à la dernière inégalité que $\left(\dfrac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} \leq |u_n|$, pour tout $n \geq n_0$. Comme, $\left(\dfrac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on déduit que, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies A \leq \left(\dfrac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} \leq |u_n|$ et $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. Comme $l<1$, on peut reprendre n_0 tel que (3) soit vérifiée.
De plus, la suite $\left(\left(\frac{l+1}{2}\right)^{-n_0}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (série géométrique de raison strictement inférieure à 1), elle donc de Cauchy, pour tout, ϵ, il existe n_1 tel que, pour tout n, m, entiers, $m,n\geq n_1 \implies \left(\frac{l+1}{2}\right)^{-n_0}\left|\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{k}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{k}\right)\right|\leq\epsilon$, ce qui est équivalent à

$$m,n\geq n_1 \implies \left(\left(\frac{l+1}{2}\right)^{-n_0}\sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{k}\right)\leq\epsilon. \tag{4}$$

Soit $\epsilon>0$, soit $n_1\in\mathbb{N}$ tel que (4) soit vérifiée. On pose $N=\max(n_0,n_1)$, soient, m, n entiers, tels que $m,n\geq N$. On a donc $|v_n-v_m|=\left|\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{m}u_k\right|=\left|\sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}u_k\right|\leq\sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}|u_k|$, par l'inégalité triangulaire.
Or, $k\geq\min(m,n)+1\geq N\geq n_0$ donc $|u_k|\leq\left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-n_0}$ pour tout $k\in\{\min(m,n)+1,\ldots,\max(m,n)\}$ puis en sommant on obtient,
$\sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}|u_k|\leq\left(\left(\frac{l+1}{2}\right)^{-n_0}\sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}\left(\frac{l+1}{2}\right)^{k}\right)$.
Comme, $m,n\geq N\geq n_1$, on a (4) et on en déduit que $|v_n-v_m|\leq\epsilon$.
En conclusion, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente.

Exercice 12

Convergence

1. La sous-suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée des éléments de rangs pairs est constante, égale à 1 alors que la sous-suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée des éléments de rangs impairs est constante, égale à -1. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux sous-suites qui ne tendent pas vers la même limite, elle diverge.
2. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a>0$. $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}$ qui converge vers 0, on conclut, en utilisant l'Exercice 10 que $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$, $\frac{n!}{n^n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$, or, pour tout $k\in\{2,\ldots,n\}$, $\frac{k}{n}\leq 1$ d'où, $\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n}$ et finalement, la suite $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\right)$. Or, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, par continuité de la fonction logarithme, $\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ tend vers $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$ et enfin par continuité de la fonction exponentielle, $\exp\left(n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
5. Soit $n\geq 2$, $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{n}\implies 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\leq 2-\frac{1}{n}$. On déduit, par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\ln\left(\frac{3}{2}\right)\leq\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)$, puis en multipliant par n positif, $n\ln\left(\frac{3}{2}\right)\leq n\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)$ et enfin, par croissance de l'exponentielle, $\exp\left(n\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\leq\exp\left(n\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)$. On conclut

que, $\left(\left(2-\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. En utilisant un développement limité pour n assez grand, on obtient $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. De plus, $\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = no\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Finalement, $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\frac{1}{n} + no\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, d'où, $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\exp(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Monotonie 1. Soit $n \geq 2$, $(n+1)^2 + (-1)^{n+1} - n^2 - (-1)^n = (n+1)^2 - n^2 + 2((-1)^{n+1}) = 2n+1+2((-1)^{n+1}) \geq 2n-1$. Or $n \geq 2$ donc $2n-1 > 0$. On déduit que, $\left(\frac{1}{n^2+(-1)^n}\right)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$. D'où, $\frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$ est du signe de $(n+2)^2-(n+1)(n+3)$. Or, $(n+2)^2-(n+1)(n+3) = n^2+4n+4-n^2-4n-3 = 1$, par conséquent $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Comme $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, on déduit que, $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 13

1. On applique un théorème du cours qui affirme qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite. La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_1 donc $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1. Mais, $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une sous-suite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_2 donc $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2, la limite d'une suite étant unique, $l_1 = l_2$.
En utilisant, $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ qui une sous-suite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_3, on montre que $l_2 = l_3$. On déduit que $l_1 = l_3$, et donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite ce qui implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit $\mathbb{P}$, l'ensemble des nombres premiers, c'est un ensemble infini.
Pour $n \in \mathbb{P}$, on pose $v_n = 1$.
Pour tout $k \geq 2$, pour tout $n \geq 2$, on pose $v_{kn} = 0$, ce qui implique que les suites, $(v_{kn})_{n\geq 2}$ convergent vers 0, pour tout $k \geq 2$.
Soit la fonction ϕ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n)$ est le $n-ième$ nombre premier. On a alors $\left(v_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
On a construit une sous-suite qui ne convergeait pas vers 0, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.

Exercice 14

1. (a) Soit $\epsilon > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l, alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. De plus, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1 \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. On pose, $N = \max(n_0, n_1)$, et soit $n \geq N$ entier. $\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\right) - l\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k - nl\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - l|$, en utilisant, l'inégalité triangulaire.
Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - l| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k - l|$. Comme $n \geq n_1$, le premier terme de la

somme est majoré par $\frac{\epsilon}{2}$ et le second terme de la somme est majoré par $\frac{\epsilon(n-n_0)}{2}$ et comme $n \geq n_0$ et que $n_0 \geq 0$, $\frac{\epsilon(n-n_0)}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$ et finalement, $\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

(b) On prend la suite $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, elles sont bornnées. On a donc, il existe $U, V \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq U$ et $|v_n| \leq V$.
Soit $\epsilon > 0$.
soit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N_1 \implies |u_n - u| < \frac{\epsilon}{3(U+V)}$ et $n \geq N_2 \implies |v_n - v| < \frac{\epsilon}{3(U+V)}$.
De plus, $\left(\frac{N_1}{n}(UV + (|uv|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{N_2}{n}(UV + (|uv|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, il existe, $N_3, N_4 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N_3 \implies \frac{N_1}{n}(UV+(|uv|) \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $n \geq N_4 \implies \frac{N_2}{n}(UV+(|uv|) \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Soit maintenant, $n \geq \max(N_1 + N_2, N_3, N_4)$,
$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k v_{n+1-k} - uv)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k v_{n+1-k} - uv|$, grâce à l'inégalité triangulaire.
Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k v_{n+1-k} - uv|$
$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k v_{n+1-k} - uv| + \frac{1}{n}\sum_{k=n-N_2+1}^{n}|u_k v_{n+1-k} - uv| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|u_k v_{n+1-k} - uv|$
Par ailleurs, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k v_{n+1-k} - uv| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(|u_k v_{n+1-k}| + |uv|) \leq \frac{N_1}{n}(UV + (|uv|)$ et
$\frac{1}{n}\sum_{k=n-N_2+1}^{n}|u_k v_{n+1-k} - uv| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n-N_2+1}^{n}(|u_k v_{n+1-k}| + uv|) \leq \frac{n-(n-N_2+1)+1}{n}(UV+(|uv|)$.
On a aussi $\frac{n-(n-N_2+1)+1}{n}(UV + (|uv|) = \frac{N_2}{n}(UV + (|uv|)$.
L'entier n est plus grand que N_3, ceci implique que $\frac{N_1}{n}(UV + (|uv|) \leq \frac{\epsilon}{3}$, comme n est aussi plus grand que N_4, ceci entraine que $\frac{N_2}{n}(UV + (|uv|) \leq \frac{\epsilon}{3}$.
De plus,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|u_k v_{n+1-k} - uv| \\
\leq\ & \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|u_k v_{n+1-k} - uv + uv_{n+1-k} - uv_{n+1-k}| \\
\leq\ & \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|(u_k - u)v_{n+1-k} + u(v_{n+1-k} - v| \\
\leq\ & \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|(u_k - u)v_{n+1-k}| + |u(v_{n+1-k} - v)| \\
\leq\ & \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|(u_k - u)v_{n+1-k}| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-N_2}|u(v_{n+1-k} - v)|
\end{aligned}$$

L'entier n est plus grand que N_1 et N_2, on en déduit que, $\leq \dfrac{n-N_2-(N_1+1)+1}{n}\dfrac{V\epsilon}{3(U+V)}+\dfrac{n-N_2-(N_1+1)+1}{n}\dfrac{U\epsilon}{3(U+V)}=\dfrac{n-N_2-N_1}{n}\dfrac{(U+V)\epsilon}{3(U+V)}$.

Finalement, $\left|\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n+1-k}-uv\right|\leq\dfrac{2\epsilon}{3}+\dfrac{n-N_2-N_1}{n}\dfrac{\epsilon}{3}\leq\epsilon$, n étant plus grand que la somme et N_1+N_2 est positif.

3. Soit $\epsilon>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l, alors, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0 \implies |u_n-l|\leq\dfrac{\epsilon}{2}$. De plus, il existe $n_1\in\mathbb{N}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_1 \implies \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n_0}C_n^k|u_k-l|\leq\dfrac{\epsilon}{2}$. On pose, $N=\max(n_0,n_1)$, et soit $n\geq N$ entier. $\left|\left(\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^ku_k\right)-l\right|=\left|\dfrac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^ku_k-2^nl\right)\right|$. Or, en utilisant le binôme de Newton, $(1+1)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k1^k1^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k=2^n$. D'où, $\left|\dfrac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^ku_k-2^nl\right)\right|=\dfrac{1}{2^n}\left|\sum_{k=1}^{n}C_n^k(u_k-l)\right|\leq\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k|u_k-l|$, en utilisant, l'inégalité triangulaire.
   Or $\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k|u_k-l|=\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n_0}C_n^k|u_k-l|+\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}C_n^k|u_k-l|$. Comme $n\geq n_1$, le premier terme de la somme est majoré par $\dfrac{\epsilon}{2}$.
   Pour le second terme de la somme, on a $\sum_{k=n_0+1}^{n}C_n^k\leq\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$, d'où, comme pour tout $k=n_0+1,\dots,n$, $|u_k-l|\leq\dfrac{\epsilon}{2}$, on a $\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}C_n^k|u_k-l|\leq\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{\epsilon}{2}$. On en déduit que, $\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}C_n^k|u_k-l|\leq\dfrac{\epsilon}{2}\dfrac{1}{2^n}2^n=\dfrac{\epsilon}{2}$.
   Finalement, $\left|\left(\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^ku_k\right)-l\right|\leq\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k|u_k-l|\leq\dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon$.
4. La suite $\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l>0$, par continuité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, $\left(\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(l)$. D'après 1., $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\dfrac{u_k}{u_{k-1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(l)$. On en déduit que, $\dfrac{1}{n}(\ln(u_n-\ln(u_0))\mapsto\ln(l)$ puis que $\dfrac{1}{n}\ln(u_n)\longrightarrow\ln(l)$. Par continuité de l'exponentielle, on conclut que, $u_n^{1/n}=\exp\left(\dfrac{1}{n}(\ln(u_n))\right)\longrightarrow\exp(\ln(l))=l$.

2 Suites adjacentes

Exercice 15

1. On va montrer que les deux suites sont adjacentes. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)!}>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, par conséquent, strictement croissante. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Soit $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}-\dfrac{1}{n.n!}=\dfrac{-1}{n!n(n+1)^2}<0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Montrons maintenant que $\lim_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$. Soit $n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=\dfrac{1}{n.n!}$ d'où, $\lim_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$.

On conclut que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2. On pose $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Supposons, $e\in\mathbb{Q}$, il existe $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}$, $b>1$ tels que $e=\dfrac{a}{b}$. On pose $x = b!\left(e-\displaystyle\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)$. Or, on a $b! = b(b-1)\dots(n+1)n!$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b!\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)\in\mathbb{N}$, de plus, $b!e = a(b-1)!\in\mathbb{N}$. On conclut que $x\in\mathbb{Z}$. En outre, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, $e-\displaystyle\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}$ est strictement positif, d'où $x\in\mathbb{N}^*$.

   Par ailleurs $x = b!\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)$ que l'on peut réécrire, $x = b!\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{n=b+1}^{N}\frac{1}{n!}\right)$.
   Soit $N\in\mathbb{N}$, $N>b+1$,
$$\begin{aligned} b!\sum_{n=b+1}^{N}\frac{1}{n!} &= b!\left(\frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}\dots+\frac{1}{(b+N-b)!}\right)\\ &= \left(\frac{1}{(b+1)}+\frac{1}{(b+2)(b+1)}\dots+\frac{1}{N(N-1)\dots(b+1)}\right).\end{aligned}$$
   Mais, pour tout $k\geq 2$, $0<\dfrac{1}{b+k}<\dfrac{1}{b+1}$, donc, pour tout $M\in\mathbb{N}$, $M>1$,
$$0<\prod_{k=1}^{M}\frac{1}{b+k}<\left(\frac{1}{b+1}\right)^{M}$$
   donc $\dfrac{1}{(b+1)}+\dfrac{1}{(b+2)(b+1)}\dots+\dfrac{1}{N(N-1)\dots(b+1)}<\dfrac{1}{(b+1)}+\left(\dfrac{1}{b+1}\right)^2+\dots+\left(\dfrac{1}{b+1}\right)^{N-b}$.
$$b!\sum_{n=b+1}^{N}\frac{1}{n!}<\sum_{k=1}^{N-b}\left(\frac{1}{b+1}\right)^k=\frac{1}{b+1}\,\frac{1-\left(\frac{1}{b+1}\right)^{N-b}}{1-\left(\frac{1}{b+1}\right)}=\frac{1}{b}\left(1-\left(\frac{1}{b+1}\right)^{N-b}\right).$$
   En considérant la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient, $x\leq\dfrac{1}{b}<1$ puisque $b>1$. On conclut que $x\in\mathbb{N}$ et $x\in]0,1[$ ce qui est absurde donc e est irrationnel.

Exercice 16

1. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$, la proposition "$u_n\leq u_{n+1}\leq v_{n+1}\leq v_n$". On va montrer, par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

   .Initialisation $n=0$. Comme, $u_0\leq v_0$, $u_1=\dfrac{3u_0+v_0}{4}\geq\dfrac{3u_0+u_0}{4}=\dfrac{4u_0}{4}=u_0$ et $u_1=\dfrac{3u_0+v_0}{4}\leq\dfrac{u_0+2u_0+v_0}{4}=\dfrac{u_0+2v_0+v_0}{4}=\dfrac{u_0+3v_0}{4}=v_1$. En utilisant encore une fois que $u_0\leq v_0$, $v_1=\dfrac{3v_0+u_0}{4}\leq\dfrac{3v_0+v_0}{4}=v_0$.
   On conclut que, $u_0\leq u_1\leq v_1\leq v_0$, d'où, $P(0)$ est vraie.

   .Hérédité Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang n et montrons que, $P(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n\leq u_{n+1}\leq v_{n+1}\leq v_n$.
   De $u_{n+1}\leq v_{n+1}$, on déduit que, $u_{n+2}=\dfrac{3u_{n+1}+v_{n+1}}{4}\geq\dfrac{3u_{n+1}+u_{n+1}}{4}=\dfrac{4u_{n+1}}{4}=u_{n+1}$ et que $u_{n+2}=\dfrac{3u_{n+1}+v_{n+1}}{4}\leq\dfrac{u_{n+1}+2u_{n+1}+v_{n+1}}{4}=\dfrac{u_{n+1}+2v_{n+1}+v_{n+1}}{4}=\dfrac{u_{n+1}+3v_{n+1}}{4}=v_{n+2}$.
   De $u_{n+1}\leq v_{n+1}$, on déduit que, $v_{n+2}=\dfrac{3v_{n+1}+u_{n+1}}{4}\leq\dfrac{3v_{n+1}+v_{n+1}}{4}=v_{n+1}$.
   On conclut que, $u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq v_{n+2}\leq v_{n+1}$, d'où $P(n+1)$ est vraie.

.Conclusion La proposition $P(0)$ est vraie, de plus, $P(n)$ vraie implique que $P(n+1)$ est vraie, on conclut, par le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \dfrac{3v_{n-1} + u_{n-1} - 3u_{n-1} - v_{n-1}}{4} = \dfrac{2(v_{n-1} - u_{n-1})}{4} = \dfrac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$.
On a montré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n - u_n = \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \tag{5}$$
On va montrer, par récurrence que, $v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.
.Initialisation $n = 1$. D'après, (5), on a $v_1 - u_1 = \dfrac{1}{2}(v_0 - u_0)$ et donc la proposition est vraie pour le rang initial.
.Hérédité Supposons que la proposition est vraie pour un certain rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
D'après, (5), on a, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$, or d'après l'hypothèse de récurrence, $v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ et on déduit que, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$.
La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
.Conclusion La proposition est vraie au rang initial $n = 1$, de plus, si la proposition est vraie au rang n, alors la proposition au rang $n+1$, d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ et donc, la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge géométriquement vers 0.

3. D'après 1. et 2., on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent (vers la même limite).
En utilisant 1., on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0 par exemple) donc elle converge. Par ailleurs, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant et minorée (par u_0 par exemple) donc elle converge.

Exercice 17

1. On va montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.
.Initialisation Pour $n = 0$, par définition de a et b, on a $a_0 = a \geq 0$, et $b_n = b \geq 0$.
.Hérédité Supposons que la proposition est vraie pour un certain rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$, donc $\sqrt{a_n b_n}$ est bien définie et a_{n+1} existe et est positive en tant que racine carrée. De plus, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ implique que $\dfrac{a_n + b_n}{2} \geq 0$.
La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
.Conclusion La proposition est vraie au rang initial $n = 0$ et si la proposition est vraie au rang n, alors la proposition est vraie au rang $n+1$, d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1} - \sqrt{a_n b_n}}{2} = \dfrac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}{2} \geq 0$. On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geq a_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme, $a_n \leq b_n$ et que $x :\mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n \geq \sqrt{a_n a_n} - a_n = a_n - a_n = 0$. On conclut que $a_{n+1} \geq a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme, $a_n \leq b_n$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n \leq \dfrac{b_n + b_n}{2} - b_n = b_n - b_n = 0$. On conclut que $b_{n+1} \leq b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 \dfrac{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)\dfrac{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}}$.

Par ailleurs, $\sqrt{a_n}$ est positif et $a_n \leq b_n$, par la croissance de la racine carrée, on obtient $\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \geq 0$ donc $0 \leq \sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_n}$, puis, $\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}$, ce qui implique que $0 \leq \dfrac{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} \leq 1$.

Finalement, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)\dfrac{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} \leq \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Par un raisonnement par récurrence, on montre que $b_n - a_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (b-a)$ puis on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$, grâce à la question 2., on conclut que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et par conséquent, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite qu'on note $M(a,b)$.
5. Si $a_0 = b$ et $b_0 = a$, a_1 et b_1 sont inchangés, les suites sont inchangées et la limite est donc inchangée et donc $M(a,b) = M(b,a)$.
   Soit $\lambda > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \lambda\sqrt{a_n b_n}$. La fonction racine carrée étant continue $\left(\sqrt{a_n b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M(a,b)^2} = M(a,b)$ car $a_n \geq 0$ ce qui implique par passage à la limite que $M(a,b) \geq 0$ et $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M(\lambda a, \lambda b)$, par unicité de la limite, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

Exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx.$
   Or, pour tout $x \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{n+1}$ et $n < n+1$ donc, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \leq 0$ d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx.$
   Or, pour tout $x \in [n+1, n+2]$, $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n+2}$ et $n+1 < n+2$ donc,
   $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$ d'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln \dfrac{n+1}{n}\right) = 0.$
   Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite que l'on note γ.
   Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $\gamma \leq u_1 = 1 - \ln(1) = 1$ et comme, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $\gamma \geq v_1 = 1 - \ln(2)$.

3 Suites récurrentes

Exercice 19

On va montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Comme $u_0 = 1 > 0$, la proposition est vraie au rang initial.

Supposons que la propoposition est vraie pour un certain rang n et montrons que la proposition est vraie au rang $n+1$.

Comme, $u_n > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n} > 0$ et donc $u_n > 0 \implies u_{n+1} > 0$.

On conclut que, la proposition est vraie au rang initial, par ailleurs, si la proposition est vraie au rang n, alors la proposition est vraie au rang $n+1$, on conclut par le principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et donc la suite est bien définie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ et par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Puisqu'elle est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera l et $l \geq u_0 = 1$. La fonction $x :\mapsto x + \dfrac{1}{x}$, est continue sur $[1, +\infty[$. Le réel l vérifie donc $l = l + \dfrac{1}{l} \implies \dfrac{1}{l} = 0$ ce qui est absurde et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et donc tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20

On va montrer, tout d'abord, que la suite est bien définie.

Il suffit de montrer que l'ensemble $[0, +\infty]$ est stable par la fonction g définie par, pour $x \in [-1, +\infty]$, $g(x) = \sqrt{1+x}$.

Soit $x \geq 0$, comme la fonction racine carré est croissante, $g(x) = \sqrt{x+1} \geq 1$ d'où, $g(x) \in [0, +\infty[$. L'ensemble $[0, +\infty[$ est stable par g et $u_0 \in [0, +\infty[$, on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Par ailleurs, g est croissante, en tant que composée de fonctions croissantes, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Pour connaître la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit d'étudier le signe de $u_1 - u_0$, or $u_1 - u_0 = 1 - 0 \geq 0$, et on conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Résolvons, l'équation $l = g(l)$. Mais, $l = g(l) \iff l = \sqrt{1+l} \iff l^2 - l - 1 = 0$ et $l \geq 0$. Le polynôme $x^2 - x - 1$ a pour racine positive, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On conclut que $l = g(l) \iff l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

Montrons que l'ensemble $[0, l]$ est stable par g. Comme g est croissante, $g([0, l]) = [g(0), g(l)] = [1, l]$. L'ensemble $[0, l]$ est stable par g, $u_0 \in [0, l]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, l]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge vers un réel que l'on note u. Comme g est continue, $g(u) = u$ et $u \geq 0$. On conclut que $u = l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 21

1. La fonction f est définie ssi $6 - x \geq 0$ ce qui équivaut à $x \leq 6$. La fonction est décroissante en tant que composée d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		6
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2. Montrons que l'ensemble $[-30, 6]$ est stable par f. Comme f est décroissante, $f([-30, 6]) = [f(6), f(-30)] = [0, 6]$. L'ensemble, $[-30, 6]$ est inclus dans l'ensemble de définition de f et stable par f donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| = |\sqrt{6-u_n} - 2| = \left|\dfrac{6-u_n-4}{\sqrt{6-u_n}+2}\right| = \left|\dfrac{2-u_n}{\sqrt{6-u_n}+2}\right|$. Or, $\sqrt{6-u_n} + 2 \geq 2$, d'où, $\dfrac{|2-u_n|}{\sqrt{6-u_n}+2} \leq \dfrac{|2-u_n|}{2}$.

   Par un raisonnement par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

   Finalement, $(|u_n - 2|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ce qui implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Exercice 22

1. La fonction f est définie ssi $x \geq -6$. Il faudrait montrer que $[-6, +\infty]$ est stable par f, pour tout $x \geq -6$, $f(x) \geq 0$ ce qui implique que $[-6, +\infty]$ est stable par f. On conclut que, comme $u_0 \geq -6$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

2. Comme, $\sqrt{6+x}$ est positive, $f(x) = x \implies x \geq 0$. De plus, $-6 \leq x \leq 0$ implique que $-x \geq 0$ d'où, $\sqrt{6+x} - x \geq 0$.

   Soit P le polynôme $x^2 - x - 6$. P a pour discriminant $(-1)^2 - 4 * (-6) = 1 + 24 = 25$. P a pour racines $\dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $\dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

On a donc $P = (x+2)(x-3)$, P est du signe de -1 à l'extérieur des racines donc négatif sur $]-\infty,-2[\cup[3,+\infty[$ et positif sur $[-2,3]$. Sur l'ensemble, $[0,+\infty[$, on a $\sqrt{6+x} \geq x \implies 6+x-x^2 \geq 0$, on a donc $f(x)-x \geq 0 \iff -(x+2)(x-3) \geq 0$ si $x \in [0,+\infty]$.

On conclut que $f(x)-x$ est négatif si $x \in ((]-\infty,-2[\cup[3,+\infty[) \cap [0,+\infty[) = [3,+\infty[$ et positif si $x \in [-6,0] \cup ([-2,3] \cap [0,+\infty[) = [-6,3]$.

La fonction f est croissante sur $[-6,+\infty[$, en tant que composée de fonctions croissantes, on a, par conséquent, $f([-6,3]) = [f(-6), f(3)] = [0,3] \subset [-6,3]$, d'où $[-6,3]$ stable par f et $f([3,+\infty[) = [f(3), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [3,+\infty[$, d'où $[3,+\infty[$ stable par f.

3. On suppose que $u_0 \in [-6,3]$, comme f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus, sur $[-6,3]$, $f(x) \geq x$, on a donc $u_1 = f(u_0) \geq u_0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3, ce qui implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel qu'on notera l. Par ailleurs, f est continue, par conséquent, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers l. On a par conséquent $l = f(l)$ et $l \geq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive. On conclut que l est la racine positive de P c'est à dire 3.

Exercice 23

1. On pose $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ Soit la fonction ϕ de E dans $\mathbb{C}^2$ définie par, pour $u \in E$, $\phi(u) = (u_0, u_1)$.

   L'ensemble E est un espace vectoriel.

   Montrons que ϕ est un isomorphisme vers $\mathbb{C}^2$.

   Soeint $c \in \mathbb{C}$ et $u, v \in E$, $\phi(cu+v) = (cu_0+v_0, cu_1+v_1) = c(u_0,u_1) + (v_0,v_1) = c\phi(u) + \phi(v)$. La fonction ϕ est donc linéaire.

   Soit $u \in E$, tel que $\phi(u) = 0$ c'est à dire que, $u_0 = u_1 = 0$. Par récurrence double, on montre que, $u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\phi(u) = 0 \implies u = 0$ donc ϕ est injective.

   Soient $c, d \in \mathbb{C}^2$, on pose $u_0 = c$ et $u_1 = d$, puis, pour $n \geq 2$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On a donc $u \in E$ et $\phi(u) = (c,d)$. La fonction ϕ est donc surjective.

   Finalement, ϕ est un isomorphisme de E vers $\mathbb{C}^2$. E est un espace vectoriel de dimension de E.

2. (a) Montrons que, $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une famille libre de E.

   Montrons d'abord que, pour $i = 1, 2$, $(r_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E. C'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_i^{n+2} = ar_i^{n+1} + b$. Soit $P(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition $r_i^{n+2} = ar_i^{n+1} + br_i^n$. Montrons, par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme r_i est une racine de $x^2 = ax + b$, on $r_i^2 = ar_i^1 + br_i^0 = ar_i^1 + b$. La proposition $P(0)$ est vraie.

   Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang n et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

   Par hypothèse de récurrence, $r_i^{n+2} = ar_i^{n+1} + br_i^n$. En multipliant par r_i, on obtient, $r_i^{n+3} = ar_i^{n+2} + br_i^{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie.

   En conclusion, comme $P(0)$ est vraie, $P(n)$ vraie implique que $P(n+1)$ est vraie, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha r_1^n + \beta r_2^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\alpha, \beta \neq (0,0)$. En prenant, $n = 0$, on obtient $\alpha = -\beta$. Puis pour $n = 1$, $\alpha r_1 + \beta r_2 = \alpha r_1 - \alpha r_2 = 0$. D'où, $r_1 = r_2$ puisque $\alpha \neq 0$.

   Or r_1 et r_2 sont distinctes, on en déduit que $\alpha, \beta = (0,0)$. Finalement, $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de E. $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de cardinal 2, donc elle forme une base et $E = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$.

   (b) Le complexe r est l'unique racine du polynôme $x^2 - ax - b$ donc $r = \dfrac{a}{2}$.

   En utilisant le résultat du a), on a $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ On a, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nr^{n+2} = anr^{n+1} + nbr^n$. De plus, $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+2} = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+1}$, d'où, $2\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+2} = a\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+1}$. Par conséquent, $2r^{n+2} = ar^{n+1}$.

   Donc, $(n+2)r^{n+2} = nr^{n+2} + 2r^{n+2} = nar^{n+1} + nbr^n + 2r^{n+2} = nar^{n+1} + nbr^n + ar^{n+1} = a(n+1)r^{n+1} + bnr^n$. On conclut que, $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Montrons que, $((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une famille libre de E. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tels que $\alpha r^n+\beta nr^n=0$ quelque soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $n=1$, $\alpha r+\beta r=0$, d'où, $\alpha=-\beta$. Pour $n=2$, $\alpha r^2+2\beta r^2=\alpha r^2-2\alpha r^2=-\alpha r^2=0$, r est non nul d'où, $\alpha=0$ puis $\beta=0$.

Finalement, $((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une famille libre de E et puisque E et un espace vectoriel de dimension 2, $((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de E et
$E=\{((\lambda+n\mu)r^n)_{n\in\mathbb{N}}:\lambda,\mu\in\mathbb{C}\}$.

3. (a) Soit P le polynôme, $x^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}$. Les racines sont $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{2}$. La suite u s'écrit alors $\lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. Pour calculer λ et μ, on sait que $u_0=u_1=1$ d'où, $u_0=1=\lambda+\mu$ et $u_1=1=\lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)+\mu\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

On déduit que $\mu=1-\lambda$ et que $1=\lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)+(1-\lambda)\left(\dfrac{1}{4}\right)=\lambda\left(\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Finalement, $\lambda=3$ et $\mu=-2$ et enfin, la suite u s'écrit $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et la suite u converge vers 0.

(b) Posons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+2)^4-(n+2)^2}{12}-2\frac{(n+1)^4-(n+1)^2}{12}+\frac{n^4-n^2}{12}-(n+1)^2\\
&=\frac{(n+2)^4-(n+2)^2-2(n+1)^4+2(n+1)^2+n^4-n^2-12(n+1)^2}{12}\\
&=\frac{(n+2)^2((n+2)^2-1)-2(n+1)^2((n+1)^2-1)+n^2(n^2-1)-12(n+1)^2}{12}\\
&=\frac{(n+2)^2(n+1)(n+3)-2(n+1)^2(n(n+2))+n^2(n-1)(n+1)-12(n+1)^2}{12}\\
&=\frac{(n+1)((n+2)^2(n+3)-2n(n+1)(n+2)+n^2(n-1)-12(n+1)))}{12}\\
&=\frac{(n+1)((n^2+4n+4)(n+3)-2n(n^2+3n+2)+n^3-n^2-12n-12)}{12}\\
&=\frac{(n+1)(n^3+4n^2+4n+3n^2+12n+12-2n^3-6n^2-4n+n^3-n^2-12n-12)}{12}\\
&=0
\end{aligned}$$

On conclut que $\dfrac{(n+2)^4-(n+2)^2}{12}=2\dfrac{(n+1)^4-(n+1)^2}{12}-\dfrac{n^4-n^2}{12}+(n+1)^2$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+2}=u_{n+2}+\dfrac{(n+2)^4-(n+2)^2}{12}=2u_{n+1}-u_n-(n+1)^2+\dfrac{(n+2)^4-(n+2)^2}{12}=2\dfrac{(n+1)^4-(n+1)^2}{12}-\dfrac{n^4-n^2}{12}+(n+1)^2-(n+1)^2=2(u_{n+1}+\dfrac{(n+1)^4-(n+1)^2}{12})-(u_n+\dfrac{n^4-n^2}{12})=2w_{n+1}-w_n$.

Le polynôme x^2-2x+1 a pour racine double 1.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à $(w_0+n(w_1-w_0))_{n\in\mathbb{N}}$ or, $w_0=u_0+\dfrac{0}{12}$ et $w_1=u_1+\dfrac{0}{12}$. Comme $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(w_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on en déduit que, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.