UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupes 22.1 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Corrigé feuille d'exercices 2

Un peu de théorie des ensembles

Exercice 1

1. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble défini par : $\{(e, f) \mid x \in E,\ y \in F\}$.
2. * Montrons, d'abord que, $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$. Soit $z \in (E \times G) \cup (F \times G)$. On a, par conséquent, $z \in E \times G$ ou $z \in F \times G$. Si $z \in E \times G$, il existe $e \in E$ et $g \in G$ tel que $z = (e, g)$. Si $z \in F \times G$, il existe $f \in F$ et $g' \in G$ tel que $z = (f, g')$. Par conséquent, $z = (e, g)$ ou $z = (f, g')$ et donc il existe $d \in E \cup F$ et $g'' \in G$ tel que $z = (d, g'')$. Finalement, $z \in (E \cup F) \times G$ d'où, $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$ car z est arbitrairement choisi dans $(E \times G) \cup (F \times G)$.
   * Montrons, maintenant, $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$. Soit $z \in (E \cup F) \times G$, il existe donc $x \in (E \cup F)$ et $g \in G$ tel que $z = (x, g)$. Comme $x \in (E \cup F)$, $x \in E$ et $z = (x, g) \in E \times G$, ou bien, $x \in F$ et $z = (x, g) \in F \times G$, on en déduit que $z \in (E \times G) \cup (F \times G)$, z étant choisi arbitrairement, on conclut que $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$.
   En conclusion, $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$ et $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$ ce qui équivaut à $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$.

Exercice 2

a) $A \times B = \{(1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 3),\ (3, 4)\}$.
b) $(E \backslash A) \times B = \{(4, 3),\ (4, 4)\}$.
c) $A \times (E \backslash B) = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (3, 2)\}$.
d) $(E \backslash A) \times (E \backslash B) = \{(4, 1),\ (4, 2)\}$.
e) $(E \times E) \backslash (A \times B) = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (4, 1),\ (4, 2),\ (4, 3),\ (4, 4)\}$.

Exercice 3

a. $A = [3, 5]$
b. $B = [0, 2]$
c. $C = \mathbb{R}$
d. $D = \{0\}$
e. $E = [3, +\infty[$
f. $F = \mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$
g. $G = [0, 1[$

Exercice 4

a) Il suffit de voir que, pour $x \in]0, 1[$, $x < \dfrac{1}{n+1} \iff n < \dfrac{1-x}{x}$. On peut prendre $n = 0$, E contient donc une infinité d'éléments.
b) La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut faire tendre $n \to +\infty$, la propriété est toujours vérifiée, on conclut que $F = \{0\}$, il contient donc un seul élément.

Exercice 5

a) Soit $x \in [2, 3]$. $2 \leq x \leq 3 \implies 4 \leq x^2 \leq 9$ et $2 \leq x \leq 3 \implies -9 \leq -3x \leq -6$. Par conséquent, $-5 \leq x^2 - 3x \leq 3$ et finalement, $-15 \leq x^2 - 3x - 10 \leq -7$. On conclut que $x \in [2, 3] \implies x^2 - 3x - 10 \leq -7 < 0$ et $E \subset F$.

- Il suffit de prouver que -2 et 5 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - 3x - 10$. $P(-2) = 4 + 6 - 10 = 0$, $P(5) = 25 - 15 - 10 = 0$ donc -2 et 5 sont les racines de P. De plus, P est du signe de 1 sur $]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$, on conclut que $F =]-2, 5[$.

Exercice 6

* $f^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin x \leq 1\} = \mathbb{R}$
* Comme, $\sin x \in [-1,1]$, il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin x = \pi$ donc $f^{-1}(\{\pi\}) = \emptyset$.
* $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R},\ \sin x = 0\} = \{x = 0 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 7

1. La fonction f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x+4 = 2(x+2)$, f' est négative sur $]-\infty, -2]$ et positive sur $[-2, +\infty[$. On conclut que f est décroissante sur $]-\infty, -2]$ et croissante sur $[-2, +\infty[$. De plus, comme le polynôme $P = x^2 + 4x + 2$ est de degré pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f(]-3, -2[) =]f(-2), f(-3)[=]-2, -1[$ car f est strictement décroissante et continue sur cet intervalle.
   $f(]-\infty, -3[) =]f(-3), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[=]-1, +\infty[$ car f est strictement décroissante et continue sur cet intervalle.
   $f(]-2, -1[) =]f(-2), f(-1)[=]-2, -1[$ car f est strictement croissante et continue sur cet intervalle.
   $f(]-1, +\infty[) =]f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]-1, +\infty[$ car f est strictement croissante et continue sur cet intervalle.
   $]-2, -1[$ et $]-1, +\infty[$ sont dits stables par f.

Exercice 8

Soient x et y réels tels que $x \neq y$. $\mathbb{R}$ est totalement ordonné donc, on a soit $x < y$ soit $x > y$. Le premier cas entraine $f(x) < f(y)$ d'où $f(x) \neq f(y)$. Le second cas se traite de la même manière.

Exercice 9

1. Soit $x, x' \in E$, tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, comme g est injective, $f(x) = f(x')$ et comme f est injective $x = x'$. On conclut que $g \circ f$ est injective.
2. Soit $z \in G$, comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, et puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on conclut qu'il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$ donc $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives alors f et g sont injectives et surjectives donc $g \circ f$ est injective et surjective donc bijective.

Exercice 10

Il faut montrer que g est une injection et une surjection.

1. Montrons, tout d'abord, que g est une injection. Soient n et n' tels que $g(n) = g(n')$. Premièrement, supposons, n pair et n' impair, on aurait, $0 \geq g(n)$ et $g(n') \leq -1$ et $g(n) = g(n')$ ce qui est absurde donc n et n' sont de même parité (le cas n impair et n' pair se résout de la même manière). On sait, maintenant que n et n' sont de même parité, supposons n et n' pairs, ceci implique que $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, ce qui équivaut à $n = n'$. Supposons, à présent que n et n' sont impairs, on a donc $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$ ce qui équivaut à $n + 1 = n' + 1$ puis à $n' = n$. Par conséquent, $g(n) = g(n')$ implique que $n = n'$ et donc g est injective.
2. Montrons que g est surjective. Soit $z \in \mathbb{Z}$. Si $z < 0$, on pose $n = -2z + 1$, n est un entier naturel impair et $z = g(n)$. Si $z \geq 0$, on pose $m = 2z$, m est un entier naturel pair et $z = g(m)$. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z = g(n)$ et donc g est surjective.

En conclusion g est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 11

1. On peut utiliser le théorème de la bijection, en calculant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ ainsi qu'en $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures et par valeurs supérieures puis en montrant que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$. On peut aussi répondre aux questions 1 et 2 en même temps. Ce qu'on va faire ici.

   Pour montrer que f est bijective, on montre qu'elle est injective. Soient x, x' différents de $\frac{1}{2}$, tels que $f(x) = f(x')$. $f(x) = f(x') \implies \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{x'+1}{2x'-1} \implies (2x'-1)(x+1) = (2x-1)(x'+1) \implies 2x'x + 2x' - x - 1 = 2x'x + 2x - x' - 1 \implies 2x' - x = 2x' - x' \implies x' = x$ d'où f injective.

   Montrons que f est surjective et soit y différent de $\frac{1}{2}$. $y = \dfrac{x+1}{2x-1} \implies y(2x-1)-(x+1) = 0 \implies 2xy - y - x - 1 = 0 \implies x(2y-1) = y+1 \implies x = \dfrac{y+1}{2y-1}$. Pour tout $y \neq \frac{1}{2}$ (y est arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$), il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $y = f(x)$.

   Finalement, f est bijective et $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2y-1}$. On a par conséquent $f = f^{-1}$ et donc $f \circ f = Id$.

Exercice 12

Soient x et x deux réels positifs tels que $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$. On peut considérer que $\sqrt{x} + \sqrt{x'} \neq 0$, sinon $\sqrt{x} = \sqrt{x'} = 0$ et $x = x' = 0$. On a $(\sqrt{x} - \sqrt{x'})(\sqrt{x} + \sqrt{x'}) = 0$ ce qui implique $x - x' = 0$ et donc $x = x'$. La fonction h est donc injective. (on pouvait dire que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc injective cf Exercice 8).

Le réel -4 n'a pas d'antécédent par h car une racine carrée est toujours positive, h n'est pas surjective. Comme h n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

Exercice 13

1. Si A, B ou C sont vides, le résultat est trivial. Supposons que A, B et C sont non vides. Soit $x \in A \cup C$, on a alors $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$ alors $x \in B \cup C$. Supposons $x \in A$, comme $A \subset B$ alors $x \in B$ et par conséquent, $x \in B \cup C$. Comme x est arbitrairement choisi dans $A \cup C$, on conclut que $A \cup C \subset B \cup C$.
2. Soit $x \in A$. Deux cas se présentent :
   * Soit $x \in C$ et donc $x \in A \cap C$, comme $(A \cap C) \subset (B \cap C)$, on a $x \in B \cap C$ et $x \in B$.
   * Soit $x \notin C$ mais $x \in A \cup C$, comme $(A \cup C) \subset (B \cup C)$, on a $x \in B \cup C$, or $x \notin C$ d'où $x \in B$.

   Dans les deux cas, $x \in B$ et on conclut que $A \subset B$.

Exercice 14

1. Soient A, B deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B$. Si $f(A)$ est vide, le résultat est vérifié. Supposons que, $f(A)$ soit non vide, et soit $y \in f(A)$. Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, comme $A \subset B$, $x \in B$, par conséquent $y \in f(B)$, on en déduit que $f(A) \subset f(B)$.
2. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, d'après le 1), $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$ donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Il reste à montrer que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Si $f(A \cup B) = \emptyset$, le résultat est vérifié. Supposons que $f(A \cup B)$ et soit $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$, $x \in A \cup B$ ce qui équivaut à $x \in A$ ou $x \in B$ donc $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$ ce qui équivaut de $y \in f(A) \cup f(B)$, on conclut que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
3. a) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on utilise 1) et donc $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   b) La fonction f désigne la fonction carrée, on prend $A = \{-1\}$ et $B = \{1\}$, $f(A) \cap f(B) = \{1\}$ et $A \cap B = \emptyset$, par conséquent, $f(A) \cap f(B)$ n'est pas inclus $f(A \cap B)$.

   c) Il faut montrer deux implications 1) f est injective $\implies$ Pour tout sous-ensembles A et B de E, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ (on doit montrer deux inclusions mais la deuxième inclusion a déjà été démontrée pour f quelconque). De plus, on peut supposer que $f(A \cap B)$ est non vide, sinon, l'inclusion est triviale. 2) $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \implies$ f est injective. Montrons la première implication. Soient A, B deux parties de E et f une fonction injective, et soit $y \in f(A) \cap f(B)$, il existe donc $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$, f étant injective, $x = x_1 = x_2$, comme $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$, $x \in A \cap B$ donc $y \in f(A \cap B)$, la première implication est ainsi démontrée.

Montrons la deuxième impliaction. Supposons que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. Considérons $x, y \in E$ tels que $z = f(x) = f(y)$, on pose $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, comme $z \in f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = f(\{x\} \cap \{y\})$, $f(\{x\} \cap \{y\})$ est non vide et donc $\{x\} \cap \{y\}$ est non vide et $x = y$, f est donc injective.

Exercice 15

1. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Si $f^{-1}(B)$ est vide alors $f(f^{-1}(B)$ est vide aussi et l'inclusion est vérifiée.Supposons $f^{-1}(B)$ non vide et soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$, $y = f(x)$, où $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B$ d'où $y \in B$.
2. Il faut montrer deux implications, 1) f est surjective $\implies \forall B \in \mathcal{P}(F),\ B \subset f(f^{-1}(B))$ (on doit montrer deux inclusions mais la deuxième inclusion a déjà été démontrée pour f quelconque). De plus, on peut supposer que B est non vide, sinon, le résultat est trivial. 2)$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B)) \implies$ f est surjective. On va montrer la première implication. Soit f une fonction surjective, et B une partie de F, soit $y \in B$, f est surjective, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, or $y \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$, d'où $y \in f(f^{-1}(B))$. Supposons que, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$, soit $y \in F$, on prend $B = \{y\}$ on a $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$, donc il existe $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset E$ tel que $y = f(x)$, f est donc surjective.

Exercice 16

La fonction f est bijective ssi elle est injective et surjective (pas d'algèbre linéaire ici!!!)

* Injective. $f(x', y') = f(x, y) \implies (x' + y' = x + y)$ et $(2x' + 3y' = 2x + 3y)$ Dans la première égalité, on obtient $x' = x + y - y'$, si on remplace dans la deuxième équation, on obtient : $2(x + y - y') + 3y' = 2x + 3y \implies 2x + 2y - 2y' + 3y' = 2x + 3y \implies y' = 3y - 2y \implies y' = y$. En revenant à la première équation, on obtient $x' = x$. On conclut que f est injective.
* Surjective. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcr} X & = & x + y \\ Y & = & 2x + 3y \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & X - y \\ Y & = & 2x + 3y \end{array}\right.$$

et donc, en substituant x par $X - y$ dans la seconde équation, on a : $Y = 2(X - y) + 3y \iff Y = 2X + y \iff y = Y - 2X$, en substituant y par $Y - 2X$ dans la première équation, on obtient que $x = X - Y + 2X \iff x = 3X - Y$. En conclusion, f est surjective.

L'application f est injective et surjective, elle est donc bijective.

Exercice 17

a) $f(x, y) = (0, 0) \iff (2x - 3y = 0)$ et $-4x + 6y = -2(2x - 3y) = 0$, par conséquent, $f(x, y) = (0, 0) \iff 2x - 3y = 0$. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$, il contient donc une infinité de points (c'est une droite!).

b) Considérons $(x, y) = (3, 2)$ et $(x', y') = (6, 4)$, on a $f(x, y) = f(x', y') = 0$ mais $(x, y) \neq (x', y')$ donc f n'est pas injective.

c) Il faut montrer que $f(\mathbb{R}^2) \subset B$ puis que $B \subset f(\mathbb{R}^2)$. Soit $(X, Y) \in f(\mathbb{R}^2)$. Il existe, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $X = 2x - 3y$ et $Y = -4x + 6y = -2(2x - 3y) = -2X$. La deuxième inégalité équivaut à $Y + 2X = 0$ et on conclut que $(X, Y) \in f(\mathbb{R}^2)$, (X, Y) étant arbitrairement choisi, $f(\mathbb{R}^2) \subset B$. Soit $(X, Y) \in B$, On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = 2x - 3y$ et $Y = -4x + 6y$. Considérons la première équation, et posons $x = -X$, on obtient, $X = -2X - 3y \iff 3X = -3y \iff y = -X$. Vérifions que l'on a bien, $X = 2x - 3y$ et $Y = -4x + 6y$ avec $(x, y) = (-X, -X)$. $f(x, y) = (-2X + 3X, 4X - 6X) = (X, -2X)$. Or $(X, Y) \in B$ et donc $Y = -2X$ et finalement, $f(x, y) = (-2X + 3X, 4X - 6X) = (X, -2X) = (X, Y)$. On en déduit que $B \subset f(\mathbb{R}^2)$ et comme $f(\mathbb{R}^2) \subset B$, on conclut que $f(\mathbb{R}^2) = B$.

Exercice 18

1. Il faut montrer deux implications $1_A \leq 1_B \implies A \subset B$ et $A \subset B \implies 1_A \leq 1_B$. Supposons que $1_A \leq 1_B$ et soit $x \in A$ (on peut supposer A non vide sinon c'est ok). Comme $x \in A$, $1_A(x) = 1$, comme $1_A \leq 1_B \leq 1$, on a $1_B(x) = 1$ et par définition, $x \in B$, ce qui prouve que $A \subset B$. Supposons maintenant que, $A \subset B$. Il faut prouver que, pour $x \in E$, $1_A(x) = 1$ implique que $1_B(x) = 1$ et que $1_B(x) = 0$ implique $1_A(x) = 0$. Soit $x \in E$ tel que $1_A(x) = 1$, ceci équivaut à $x \in A$, comme $A \subset B$, $x \in B$ donc $1_B(x) = 1$, d'où, $1_A(x) = 1$ implique que $1_B(x) = 1$. Maintenant, soit x tel que $1_B(x) = 0$, ce qui équivaut à $x \notin B$, si on avait $x \in A$, on aurait $x \in B$ donc $x \notin A$ et donc $1_A(x) = 0$ et finalement, $1_B(x) = 0$ implique $1_A(x) = 0$. Par conséquent, $A \subset B \implies 1_A \leq 1_B$. En conclusion, $A \subset B \iff 1_A \leq 1_B$. On a $1_A = 1_B \iff 1_A \leq 1_B$ et $1_B \leq 1_A$, d'après la question précédente, $1_A \leq 1_B$ et $1_B \leq 1_A$ est équivalent à $A \subset B$ et $B \subset A$ donc à $A = B$.
2. $1_{A \cup B} = \max(1_A, 1_B)$ et $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$.

Exercice 19

1. Il faut montrer que ϕ est injectif et surjectif. Soient f et g dans $\mathcal{F}$, telles que $\phi(f) = \phi(g)$, on a $f(a_1) = g(a_1)$, $f(a_2) = g(a_2)$, $\ldots$, $f(a_n) = g(a_n)$, entre d'autres termes pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$ donc $f = g$ et ϕ est injective.

   L'application ϕ est surjective, en effet, si on considère $b_1, b_2 \ldots, b_n$, n éléments de F et posons $g(a_1) = b_1$, $g(a_2) = b_2$, $\ldots$, $g(a_n) = b_n$, g est une application de E dans F donc il existe $g \in \mathcal{F}$ telle que $\phi(g) = (b_1, \ldots, b_n)$.
2. En utilisant l'Exercice 18, prenons deux parties de E telles que $\phi(A) = \phi(B) \iff 1_A = 1_B \iff A = B$, donc ϕ est injective. Soit g une application de E dans $\{0,1\}$, on pose $A = \{x \in E \mid g(x) = 1\}$, on a donc $\phi(A) = g$, si $x \in A$, $g(x) = 1$ et puisque $x \notin A$, $g(x) \neq 1$ et comme g est à valeur dans $\{0,1\}$, $g(x) = 0$ on en conclut que ϕ est surjective. ϕ étant injective et surjective ϕ est bijective.

   D'après 1), Il existe une bijection entre F^n et $\mathcal{F}$, donc $card(\mathcal{F}) = card(F^n) = \{0,1\}^n = 2^n$. Maintenant, il existe une bijection entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}(E)$ $card(\mathcal{P}(E)) = card(\mathcal{F}) = 2^n$.

Exercice 20

Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. Supposons f surjective et posons $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. A est une partie de E donc il existe $y \in E$ tel que $f(y) = A$. Supposons, A vide, comme il existe $y \in E$ tel que $f(y) = A = \emptyset$, $y \notin A = f(y)$, d'où, $y \in A$ et donc A est non vide.

Supposons que $y \in A$, ceci implique que $y \notin f(y) = A$ mais $y \in A$ ce qui est absurde. Et si $y \notin A = f(y)$, $y \notin f(y)$ donc $y \in A$ ce qui est encore une fois absurde. Finalement, on conclut que f ne peut pas être surjective. Comme pour toute application f de E dans $\mathcal{P}(E)$, f n'est pas surjective, alors il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$, ce qui entraine que E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas le même nombre d'éléments.