Constantes logiques

Entre inférentialisme et réécriture

Alberto Naibo

Paris 1 - EXeCO
Alberto.Naibo@univ-paris1.fr

10 décembre 2009

Première partie I

Introduction

Une question philosophique

- Une question fondamentale pour la philosophie du langage de tradition analytique est l'explication du concept de *signification* (*meaning*) dans le contexte d'une pratique langagière.

- Reformulée en manière indirecte, elle prend la forme suivante :

Qu'est-ce que veut dire, pour un locuteur, comprendre la signification d'un énoncé ou d'une expression linguistique appartenant à un certain langage $\mathcal{L}$?

- Repondre à cette question comporte l'individuation de certains concepts considérés comme plus primitifs et moins problématiques sur lesequels fonder l'explication du concept de 'signification'.

- Un candidat raisonnable pour jouer ce rôle d'*explanans* est le concept de vérité (cf. Davidson 1967).

Une première response : la théorie véríconditionnelle (1)

- Connaître la signification d'un énoncé veut dire connaître ses conditions de vérité (théorie *véríconditionnelle* de la signification).
- Connaître la signification d'une expression linguistique veut dire connaître sa contribution à la détermination des conditions de vérité des énoncés dans lesquels elle appparaît.
- Une telle théorie de la signification se lie bien avec une théorie de la vérité de type modèle-théorique.
- Selon une telle théorie de la vérité, les conditions de vérité d'un énoncé sont établies sur la base de la rélation de référence (dénotation, correspondance) des expressions linguistiques à une structure composée d'objets et d'ensembles d'objets (structure ensembliste).

Une première reponse : la théorie vériconditionnelle (2)

- Par conséquent, connaître la signification d'un énoncé veut dire connaître cette rélation de correspondance entre langage et 'réalité objectuelle' (réalité extralinguistique).
- Par exemple, connaître la signification de l'énoncé atomique 'La Terre est sphérique' est équivalent à savoir que dans la structure considérée il y a un objet qui correspond au nom 'Terre' et qu'un tel objet appartient à un certain ensemble qui correspond à la dénotation du prédicat 'x est sphérique'.
- Selon une telle vision, la notion de signification depend strictement de la rélation de référence (dénotation).

Une première reponse : la théorie vériconditionnelle (3)

- Connaître la signification de l'énoncé '2 est impaire ou 3 est impaire' veut dire savoir qu'il est vrai si et seulement si '2 est impaire' est vrai ou '3 est impaire' est vrai.

- La signification d'un connecteur logique est donnée donc par sa table de vérité.

- Pour mieux le dire, connaître la signification d'un connecteur logique (constante logique) n-aire, veut dire connaître une certaine fonction qui prend comme argument n valeurs de vérité et qui rend une valeur de vérité determinée.

Remarque 1 : Le modèle decide toujours les énoncés atomiques. C'est pour cela que la fonction associée à un connecteur logique est toujours définie.
Remarque 2 : La dénotation d'un nom ou d'un prédicat varie de modèle à modèle, tandis que la dénotation d'une constante logique reste invariée par rapport aux permutations du domain (les constantes logiques sont des *invariantes* ; cf. Tarski 1966).

Problèmes de la vision modèle-théorique

- La signification d'une expression linguistique est expliquée sur la base de quelque chose qui est complétement *externe* au langage, i.e. les objets du modèle.
- L'acceptation de la notion de modèle semble impliquer l'acceptation d'une certaine position *réaliste*.
- Pour expliquer la signification des constantes logiques en termes de fonction, on doit considérer le valeur de vérité comme des objets. Cela implique que la notion de valeur de vérité est elle-même hypostatisée (reifiée).
- Selon cette vision, parfois, la compréhension de la signification d'un certain énoncé n'est pas completement *manifestable* ; par exemple, comprendre la signification d'un énoncé quantifié universellement sur un domaine infini veut dire connaître ses conditions de vérité, c'est-à-dire connaître les conditions de vérité pour un nombre d'énoncés qui est infini.

Une deuxième reponse : signification comme usage

- Une vision alternative est de voir la signification comme basée sur l'*usage* (cf. le *dictum* de Wittgenstein selon lequel ≪ the meaning is use ≫ ; PI,§43).
- Connaître la signification d'un énoncé veut dire connaître quand et comment employer cet enoncé dans le discours. La signification d'un énoncé correpsond aux conditions de son correct usage dans un *jeu de langage*.
- Connaître la signification d'un expression linguistique veut dire connaître les conditions pour l'employer dans la formation d'un énoncé.
- L'idée de fonder la signification sur l'usage permet de caractériser la signification de manière *interne* au langage lui même, sans cehercher une réalité exterieure.

L'inférentialisme (1)

- L'idée de la signification comme usage, une fois apliquée au cas des constantes logiques, porte à ce qu'on appelle la thèse *inférentialiste* :

La signification d'une constante logique est donnée par son usage syntaxique, c'est-à-dire par ses règles d'inférence.

- Connaître la signification d'une constante logique veut dire connaître ses règles d'inférence.
- La signification donc ne demande plus le recours à quelque chose d'extralinguistique, mais elle emerge à partir de la syntaxe.
- Vu que les règles d'inférence sont aussi la manière de *définir* syntaxiquement les constantes logiques, on a que la question de la signification des constantes logiques converge sur la question de leur définition.

L'inférentialisme (2)

Il faut noter que, dans le cas de la déduction naturelle, les règles d'infèrence jouent des rôles différents :

- Les règles d'introduction nous disent *quand* on peut employer les connecteurs ; elles donnent les conditions qui doivent être satisfaites pour appliquer les connecteurs à des énoncés déjà disponibles (*rôle vérificationniste*).

- Les règles d'élimination nous disent *ce qu'*on peut faire avec les connecteurs ; elles montrent ce qu'on peut produire (ou obtenir) lorsqu'on emploie les connecteurs (*rôle pragmatiste*).

Deuxième partie II

L'inférentialisme mis à l'épreuve

Le connecteur *tonk*

- Prior (1960) montre que la position inférentialiste qu'on vient de formuler est trop naïve et surtout elle ne donne pas une conditon suffisante pour la définition d'un connecteur logique.
- Son argument commence avec l'introduction d'un nouveau connecteur (*tonk*), défini par les règles suivantes :

$$tonk - intro_1 \ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \ tonk \ B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \ tonk \ B} \ tonk - intro_2$$

$$tonk - elim_1 \ \frac{\Gamma \vdash A \ tonk \ B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \ tonk \ B}{\Gamma \vdash B} \ tonk - elim_2$$

- La deuxième étape faite par Prior est d'ajouter *tonk* à un certain système logique S de départ (où S est NJ ou NK).

Problématicité de *tonk* (1)

La preuve suivante montre comme la seule stipulation des règles d'inférence pour *tonk* n'est pas une condition suffisante pour caractériser sa signification. Soient A et B deux formules quelconque :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}
}{A \vdash A \; tonk \; B}\,tonk - intro_1
}{A \vdash B}\,tonk - elim_2
}{\vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow -intro
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{B \vdash B}\,\mathrm{Ax}
}{B \vdash A \; tonk \; B}\,tonk - intro_2
}{B \vdash A}\,tonk - elim_1
}{\vdash B \Rightarrow A}\,\Rightarrow -intro
}{
\dfrac{\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}{\vdash A \Leftrightarrow B}
}\,\wedge - intro
$$

- Le système logique S avec l'adjonction de *tonk* collapse : d'un point de vue logique il n'y a qu'un seul énoncé.
- Cela veut dire que *tonk* a trivialisé la signification des autres connecteurs du système S : ni *tonk* ni les autres connecteurs ont plus une signification leur propre. Chaque connecteur est devenu indiscernable par rapport aux autres.

Problématicité de *tonk* (2)

- Prior en conclue que le choix *arbitraire* dans la construction des règles d'inférence pour un nouveau connecteur ne donne aucune signification à ce connecteur, car cela peut amener à la dégéneration de tout le système.

- En particulier, $S + \{tonk\}$ est logiquement inconsistant :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\LeftLabel{$tonk - intro_1$}
\UnaryInfC{$A \vdash A \, tonk \, B$}
\LeftLabel{$tonk - elim_2$}
\UnaryInfC{$A \vdash B$}
\LeftLabel{$\Rightarrow -intro$}
\UnaryInfC{$\vdash A \Rightarrow B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B$}
\RightLabel{$tonk - intro_1$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B \vdash (A \Rightarrow B) \, tonk \perp$}
\RightLabel{$tonk - elim_2$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B \vdash \perp$}
\RightLabel{$\Rightarrow -intro$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \perp$}
\RightLabel{$\Rightarrow -elim$}
\BinaryInfC{$\vdash \perp$}
\end{prooftree}
$$

tonk et l'élimination des coupures

- Le fait que $S + \{tonk\}$ est inconsistant et que S ne l'est pas, ne veut pas dire que le poids de l'inconsitante doit être totalement déversé sur *tonk*. En effet, dans le fragment $\{tonk, \bot\}$ il est impossible de dériver $\bot$ sans hypothèses.

- La cause de l'inconsistance il faut la chercher dans la (mauvaise) interaction entre tous les connecteurs.

- Une piste à suivre est le fait que l'inconsitance de $S + \{tonk\}$ implique que le système n'élimine pas les coupures (en particulier les coupures du type $tonk - intro_i / tonk - elim_j$, où $1 \leqslant i, j \leqslant 2$).

- Cela met en évidence deux aspects :
  1. la signification d'un connecteur logique n'est pas complétement donnée par un ensemble *statique* de règles d'inférence ;
  2. dans la caractérisation de la signification des constantes logiques il faut aussi tenir en considération la *dynamique* entre les règles d'inférence, notamment la dynamique de l'élimination des coupures.

Une diagnostique pour *tonk*

- La lesson qu'on tire de *tonk* est que la signification des constantes logiques n'est pas donné seulement par leur règles d'inférence, mais que ces règles d'inférence doivent bien intéragir dynamiquement entre eux.
- L'inconsistance de $S + \{tonk\}$ nous a révélé le charactère pathologique de *tonk* et le fait que, pour éviter une telle pathologie, il faudrait que les règles d'inférence qui définissent un nouveau connecteur admettent l'élimination des coupures.
- Toutefois on n'as pas encore une *explication* de la pathologie de *tonk*, c'est-à-dire du pourquoi il n'élimine pas le coupures. (L'élimination des coupures est le remède pour évider une pathologie comme celle de *tonk*, mais elle n'explique pas cette pathologie).
- Une telle diagnostic peut être fait à l'aide de la déduction modulo.
- En particulier, l'idée centrale est que *tonk* n'as pas une vraie signification inférentielle et qu'il peut être simulé par des règles de réécriture. Notamment, par des règles de réécriture *asymétriques* et *polarisées*.

Réécriture polarisée

- Un système de réécriture polarisée est une système de réécriture $\mathscr{R}_p$ formé par l'union de deux ensembles de règles de réécriture : les règles négatives et les règles positives ($\mathscr{R}_p = \langle \mathscr{R}_-, \mathscr{R}_+ \rangle$).

- En déduction naturelle modulo $\mathscr{R}_p$ l'application des règles $\mathscr{R}_-$ et $\mathscr{R}_+$ depend de la position des redex dans les règles d'inférence. Soit C un redex par rapport à $\mathscr{R}_p$:

i) C se réécrit par une règle de $\mathscr{R}_-$ si :
   - C se trouve à gauche de $\vdash$ dans une règle axiome ;
   - C est la prémisse majeure d'une règle d'élimination.

ii) C se réécrit par une règle de $\mathscr{R}_+$ si :
   - C se trouve à droite de $\vdash$ dans une règle axiome ;
   - C est la conclusion d'une règle d'introduction.

Déduction modulo polarisée (1)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash B}\text{Ax} \quad \text{si } A \longrightarrow_{-} C \;_{+}\!\longleftarrow B$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash C} \Rightarrow -intro \quad \text{si } C \longrightarrow_{+} (A \Rightarrow B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash C \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \Rightarrow -elim \quad \text{si } C \longrightarrow_{-} (A \Rightarrow B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash C} \wedge - intro \quad \text{si } C \longrightarrow_{+} (A \wedge B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{A} \wedge - elim_1 \quad \text{si } C \longrightarrow_{-} (A \wedge B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{B} \wedge - elim_2 \quad \text{si } C \longrightarrow_{-} (A \wedge B)$$

Déduction modulo polarisée (2)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C} \vee - intro_1 \quad \text{si } C \longrightarrow_+ (A \vee B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash C} \vee - intro_2 \quad \text{si } C \longrightarrow_+ (A \vee B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash C \qquad \Gamma', A \vdash D \qquad \Gamma'', B \vdash D}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash D} \vee - elim \quad \text{si } C \longrightarrow_- (A \vee B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A} \perp - elim \quad \text{si } C \longrightarrow_- \perp$$

tonk comme système de réécriture

- Le système $S + \{tonk\}$ peut être simulé dans la déduction naturelle modulo le système de réécriture asymetrique et polarisée $\mathscr{R}_p = \{A \wedge B \rightarrow^1_+ A \vee B,\ A \vee B \rightarrow^1_- A \wedge B\}$.
(Le système de réécriture $\mathscr{R}_p$ est confluent et terminant)

- La preuve de $A \Leftrightarrow B$ dans $S + \{tonk\}$ devient :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\LeftLabel{$\vee - intro_1\,{}_{\rightarrow^1_+}$}
\UnaryInfC{$A \vdash A \wedge B$}
\LeftLabel{$\wedge - elim_2$}
\UnaryInfC{$A \vdash B$}
\LeftLabel{$\Rightarrow -intro$}
\UnaryInfC{$\vdash A \Rightarrow B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$\vee - intro_2$}
\UnaryInfC{$B \vdash A \vee B$}
\RightLabel{$\wedge - elim_1\,{}_{\rightarrow^1_-}$}
\UnaryInfC{$B \vdash A$}
\RightLabel{$\Rightarrow -intro$}
\UnaryInfC{$\vdash B \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\wedge - intro$}
\BinaryInfC{$\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$}
\UnaryInfC{$\vdash A \Leftrightarrow B$}
\end{prooftree}
$$

Traductions de *tonk*

- Chaque énoncé de $S + \{tonk\}$ peut être transformé en un énoncé de $S + \mathscr{R}_p$ grâce à l'une des deux traductions suivantes :

1. Traduction $\mathtt{T}_1$:
   - $\mathtt{T}_1(A) = A$, si A ne contient pas *tonk* ;
   - $\mathtt{T}_1(A\, tonk\, B) = \mathtt{T}_1(A) \wedge \mathtt{T}_1(B)$.
2. Traduction $\mathtt{T}_2$:
   - $\mathtt{T}_2(A) = A$, si A ne contient pas *tonk* ;
   - $\mathtt{T}_2(A\, tonk\, B) = \mathtt{T}_2(A) \vee \mathtt{T}_2(B)$.

- Grâce à ces traductions on peut toujours transformer chaque preuve de $S + \{tonk\}$ en une preuve de $S + \mathscr{R}_p$.
- Une traduction qui agit inversement est aussi possible. C'est-à-dire qu'on peut traduire les preuves des $S + \mathscr{R}_p$ en des preuves de $S + \{tonk\}$ grâce à la procedure suivante :
  - si $A \wedge B$ est la conclusion d'une règle de $\vee - intro$ modulo $\{A \wedge B \rightarrow^1_+ A \vee B\}$, alors on substitue *tonk* à $\wedge$;
  - si $A \vee B$ est la prémisse d'une règle de $\wedge - elim$ modulo $\{A \vee B \rightarrow^1_- A \wedge B\}$, alors on substitue *tonk* à $\vee$.

Diagnostique de *tonk* via règles de réécriture

- On peut alors passer d'une réflexion sur les règles d'inférence de *tonk* à une réflexion sur les règle de réécriture de $\mathscr{R}_p$ sans le risque de rendre infidèle notre analyse.
- En particulier, on voit que le problème est que le système $\mathscr{R}_p$ génère une confusione entre les connecteurs $\wedge$ et $\vee$, en les identifiant au moment de faire un $\vee - intro$ ou un $\wedge - elim$.
- Cette idéntification porte à former des successions $\vee - intro_{\rightarrow^1_+} / \wedge - elim$ et $\vee - intro / \wedge - elim_{\rightarrow^1_-}$ qui se comportent comme des coupures :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \vee - intro_{1\,\rightarrow^1_+}}{\Gamma \vdash B}\ \wedge - elim_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee - intro}{\Gamma \vdash B}\ \wedge - elim_{2\,\rightarrow^1_-}$$

- La réécriture nous oblige à traiter ce deux successions de intro/elim comme une coupure, même si on n'a pas de strategie de réduction.

Un regard sur les termes de preuve

- Le manque de stratégie de réduction est bien visible si on considère les deux preuves précédentes exprimées en termes de preuve :

$$snd(i(\pi))$$

- Evidemment ce dernier n'est pas un vrai redex, en particulier parce qu'il n'a même pas la structure d'un redex. En effet, le *snd* pour se reduire attends deux arguments, tandis que avec le $i(\pi)$ on en a qu'un.

- Le système de réécriture $\mathscr{R}_p$ génère une coupure au niveau des types, mais sans que lui correspond la création d'un redex au niveau des termes.

- Se limiter à réécrire des formules atomiques vers des formules non atomiques, par contre, permet de mantenir la correspondance entre création de coupures et de redex.

Non-confusion des connecteurs

- On a alors que certains connectuers logiques, comme *tonk*, peuvent être 'définis' par des règles de réécriture au lieu que par des règles d'inférence.
- Mais est-il vraiment possible d'établir des systèmes de réécriture que permettent de 'définir' (i.e. simuler) des connecteurs non-standard sans tomber dans l'inconsistance ?
- Le cas de *tonk* nous amène à accepter la condition suivante (*condition de non-confusion*) :

Afin qu'un système inférentiel modulo des réécritures ne soit pas contradictoire il faut que les règles de réécriture ne créent pas de confusion entre les connecteurs ; plus en général, il faut éviter d'avoir des règles de réécriture qui réécrient des formules non atomiques vers des formules non atomiques.
(Dowek/Hardin/Kirchner 2003)

Troisième partie III

Connecteurs et règles de réécriture

Un autre étrange connecteur

- Retournons à la question initiale concernant la définition et la signification des connecteurs logiques.
- Est-ce que l'élimination des coupures est la seule condition suffisante à satisfaire pour s'assurer qu'un connecteur soit bien défini ?
- Prenons un autre exemple. Le connecteur $\star$ est défini par les deux règles suivantes :

$$\star - intro\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \star B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \star B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\ \star - elim$$

Élimination des coupures pour $\star$

- A différence de *tonk* le connecteur $\star$ admet l'élimination des coupures.

- En effet, prenons la preuve non-normale suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\pi'}{\Gamma' \vdash B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \star B}\ \star - intro \qquad \dfrac{\pi''}{\Gamma'' \vdash A}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash B}\ \star - elim$$

on peut la réduire sur :

$$\dfrac{\pi'}{\Gamma' \vdash B}$$

Et vue que la règle d'affaiblissement est dérivable dans S, on peut en conclure :

$$\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash B$$

Y a-t-il des problèmes avec $\star$?

- Le fait que $\star$ admet l'élimination des coupures suggère l'idée qu'il soit un connecteur logique bien défini et donc doué de signification. Si l'on tient l'élimination des coupures comme la seule et unique propriété à satisfaire pour la définition des règles d'un connecteur logique, alors il faut accepter $\star$ comme un 'bon' connecteur.

- Malheureusement $\star$ manque d'autres propriétés logiques souhaitables. En particulier, dans $S + \{\star\}$ c'est impossible d'avoir une dérivation non triviale (i.e. on exclue l'axiome identité) de $A \star B \vdash A \star B$ ou, dit autrement, on ne peut pas dériver $A \star B$ à partir des hypothèse $A \star B$ et avec l'emploie des seules règles de $\star$. Bref, le système manque de l'η-expansion.

η-expansion et $\star$

- Lorsqu'on veut prouver l'η-expansion pour un certain connecteur $\bullet$ on part de l'axiome $A \bullet B \vdash A \bullet B$ et après on applique la succession $\bullet - elim / \bullet - intro$.

- Cette procédure échoue dans le cas de $\star$:

$$\dfrac{\dfrac{A \star B \vdash A \star B \qquad A \vdash A}{A \star B, A \vdash B}\ \star - elim}{?} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{?}{A \star B \vdash A} \qquad \dfrac{?}{A \star B \vdash B}}{A \star B \vdash A \star B}\ \star - intro$$

Cela revèle aussi le fait que les règles de $\star$ ne sont pas réversibles.

η-equivalence et critères d'identité (1)

- Le fait d'avoir la propriété de l'η-expansion est fondamentale dans le discours sur la signification fondée sur l'usage.
- En effet, si on veut expliquer la compréhension de la signification d'une certain assertion (i.e. énoncé justifié, prouvé), il serait raisonnable de disposer d'un critère pour identifier les assertions qui ont la même signification (i.e. avoir une critère de *synonimie*).
- Une théorie de la signification basée sur l'usage nous met à disposition deux types de critères pour identifier des assertions :
  1. **Critère intensionnel** : deux assertions sont identiques s'elles ont été justifiées de la même manière, c'est-à-dire si leurs preuves sont équivalentes modulo la rélation de normalisation, i.e. elles sont β-équivalentes.
  2. **Critère extensionnel** : deux assertions (non β-équivalentes) sont identiques si, lorsqu'on les emploie, elles porduisent les mêmes effects, c'est-à-dire qu'elles se comportent de la même manière dans tous les contexts d'applications, i.e. elles sont η-équivalentes.
     (Ce dernier est un sort de prinicipe d'indiscernabilité des identiques formulé pour les assertions)

η-equivalence et critères d'identité (2)

- Le manque d'η-expansion pour le connecteur $\star$ signifie que, modulo l'élimination des coupures, toutes les assertions qui contient $\star$ ont une signification différente. Il n'est jamais possible d'avoir deux preuves contenant $\star$ qui différent 'grammaticalement' mais telles qu'elles ont la même signification.

- Bref, pour le cas de $\star$, on ne peut jamais avoir de situations comme celle de
  $\lambda f.f : (N \Rightarrow N) \Rightarrow (N \Rightarrow N)$ et
  $\lambda f \lambda x(f)x : (N \Rightarrow N) \Rightarrow (N \Rightarrow N)$
  qui sont deux manières extensionallement identiques d'exprimer l'entier 1.

- Cela veut dire que pour les assertions qui contient $\star$ l'identité de signification peut être seulement intensionnelle.

- On en conclue que sans l'η-equivalence le concept de synonimie perd beaucoup de sa valeur.

η-équivalence et isomorphisme de types (1)

- Le manque d'η-expansion a une autre conséquence : elle conduit à un appauvrissement (ou pire, trivialisation) du nombre des types (calculatoirement) isomorphes.
- **Isomorphisme de types** : deux types A et B sont isomorphes, s'il existe une paire de morphismes f et g, l'un de A vers B (f), l'autre de B vers A (g), tels que leur composition dans les deux sens ($g \circ f$ et $g \circ f$) est égale réspectivement au morphisme identité sur A et au morphisme identité sur B ($g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$).
- **Isomorphisme calculatoire (λ-calcul ST)** : supposons d'avoir deux séquents de la forme $x : A \vdash \pi_1 : B$ et $y : B \vdash \pi_2 : A$ (avec x libre dans π_1 et y libre dans π_2).
  On dit que les deux types A et B sont isomorphes du point de vue calculatoire, si les termes de preuve $\lambda x.\pi_1 : A \Rightarrow B$ et $\lambda y.\pi_2 : B \Rightarrow A$, sont tels que $(\lambda y.\pi_2)\pi_1 : A \equiv_{\beta\eta} x : A$ et $(\lambda x.\pi_1)\pi_2 : B \equiv_{\beta\eta} y : B$.

Alternativement (si on veut travailler avec des termes clôs) : les deux types A et B sont isomorphes si $\lambda x(\lambda y.\pi_2)\pi_1 : A \Rightarrow A \equiv_{\beta\eta} \lambda x.x : A \Rightarrow A$ et $\lambda y(\lambda x.\pi_1)\pi_2 : B \Rightarrow B \equiv_{\beta\eta} \lambda y.y : B \Rightarrow B$.

η-équivalence et isomorphisme de types (2)

- Cela veut dire que l'application du séquent $x : A \vdash \pi_1 : B$ au séquent $y : B \vdash \pi_2$ est $\beta\eta$-équivalente à l'axiome identité $x : A \vdash x : A$, tandis que l'application du séquent $y : B \vdash \pi_2 : A$ au séquent $x : A \vdash \pi_1 : B$ est $\beta\eta$-équivalente à l'axiome identité $y : B \vdash y : B$.
- La notion d'isomorphisme calculatoire raffine la notion d'équivalence logique. Par exemple, $A \wedge (A \Rightarrow B)$ et $A \wedge B$ sont logiquement équivalents, mais ils ne sont pas isomorphes. Par contre, $A \wedge B$ et $B \wedge A$ sont deux types isomorphes.
- Or, si on avait seulement la β-équivalence on aurait trivialisé la classe des isomorphismes calculatoires. Par exemple, sans la notion d'η-équivalence on aurait que $A \wedge B$ et $B \wedge A$ ne serait pas isomorphes, car après les avoir composé (dans tous les deux sens) et les avoir β-réduits on aurait deux preuves qui ne sont pas encore les axiomes identité $A \wedge B \vdash A \wedge B$ et $B \wedge A \vdash B \wedge A$.
- Le manque d'η-expansion pour $\star$ implique que, pour les formules qui contient $\star$, la notion d'isomorphisme calculatoire perd tout son sens.

- Maintenant, comme on a fait pour *tonk*, on peut envisager une analyse un peu plus fine de $\star$ et des ses propriétés en passant par une traduction de $S + \{\star\}$ dans un système de déduction modulo.

- En particulier, on peut traduire $S + \{\star\}$ dans $S + \{A \Rightarrow B \rightarrow^1_+ A \wedge B,\ A \wedge B \rightarrow^1_- A \Rightarrow B\}$:

$$\wedge - intro_{\rightarrow^1_+} \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \Rightarrow -elim_{\rightarrow^1_-}$$

Élimination des coupures (1)

- Le système
$$S + \{A \Rightarrow B \to^1_+ A \wedge B,\ A \wedge B \to^1_- A \Rightarrow B\},$$
analoguement à $\star$, admet l'élimination des coupures.
- Deux nouveaux types de coupure sont générés par le système de réécriture :

Coupure $\wedge - intro_{\to^1_+} / \Rightarrow -elim$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi'}{\Gamma' \vdash B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \Rightarrow B} \wedge - intro_{\to^1_+} \qquad \dfrac{\pi''}{\Gamma'' \vdash A}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash B} \Rightarrow -elim$$

Coupure $\Rightarrow -intro / \wedge -elim_{\to^1_-}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi'}{\Gamma' \vdash B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge - intro \qquad \dfrac{\pi''}{\Gamma'' \vdash A}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash B} \wedge - elim_{\to^1_-}$$

Élimination des coupures (2)

- Comme pour le cas de $\star$, ces deux coupures se reduisent sur :

$$\frac{\pi'}{\Gamma' \vdash B}$$

- Donc, à fortiori on peut en conclure : $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash B$.
- Le fait d'avoir une procedure pour éliminer ces deux nouvelles coupures nous porte aussi à introduire un nouveau type de redex et une nouvelle type de réduction à lui associée :

$$(\langle \pi, \pi' \rangle)\pi'' \rightsquigarrow \pi'$$

- Différement du cas du faux redex $snd(i(\pi))$, cette fois le 'redex' $(\langle \pi, \pi' \rangle)\pi''$ contient une quantité d'information suffisante pour faire une réduction. En effet, la réécriture permet de traiter le $\wedge$ comme un $\Rightarrow$, donc idéalement on pourrait penser de transformer le $\langle \pi, \pi' \rangle$ en $\lambda\pi.\pi'$. De cette manière on aurait : $(\lambda\pi.\pi')\pi''$ qui est bien un vrai redex.

Encore sur l'η-expansion

- Il est évident que, comme $\star$, le système

$$S + \{A \Rightarrow B \rightarrow^1_+ A \wedge B,\ A \wedge B \rightarrow^1_- A \Rightarrow B\}$$

  n'a pas la propriété de l'η-expansion :
    - l'emploie de la règle $\Rightarrow -elim_{\rightarrow^1_-}$ ne permet pas de dériver $A \wedge B \vdash A \wedge B$.
    - l'emploie de la règle $\wedge - intro_{\rightarrow^1_+}$ ne permet pas de deriver $A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B$.

- Mais, à différence de $\star$, dans ce cas on a la liberté de pouvoir modifier le système de réécriture afin de satisfaire la propriété de l'η-expansion.

Adjonction de règles (1)

- En effet, si on ajoute des nouvelles règles de réécriture, de façon à 'completer' le système de réécriture $\{A \Rightarrow B \rightarrow^1_+ A \wedge B,\ A \wedge B \rightarrow^1_- A \Rightarrow B\}$, on peut arriver à retrouver l'η-expansion pour le règles d'inférence modulo.
- Par exemple on peut terminer la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \wedge B, A \vdash B}\Rightarrow -elim_{\rightarrow^1_-}}{?}$$

avec l'adjonction de la règle $A \wedge B \rightarrow^1_+ A \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \wedge B, A \vdash B}\Rightarrow -elim_{\rightarrow^1_-}}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\Rightarrow -intro_{\rightarrow^1_+}$$

Adjonction de règles (1)

- En effet, si on ajoute des nouvelles règles de réécriture, de façon à 'completer' le système de réécriture $\{A \Rightarrow B \rightarrow^1_+ A \wedge B,\ A \wedge B \rightarrow^1_- A \Rightarrow B\}$, on peut arriver à retrouver l'η-expansion pour le règles d'inférence modulo.
- Par exemple on peut terminer la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \wedge B, A \vdash B}\Rightarrow -elim_{\rightarrow^1_-}}{?}$$

avec l'adjonction de la règle $A \wedge B \rightarrow^1_+ A \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \wedge B, A \vdash B}\Rightarrow -elim_{\rightarrow^1_-}}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\Rightarrow -intro_{\rightarrow^1_+}$$

Adjonction de règles (2)

- Analoguement, la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{?}{A \Rightarrow B \vdash A} \qquad \dfrac{?}{A \Rightarrow B \vdash B}}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\ \wedge - intro_{\rightarrow^1_+}$$

peut être 'fermée' grâce à l'adjonction de la règle $A \Rightarrow B \rightarrow^1_- A \wedge B$:

$$\dfrac{\wedge - elim_{1\,\rightarrow^1_-}\ \dfrac{\text{Ax}\ \dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}}{A \Rightarrow B \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\ \text{Ax}}{A \Rightarrow B \vdash B}\ \wedge - elim_{2\,\rightarrow^1_-}}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\ \wedge - intro_{\rightarrow^1_+}$$

Adjonction de règles (2)

- Analoguement, la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{?}{A \Rightarrow B \vdash A} \qquad \dfrac{?}{A \Rightarrow B \vdash B}}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \wedge - intro_{\rightarrow^1_+}$$

peut être 'fermée' grâce à l'adjonction de la règle
$A \Rightarrow B \rightarrow^1_- A \wedge B$:

$$\dfrac{\wedge - elim_1{}_{\rightarrow^1_-}\dfrac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}^{\,Ax}}{A \Rightarrow B \vdash A} \qquad \dfrac{\overline{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}^{\,Ax}}{A \Rightarrow B \vdash B}\wedge - elim_2{}_{\rightarrow^1_-}}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B} \wedge - intro_{\rightarrow^1_+}$$

Adjonction de règles et inconsistance

- Pour résumer, l'adjonction des règles de réécriture *duales* à celles de

$$\{A \Rightarrow B \longrightarrow^1_+ A \wedge B, A \wedge B \longrightarrow^1_- A \Rightarrow B\}$$

  permet de recuperer la propriété de l'η-expansion pour les règles d'inférence modulo.

- Toutefois, cette solution n'est pas bonne, car le nouveau système de réécriture amène à l'inconsistance :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \vdash B \wedge A}\,\Rightarrow\text{-intro}\longrightarrow^1_+ \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \wedge A \vdash B \wedge A}\,\text{Ax}}{B \wedge A \vdash B}\,\wedge\text{-elim}_1}{\vdash (B \wedge A) \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{-intro}}{A \vdash B}\,\Rightarrow\text{-elim}}{\vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{-intro (2)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\text{Ax}}{B \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\text{-intro} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,\text{Ax}}{A \Rightarrow B \vdash A}\,\wedge\text{-elim}_1\longrightarrow^1_-}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}\,\Rightarrow\text{-intro}}{B \vdash A}\,\Rightarrow\text{-elim}}{\vdash B \Rightarrow A}\,\Rightarrow\text{-intro}}{\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}\,\wedge\text{-intro}}{\vdash A \Leftrightarrow B}$$

Une tentative de généralisation

- Le résultat négative qu'on vient de tracer nous suggère une piste d'investigation pour rendre plus fine l'analyse des systèmes de réécriture qui confondent les connecteurs.

- Par exemple, on pourrait se demander si dans le cas des deux systèmes de réécriture duaux, on a toujours le fait que l'un des deux élimine les coupure et l'autre non (comme on a vu être le cas pour les connecteurs $\Rightarrow$ et $\wedge$).

- Une inspection des cas nous montre que cette supposition n'est pas vraie, car dans le cas des connecteurs $\Rightarrow$ et $\vee$,
  ni $S + \{A \Rightarrow B \to^1_+ A \vee B, A \vee B \to^1_- A \Rightarrow B\}$
  ni $S + \{A \vee B \to^1_+ A \Rightarrow B, A \Rightarrow B \to^1_- A \vee B\}$
  eliminent les coupures.

Confusion entre connecteurs et élimination des coupures

Resumons la situation pour les systèmes de réécriture qui confondent les connecteurs par rapport à l'élimination des coupures :

Connecteurs $\wedge$ et $\vee$

- $\mathscr{R}_{\wedge,\vee} = \{A \wedge B \to^1_+ A \vee B, A \vee B \to^1_- A \wedge B\}$ NON
- $\mathscr{R}_{\vee,\wedge} = \{A \vee B \to^1_+ A \wedge B, A \wedge B \to^1_- A \vee B\}$ OUI

Connecteurs $\wedge$ et $\Rightarrow$

- $\mathscr{R}_{\wedge,\Rightarrow} = \{A \wedge B \to^1_+ A \Rightarrow B, A \Rightarrow B \to^1_- A \wedge B\}$ NON
- $\mathscr{R}_{\Rightarrow,\wedge} = \{A \Rightarrow B \to^1_+ A \wedge B, A \wedge B \to^1_- A \Rightarrow B\}$ OUI

Connecteurs $\Rightarrow$ et $\vee$

- $\mathscr{R}_{\Rightarrow,\vee} = \{A \Rightarrow B \to^1_+ A \vee B, A \vee B \to^1_- A \Rightarrow B\}$ NON
- $\mathscr{R}_{\vee,\Rightarrow} = \{A \vee B \to^1_+ A \Rightarrow B, A \Rightarrow B \to^1_- A \vee B\}$ NON

Remarque : dans le cas de $\mathscr{R}_{\vee,\wedge}$ l'élimination des coupures n'est pas déterministe.

Un bilan (1)

- Les deux situations pour lesquelles la reponse est positive sont les cas où : 1) pour les règles d'introduction, on substitue $\wedge$ ou bien avec $\vee$ ou bien avec $\Rightarrow$ et, 2) pour les règles d'élimination, on substitue $\vee$ et $\Rightarrow$ avec $\wedge$ dans tous les deux cas.
- Ce sont les deux cas où les règles de réécriture diminuent la *force* des règles d'introduction de façon que les règles d'élimination ne permettent jamais de dériver *plus* de ce qui est déjà contenu dans les règles d'introduction.
  (Cela est exactement la propriété qui ont les système qui admettent l'élimination des coupures)
- On purrait dire, en empruntant une expression de Dummett, que les règles de réécriture doivent être en *harmonie* avec les règles d'inférence.

Un bilan (2)

- Cette *harmonie* se reflète sur le fait que les règles de réécriture des systèmes $\mathscr{R}_{\vee,\wedge}$ et $\mathscr{R}_{\Rightarrow,\wedge}$ d'une certaine manière permettent de condenser des étapes de dérivation.
  Par exemple, pour le cas de $\mathscr{R}_{\vee,\wedge}$, la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \vee B}\ \wedge - intro_{\rightarrow^1_+}$$

  condense la dérivation :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B}\ \wedge - intro}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}\ \wedge - elim_1}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \vee B}\ \vee - intro_1$$

- On pourrait dire que les règles d'inférence, modulo ces deux systèmes de réécriture, se comportent comme des règles dérivables.

Un bilan (3)

- Pour résumer, on peut admettre une réécriture qui fait de la confusion entre les connecteurs, mais sous les conditions suivantes :
  i) soient $\bullet$ et $*$ deux connecteurs (binaires) ; si les règles d'introduction de $\bullet$ sont m-aires et celles de $*$ n-aires, avec $n > m$, alors, pour toute formule A et B, on peut réécrire positivement $A \bullet B$ vers $A * B$ sans perdre l'élimination des coupures.
  ii) soient $*$ et $\bullet$ deux connecteurs ; si les règles d'élimination de $*$ sont m-aires et celles de $\bullet$ n-aires, avec $n > m$, alors, pour toute formule A et B, on peut réécrire négativement $A * B$ vers $A \bullet B$ sans perdre l'élimnation des coupures.

Question ouverte : quelle est la raison du fait que les systèmes $\mathscr{R}_{\vee,\wedge}$ et $\mathscr{R}_{\Rightarrow,\wedge}$ n'ont pas la propriété de l'η-expansion ?

Quatrième partie IV

Conclusions

Un changement de perspective

- Jusqu'ici j'ai essayé de proposer une analyse de certains connecteurs, plus ou moins pathologiques, à l'aide de la déduction modulo.
- Les règles de réécriture, dans ce cas, sont employées de manière 'négative' : elles ont servies juste pour détecter les problèmes liés à ces connecteurs.
- Est-ce qu'on pourrait penser d'employer les règles de réécriture de manière 'positive' ?
  En particulier, est-il possible définire certaines constantes logiques par des règles de réécriture au lieu que par des règles d'inférence ?
- L'idée, philosophiquement parlant, est d'interpréter le mot 'use', dans le slogan 'the meaning is use', non plus comme 'inférence' (ou 'déduction'), mais comme *calcul*.
- Par exemple, cela est l'idée à la base des travaux de Deplagne 2002 et Viry 1998 : leur objectif est de carcatériser la partie propositionnelle d'un système logique par des règles de réécriture qui agissent sur des séquents.

Quelques pistes

- Une autre idée pourrait être d'avoir des règles qui agissent sur les propositions et non pas sur les séquents.
- Un tel type de réécriture pourrait bien s'adapter à des connecteurs unaires, comme les modalités.
- En particulier, les modalité de $S4$ semblent être définissables par un système de réécriture polarisée, asymétrique et conditionnelle.
- Pour l'instant cela n'est qu'une hypothèse de travail !

Cinquième partie V

Bibliographie

Références (1)

- D. DAVIDSON, *Truth and Meaning*, « Synthese », 17 (1967), p. 304-323.
- E. DEPLAGNE, *Système de preuve modulo récurrence*, PhD Thesis, Université Nancy 1, 2002.
- R. DI COSMO, *Isomorphisms of Types : from λ-calculus to information retrieval and language design*, Boston : Birkhäuser, 1995.
- G. DOWEK, *What is a Theory ?*, H. Alt/A. Ferreira (dir.), LNCS, vol. 2285, Berlin : Springer, 2002, p. 5064.
- G. DOWEK, T. HARDIN, C. KIRCHNER, *Theorem Proving Modulo*, « Journal of Automated Reasoning », 31 (2003), p. 33-72.
- M. DUMMETT, *The Logical Basis of Metaphysics*, London : Duckworth, 1991.
- A.N. PRIOR, *The Runabout Inference-ticket*, « Analysis », 21 (1960) 2, p. 38-39.

Références (2)

- G. Sundholm, *Proof Theory and Meaning*, in D. Gabbay/F. Guenthner (dir.), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. III, Dordrecht : Reidel, 1986, p. 471-506.
- A. Tarski, *What are Logical Notions ?*, « History and Philosophy of Logic »,7 (1986), p. 143-154 (transcription d'une conférence du 1966 ; édité par J. Corcoran)
- P. Viry, *Rewriting Modulo a Rewrite System*, Technical Report TR-20/95, University of Pisa, 1995.
- P. Viry, *Adventures in Sequent Calculus Modulo Equations*, in C. Kirchner/H. Kirchner (eds.), *Proceedings of the 2nd International Workshop on Rewrting Logic ans its Applications*, ENTCS, vol. 15, Elsevier, 1998, pp. 367-378.
- L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, trad. de G.E.M. Anscombe, Oxford : Basil Blackwell, 1953.